Transport Optimal et théorème de Brenier

Jean-David Benamou (INRIA - MOKAPLAN)

A - TO : un aperçu (très) rapide

B - Une présentation élémentaire du théorème de Brenier

C - Exemple d'application : le problème inverse du reflecteur

Historique

- Gaspard Monge ”Mémoire des déblais et des remblais” (1784) http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge,1094.html.
- Leonid Kantorovich, ”Mathematics in Economics: Achievements, Difficulties, Perspectives”, Nobel Prize lecture, December 11, 1975
- Yann Brenier, ”Polar Factorization and Monotone Rearrangement of Vector-Valued Functions” (CPAM, 1991).
- Cedric Villani, ”Topics in Optimal Transportation” (2003), ”Optimal Transport, Old and New” (2008).
- ... http://images.math.cnrs.fr/_Brenier-Yann_.html http://images.math.cnrs.fr/pdf2004/Villani.pdf

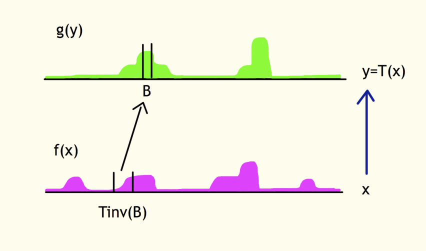
Applications

- Traitement d'image.
- Cosmologie.
- Météorologie: Équation Semi-Géostrophiques
- Maillages mobiles.
- Modèles macroscopiques de mouvement de foules avec congestion.
- Economie.
- Design de reflecteurs.
- ...
- le coût des solveurs numériques est (ètait ?) prohibitif.

Formulation du problème

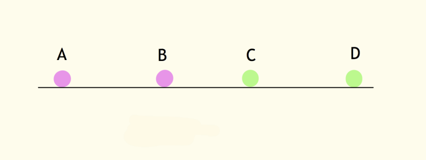
Trouver un "Transport" $x \rightarrow T(x)$ entre les densités de masse f et g tels que :

- Les volumes sont conservés par le transport.
- le coût $\mathcal{C}(T) = \int_X c(x, T(x))\, f(x)dx$ est minimal.



- Coût de déplacement classique : $c(x, y) = \frac{\|y-x\|^p}{p}$.
- Monge : $p = 1$. MK2 (Brenier) : $p = 2$.

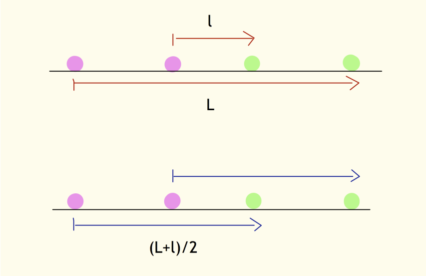
Exemple 1D - transport de 2 masses unitaires



Deux candidats au transport :

- $T_1(A) = D$, $T_1(B) = C$.
- $T_2(A) = C$, $T_2(B) = D$.

Calcul du coût : $\mathcal{C}(T) = c(A, T(A)) + c(B, T(B))$



- Monge : $\mathcal{C}(T_1) = l + L$, $\mathcal{C}(T_2) = 2\,\frac{l+L}{2}$
- MK2 : $\mathcal{C}(T_1) = \frac{l^2}{2} + \frac{L^2}{2}$, $\mathcal{C}(T_2) = 2\,\frac{(\frac{l+L}{2})^2}{2} = \frac{L^2 + 2\,l\,L + l^2}{4}$

Le transport optimal (T_2) n'autorise pas les dépassements ...

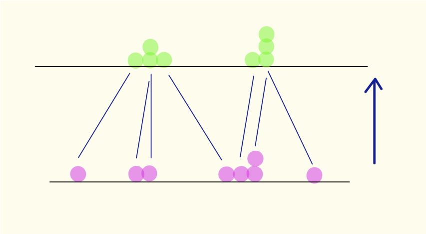
Monotonie du T optimal

- $A \leq B \to T(A) \leq T(B)$.
- ou $(B - A) \cdot (T(B) - T(A)) \geq 0$.
- C'est une conséquence directe du coût quadratique :

$$\min_T \{\frac{\|T(A) - A\|^2}{2} + \frac{\|T(B) - B\|^2}{2}\} \Leftrightarrow \max_T \{A \cdot T(A) + B \cdot T(B)\}$$

