OPT202 – Optimisation Différentiable II

Contrôle des connaissances

- Durée : 3 h (on ne peut probablement pas tout faire...).
- Dans chaque sujet (ou sous-sujet), on peut admettre des résultats énoncés dans des questions ou sous-questions *précédentes* pour traiter la question ou sous-question courante.
- On peut consulter tous les documents *distribués au cours*, ainsi que ses propres notes.
- Ne pas écrire en rouge, couleur réservée aux observations des correcteurs.
- *Éteindre tout appareil connecté à un réseau.*

Partie 1 : Quatre sujets indépendants

1. Existence de solution. Est-ce que le problème de minimisation de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 2^x$ sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$ de $\mathbb{R}$ a une solution ? Justifiez votre réponse.

2. Dérivée directionnelle d'une norme. Soient $(\mathbb{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|_{\mathrm{P}}$ une norme sur $\mathbb{E}$ (*pas nécessairement celle associée au produit scalaire* de $\mathbb{E}$). On note $\|\cdot\|_{\mathrm{D}}$ la norme duale de $\|\cdot\|_{\mathrm{P}}$ par rapport au produit scalaire (elle est définie en y par $\|y\|_{\mathrm{D}} := \sup\{\langle y, x\rangle : \|x\|_{\mathrm{P}} \leqslant 1\}$) et $B_{\mathrm{D}} := \{y \in \mathbb{E} : \|y\|_{\mathrm{D}} \leqslant 1\}$ la boule unité duale fermée. Montrez (très rapidement) que la dérivée directionnelle de la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{P}}$ en $x \in \mathbb{E}$ dans la direction $h \in \mathbb{E}$ a pour valeur

$$(\|\cdot\|_{\mathrm{P}})'(x;h) = \max_{\substack{y \in B_{\mathrm{D}} \\ \langle y,x\rangle = \|x\|_{\mathrm{P}}}} \langle y, h\rangle.$$

En déduire (aussi rapidement, ne pas faire une démonstration indépendante) que

$$(\|\cdot\|_{\mathrm{P}})'(0;h) = \|h\|_{\mathrm{P}}.$$

3. Problème de moindres-carrés polyédrique. On considère le problème d'optimisation défini par

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \qquad \text{où } f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = \tfrac{1}{2}\|(Ax-b)^+\|^2 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

A est une matrice réelle $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne (ou ℓ_2) et, pour un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$, y^+ est le vecteur de $\mathbb{R}^m$ dont la i-ième composante est $(y_i)^+ := \max(y_i, 0)$.

1) Montrez que f est convexe.
2) Montrez que $\bar{x}$ est solution de (1) si, et seulement si, $A^{\mathsf{T}}(A\bar{x}-b)^+ = 0$.
3) Montrez que la somme de deux polyèdres convexes est un polyèdre convexe.
4) Montrez que le problème (1) a une solution.

   [*Indication* : On pourra chercher à montrer qu'il s'agit d'un problème de projection.]

On cherche maintenant à déterminer des conditions nécessaires et suffisantes d'*unicité* de la solution du problème (1).

5) Montrez que si $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ sont deux solutions de (1), alors $(A\bar{x}-b)^+ = (A\bar{x}'-b)^+$.

Soit $\bar{x}$ une solution du problème (1) et $I := \{i \in [1:m] : (A\bar{x}-b)_i \geqslant 0\}$. On considère les conditions suivantes :

$$\bar{x} \text{ est solution unique de (1)}, \tag{2}$$

$$\text{tout } d \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A_I d \leqslant 0 \text{ est nul}, \tag{3}$$

$$A_I^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}_+^{|I|}) = \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

6) Montrez que

a) (2) $\Rightarrow$ (3),
b) (2) $\Leftarrow$ (3),
c) (3) $\Leftrightarrow$ (4).

4. Carré de la distance euclidienne à un convexe. Soit $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien dont la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est notée $\| \cdot \|$, C un convexe fermé non vide de $\mathbb{E}$ et P_C le projecteur orthogonal sur C. On note $\mathrm{e}_C : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ la *moitié du carré de la distance à* C, qui est donc la fonction définie en $x \in \mathbb{E}$ par

$$\mathrm{e}_C(x) \coloneqq \inf_{z \in C} \tfrac{1}{2} \|z - x\|^2 = \tfrac{1}{2} \| \mathrm{P}_C(x) - x\|^2.$$

Montrez que

1) la fonction e_C est convexe,
2) pour tout $(x, h) \in \mathbb{E}^2$, on a

$$0 \leqslant \langle \mathrm{P}_C(x) - x, \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x) \rangle \leqslant \|h\|^2, \tag{5}$$

[*Indication* : pour l'inégalité de droite, il faut faire apparaître h dans le facteur de gauche du produit scalaire, de manière à obtenir une majoration par $\|h\|^2$; on se rappellera aussi que la projection sur C est 1-lipschizienne, c'est-à-dire que pour tout x et $y \in \mathbb{E}$, on a $\| \mathrm{P}_C(y) - \mathrm{P}_C(x) \| \leqslant \|y - x\|$.]

