

Notes de cours

13 mars 2023

1 fusion de colonnes et inertie

On veut montrer

$$\begin{aligned} & \frac{n}{n_{\cdot j}} \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} \right)^2 + \frac{n}{n_{\cdot j'}} \left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right)^2 \\ &= \frac{n}{n_{\cdot j} + n_{\cdot j'}} \left(\frac{n_{ij} + n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j} + n_{\cdot j'}}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned} \left(\frac{n_{ij} + n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j} + n_{\cdot j'}}{n} \right)^2 &= \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} + \frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right)^2 \\ &= \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} \right)^2 + \left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right)^2 + 2 \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} \right) \left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right) \end{aligned}$$

et de plus, comme $n_{ij} = n_{ij'} n_{\cdot j} / n_{\cdot j'}$,

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} \right) \left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right) &= \left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} \frac{n_{\cdot j}}{n_{\cdot j'}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} \right) \left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right) + \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} \right) \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} \frac{n_{\cdot j'}}{n_{\cdot j}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right) \\ &= \frac{n_{\cdot j}}{n_{\cdot j'}} \left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right)^2 + \frac{n_{\cdot j'}}{n_{\cdot j}} \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{n}{n_{\cdot j} + n_{\cdot j'}} \left(\frac{n_{ij} + n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j} + n_{\cdot j'}}{n} \right)^2 &= \frac{n}{n_{\cdot j} + n_{\cdot j'}} \left[\left(1 + \frac{n_{\cdot j}}{n_{\cdot j'}} \right) \left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right)^2 + \left(1 + \frac{n_{\cdot j'}}{n_{\cdot j}} \right) \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} \right)^2 \right] \\ &= \frac{n}{n_{\cdot j}} \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n} \right)^2 + \frac{n}{n_{\cdot j'}} \left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

2 formules barycentriques

Comme \mathbf{a}_k est (à une normalisation près) le facteur principal associé à \mathbf{b}_k , on sait que $\mathbf{b}_k = \alpha \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{a}_k$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_k \frac{\mathbf{D}_2}{n} \mathbf{b}_k &= \lambda_k = \alpha^2 \mathbf{a}'_k \mathbf{N} \mathbf{D}_2^{-1} \frac{\mathbf{D}_2}{n} \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{a}_k = \frac{\alpha^2}{n} \mathbf{a}'_k \mathbf{N} \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{a}_k \\ &= \alpha^2 \mathbf{a}'_k \frac{\mathbf{D}_1}{n} \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{a}_k = \lambda_k \alpha^2 \mathbf{a}'_k \frac{\mathbf{D}_1}{n} \mathbf{a}_k = \lambda_k^2 \alpha^2 \end{aligned}$$

On obtient donc $\lambda_k = \lambda_k^2 \alpha^2$, d'où $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$.