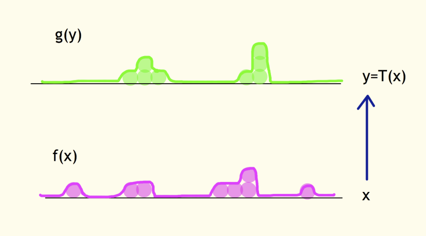
$$(B-A)\cdot(T(B)-T(A)) \geq 0 \Leftrightarrow B\cdot T(B)+A\cdot T(A) \geq A\cdot T(B)+B\cdot T(A).$$

Plus de masses unitaires

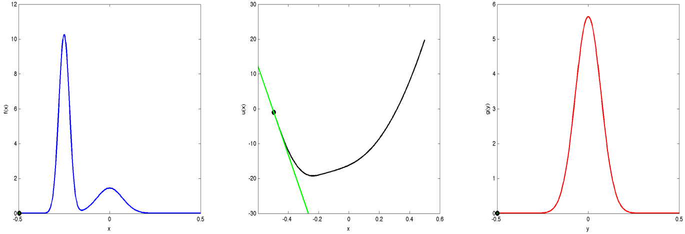


NOTA : en 1D cela donne un algorithme de résolution optimal.

Généralisation a des densités (continues)



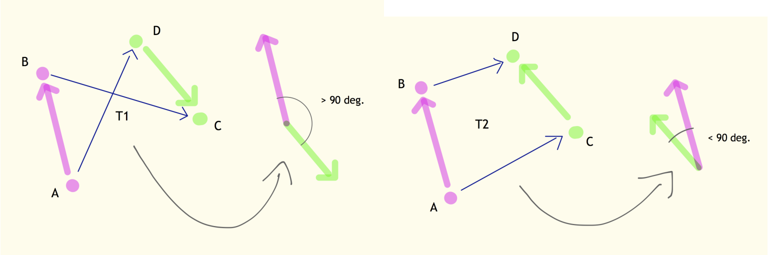
Théorème (Brenier, 91) : Il existe une unique fonction convexe $x \to U(x)$ (à une constante près) tel que $T = \frac{d}{dx}U$.
Facile en dimension 1, reste vrai en toute dimension.


f(x)
x
u(x)
x
g(y)
y

En dimension 2 avec 2 masses unitaires

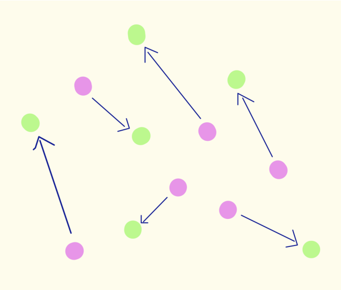
T envoie des points du plan vers des points.
Le critère optimal de monotonie devient :

$$(T(B) - T(A)) \cdot (B - A) = \alpha \cos(\overrightarrow{T(A)T(B)}, \overrightarrow{AB}) \geq 0.$$



Le transport optimal n'autorise pas les croisements.

En dimension 2 avec N masses unitaires



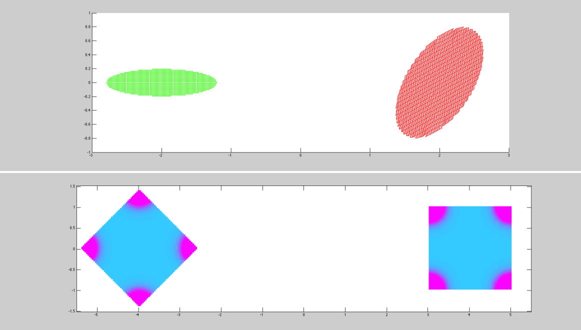
Le transport optimal est cycliquement monotone :

$$T(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + T(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + T(x_k) \cdot (x_0 - x_k) \leq 0.$$

NOTA : le meilleur algorithme ("enchères" de Bertsekas) est de complexité cubique !