3) la fonction e_C est différentiable en tout point $x \in \mathbb{E}$ et son gradient en $x \in \mathbb{E}$ est donné par

$$\nabla \mathrm{e}_C(x) = x - \mathrm{P}_C(x),$$

4) le projecteur P_C est le gradient d'une fonction dérivable.

Partie 2 : Une approche semi-lisse de l'optimisation quadratique convexe

On considère le problème d'optimisation en $x \in \mathbb{R}^n$ suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \inf_x \, q(x) \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases} \tag{6}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction *quadratique convexe* définie en $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$q(x) = g^\top x + \frac{1}{2} x^\top H x,$$

dans laquelle $g \in \mathbb{R}^n$ et H est une matrice réelle d'ordre n symétrique semi-définie positive (i.e., $v^\top H v \geqslant 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$). On note

$$X \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \; x \geqslant 0\}$$

l'ensemble admissible du problème. Tout au long du sujet, on fait l'hypothèse que

$$(P) \text{ \textit{a une solution, notée} } \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

5. Montrez que l'on peut trouver un couple de vecteurs $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} g + H\bar{x} - A^\top \bar{y} - \bar{s} = 0 \\ A\bar{x} = b \\ 0 \leqslant \bar{s} \perp \bar{x} \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Le problème (P) consiste à minimiser la fonction $x \in \mathbb{R}^n \to q(x) + \mathcal{I}_X(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, où $\mathcal{I}_X$ est la fonction indicatrice de l'ensemble X (elle vaut 0 sur X et $+\infty$ en-dehors de X) si bien que (P) s'écrit aussi comme le problème en $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ suivant

$$(P') \quad \begin{cases} \inf_{(x,y)} \, q(x) + \mathcal{I}_X(y) \\ x = y \end{cases}$$

6. *Écriture d'un problème dual.*

1) Expliquez dans quel sens le problème suivant peut être considéré comme un problème dual lagrangien du problème (P') :

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} -q^*(-z) - \mathcal{I}_X^*(z), \tag{8}$$

où q^* et $\mathcal{I}_X^*$ désignent les fonctions conjuguées de q et $\mathcal{I}_X$ respectivement.

2) Montrez que

$$q^*(z) = \frac{1}{2}(z - g)^\top H^\dagger (z - g) + \mathcal{I}_{\mathcal{R}(H)}(z - g), \qquad \forall \, z \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

$$\mathcal{I}_X^* = \sigma_X, \tag{10}$$

où $H^\dagger$ est le *pseudo-inverse* de H (on rappelle que $HH^\dagger H = H$ et $H^\dagger H H^\dagger = H^\dagger$) et σ_X est la *fonction d'appui* de X, définie en $z \in \mathbb{R}^n$ par

$$\sigma_X(z) \coloneqq \sup_{x \in X} z^\top x.$$

3) Montrez que (8) s'écrit comme le problème en $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ suivant

$$(D) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sup_{(z,w)} -\frac{1}{2} w^\mathsf{T} H w - \sigma_X(z) \\ z + Hw + g = 0. \end{array} \right.$$

C'est ce problème que l'on considère ci-dessous comme le dual de (P).

7. *Existence de solution duale et absence de saut de dualité.*

Soit $(\bar{y}, \bar{s})$ une solution de (7) et

$$(\bar{z}, \bar{w}) := (-A^\mathsf{T} \bar{y} - \bar{s}, \bar{x}). \tag{11}$$

1) Montrez qu'en $(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$, l'objectif du problème (D) prend la valeur

$$g^\mathsf{T} \bar{x} + \frac{1}{2} \bar{x}^\mathsf{T} H \bar{x}.$$

2) En déduire que (D) a une solution et qu'il n'y a pas de saut de dualité (les valeurs optimales primale et dual sont identiques).