Généralisation à des densités (continues)

- Théorème (Brenier, 91) : $\exists !\ T = \nabla U$, U convexe.
  Cor. : ∇U est monotone :
  $$(\nabla U(x_1) - \nabla U(x_0)) \cdot (x_1 - x_0) \geq 0,\ \forall (x_0, x_1)$$
- Illustration : $t \to t\, x + (1-t) T(x),\ t \in [0,1]$



Reflector antenna problem

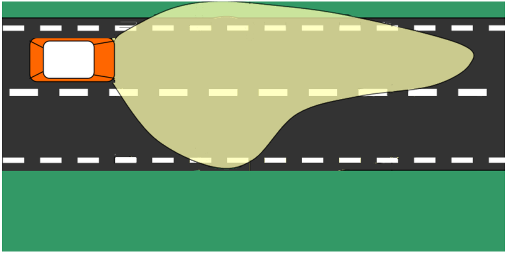
Boris Thibert

LJK Université de Grenoble

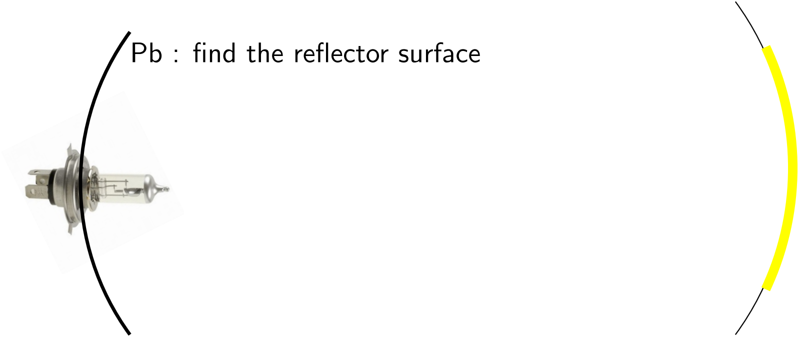
Joint work with Quentin Mérigot and Pedro Machado

Journées de Géométrie Algorithmique
December 16-20, 2013

Motivation



Pb : find the reflector surface



A Monge-Ampère equation in illumination optics

Corien Prins

Promotor: Wil Schilders

Supervisors: Jan ten Thije Boonkkamp

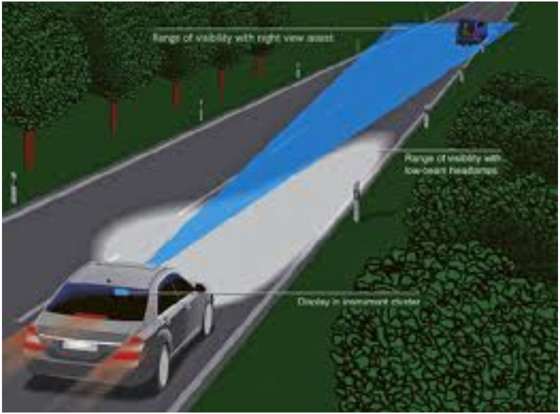
Philips supervisors: Wilbert IJzerman and Teus Tukker

PHILIPS sense and simplicity

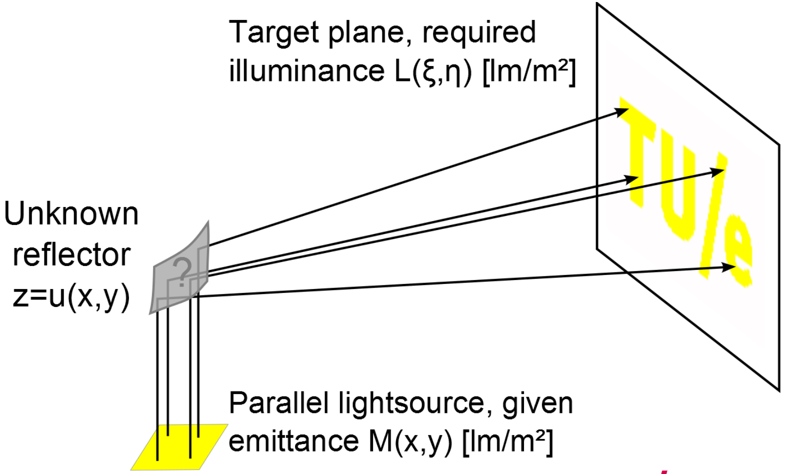
TU/e Technische Universiteit Eindhoven University of Technology

Where innovation starts

Freeform illumination optics



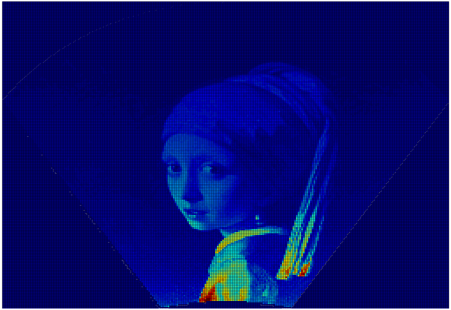
The reflector problem



Girl with a pearl earring

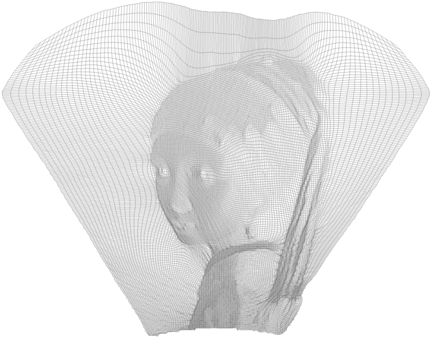
Original

Target intensity in (ux,uy)-space

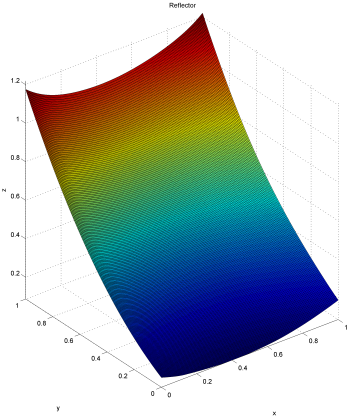


Reflector calculation

Mapping

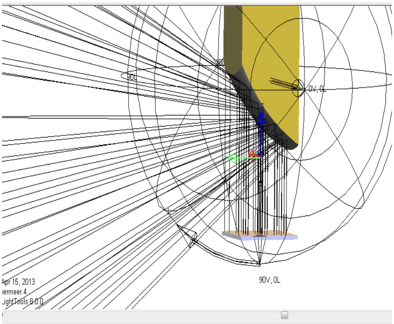


Reflector

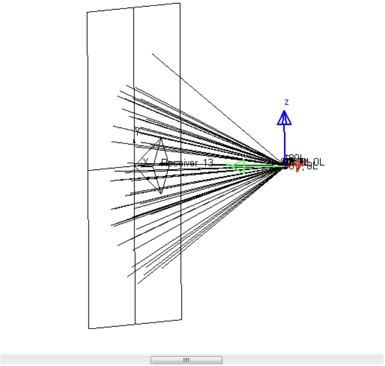


Verification with forward raytracing

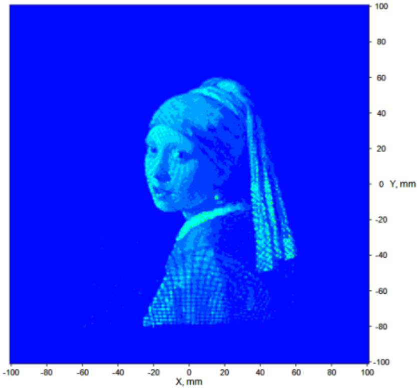
Reflector



Receiver



Illuminance on receiver

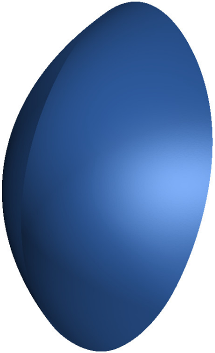


Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology

Numerical results (2)

$\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \delta_{x_i}$ obtained by discretizing a picture of G. Monge.

$\mu =$ uniform measure on half-sphere $\mathcal{S}^2_+$ $\qquad$ $N = 15000$



solution to the far-field reflector problem: $R(\kappa_{\mathrm{sol}})$

Numerical results (2)

$\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \delta_{x_i}$ obtained by discretizing a picture of G. Monge.

$\mu =$ uniform measure on half-sphere $\mathcal{S}^2_+$ $\qquad N = 15000$

rendering of the image reflected at infinity (using LuxRender)

MERCI de votre attention.