8. *La lagrangien augmenté du dual.*

On récrit le problème dual (D) comme le problème de minimisation en $(z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ suivant

$$(D') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \inf_{(z,w)} \frac{1}{2} w^\mathsf{T} H w + \sigma_X(z) \\ z + Hw + g = 0. \end{array} \right.$$

Son *lagrangien augmenté* est la fonction $\ell_r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ définie en $(z, w, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$\ell_r(z, w, x) = \frac{1}{2} w^\mathsf{T} H w + \sigma_X(z) - x^\mathsf{T}(z + Hw + g) + \frac{r}{2} \|z + Hw + g\|^2, \tag{12}$$

où $r > 0$ est un paramètre et $\|\cdot\|$ est la norme ℓ_2 (euclidienne)

1) Montrez que le sous-différentiel de la fonction d'appui σ_X (qui est une fonction convexe fermée propre) s'écrit en $z \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial \sigma_X(z) = \arg\max_{x \in X} \langle z, x \rangle.$$

[*Indication* : On pourra utiliser la méthode de la conjuguée.]

2) Montrez l'équivalence suivante :

$$z \in \arg\min \ell_r(\cdot, w, x) \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi(w) - rz \in X \\ \langle z, \xi(w) - rz \rangle \geqslant \langle z, x' \rangle, \quad \forall\, x' \in X, \end{array} \right. \tag{13}$$

où on a noté $\xi(w) := x - r(Hw + g)$.

3) En déduire que (on y a noté P_X le projecteur orthogonal sur X)

$$\arg\min \ell_r(\cdot, w, x) = \frac{1}{r} \left[\xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w)) \right]. \tag{14}$$

4) On introduit la fonction $\psi : w \in \mathbb{R}^n \mapsto \psi(w) := \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \ell_r(z, w, x)$. Montrez que

$$\psi(w) = \frac{1}{2} \langle Hw, w \rangle - \frac{1}{2r} \|\mathrm{P}_X(\xi(w)) - \xi(w)\|^2 + \frac{1}{2r} (\|\xi(w)\|^2 - \|x\|^2).$$

5) Montrez que ψ est différentiable et que son gtradient est donné par

$$\nabla \psi(w) = H[w - \mathrm{P}_X(\xi(w))]. \tag{15}$$

OPT202 – Optimisation Différentiable II
Contrôle des connaissances (solutions succinctes)

1. Le problème n'a pas de solution. Voici des justifications acceptables, de la plus simple à la plus compliquée.

- Aucun x de $]-\infty,0[$ ne peut être solution car $2^{x-1} < 2^x$.
- La borne inférieure de 2^x sur $]-\infty,0[$ est nulle ($2^x \to 0$ lorsque $x \to -\infty$), mais il n'existe pas de $x \in\,]-\infty,0[$ telle que $2^x = 0$.
- C'est une fonction convexe sur $]-\infty,0[$, qui a un minimum en x dans cet ensemble *ouvert* si, et seulement si, sa dérivée s'annule en ce x. Comme la dérivée en x de la fonction vaut $(\log 2)2^x$, cette dérivée ne peut s'annuler sur $]-\infty,0[$ et donc il ne peut y avoir de minimum sur $]-\infty,0[$.

2. Une norme est une fonction de $\mathrm{Conv}(\mathbb{E})$ à valeurs finies. Donc ses dérivées directionnelles ne prennent que des valeurs finies (si $(\|\cdot\|_{\mathrm{P}})'(x;h) = -\infty$, alors $(\|\cdot\|_{\mathrm{P}})'(x;-h) = +\infty$ et si $(\|\cdot\|_{\mathrm{P}})'(x;h) = +\infty$, alors on doit avoir $\|x+th\| = \infty$ pour tout $t > 0$, ce qui n'a pas lieu ; proposition 3.14).

Il suffit alors d'utiliser la formule max qui s'écrit

$$(\|\cdot\|_{\mathrm{P}})'(x;h) = \max_{y\in\partial(\|\cdot\|_{\mathrm{P}})(x)} \langle y,h\rangle$$

et de se rappeler que $\partial(\|\cdot\|_{\mathrm{P}})(x) = \{y \in B_{\mathrm{D}} : \langle y,x\rangle = \|x\|_{\mathrm{P}}\}$ (exercice IX.5).

On en déduit que

$$(\|\cdot\|_{\mathrm{P}})'(0;h) = \max_{y\in B_{\mathrm{D}}} \langle y,h\rangle = \|h\|_{\mathrm{DD}} = \|h\|_{\mathrm{P}},$$

où $\|\cdot\|_{\mathrm{DD}}$ est la norme biduale de $\|\cdot\|_{\mathrm{P}}$ qui est identique à la norme initiale $\|\cdot\|_{\mathrm{P}}$ (aussi démontré dans l'exercice IX.5).

3. 1) Le plus simple est d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in[1:m]} \left[(A_{i:}x - b_i)^+\right]^2\right)$$

et d'observer que chaque terme $x \mapsto [(A_{i:}x-b_i)^+]^2$ est convexe comme composition de l'application linéaire $x \in \mathbb{R}^n \mapsto A_{i:}x - b_i \in \mathbb{R}$ et de la fonction convexe $t \in \mathbb{R} \mapsto (t^+)^2 \in \mathbb{R}$.

Il y a beaucoup d'autres démonstrations possibles.

2) On a vu aux TD X.6 que $x \mapsto \frac{1}{2}\|c(x)^+\|^2$ est différentiable si c est une fonction différentiable et qu'alors son gradient pour le produit scalaire euclidien est donné par $c'(x)^{\mathsf{T}}c(x)^+$. Donc f dans (1) est une fonction convexe différentiable. On en déduit que $\bar{x}$ est solution de (1) si, et seulement si, $0 = \nabla f(\bar{x}) = A^{\mathsf{T}}(A\bar{x}-b)^+$.

3) Si $P_1 = \{x_1 \in \mathbb{E}_1 : A_1x_1 \leqslant b_1\}$ et $P_2 = \{x_2 \in \mathbb{E}_2 : A_2x_2 \leqslant b_2\}$ sont deux polyèdres convexes, $P_1 \times P_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 : A_1x_1 \leqslant b_1,\ A_2x_2 \leqslant b_2\}$ est un polyèdre convexe de $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$. Comme $\sigma : \mathbb{E}\times\mathbb{E} \to \mathbb{E} : (x_1,x_2) \mapsto x_1 + x_2$ est linéaire, $\sigma(P_1 \times P_2) = P_1 + P_2$ est un polyèdre convexe de $\mathbb{E}$ (résultat vu au cours) ; celui-ci s'écrit donc $P_1 + P_2 = \{x_1 + x_2 \in \mathbb{E} : A_1x_1 \leqslant b_1, A_2x_2 \leqslant b_2\}$.

4) On cherche à montrer qu'il s'agit d'un problème de projection (on s'inspire du problème de moindres-carrés linéaire). Si l'on note $v^- := (-v)^+$, on peut écrire

$$\begin{array}{rcl} (Ax-b)^+ & = & (Ax-b)^- + (Ax-b) \\ & = & [-(Ax-b)]^+ - [-(Ax-b)] \\ & = & \mathrm{P}_{\mathbb{R}^m_+}[-(Ax-b)] - [-(Ax-b)]. \end{array}$$

Dès lors, $\|(Ax-b)^+\|$ est la distance de $-(Ax-b) = b - Ax$ à $\mathbb{R}^m_+$: et le problème consiste donc à minimiser la distance de $\mathcal{R}(A) + b$ à $\mathbb{R}^m_+$, ce qui s'écrit

$$\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ p\in\mathbb{R}^m_+}} \|Ax + b - p\|.$$

Ce dernier problème consiste à projeter 0 sur $\mathcal{R}(A) + b - \mathbb{R}^m_+$. Comme $\mathcal{R}(A) + b - \mathbb{R}^m_+$ est un convexe fermé (c'est un polyèdre convexe par le point 3) non vide, ce dernier problème a une solution unique $(A\bar{x}, \bar{p}) \in \mathcal{R}(A) \times \mathbb{R}^m_+$ ($\bar{x}$ n'est pas déterminé de manière unique, cependant). Alors, d'après ce qui précède, $-\bar{x}$ est solution du problème original.

5) Soient $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ deux solutions. Par le raisonnement du point précédent et l'unicité de la projection de 0 sur $\mathcal{R}(A) + b - \mathbb{R}^m_+$, on a $-A\bar{x} + b - \bar{p} = -A\bar{x}' + b - \bar{p}'$ avec $\bar{p}$ et $\bar{p}' \in \mathbb{R}^m_+$. Mais $\bar{p}$ est solution de

$$\inf_{p\in\mathbb{R}^m_+} \| - A\bar{x} + b - p\|.$$

Donc $\bar{p} = (-A\bar{x} + b)^+ = (A\bar{x} - b)^-$. De même, $\bar{p}' = (A\bar{x}' - b)^-$. Alors, l'identité $-A\bar{x} + b - \bar{p} = -A\bar{x}' + b - \bar{p}'$ devient $(A\bar{x} - b)^+ = (A\bar{x}' - b)^+$.

6) a) Soit $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $A_I d \leqslant 0$. On note $x_t := \bar{x} + td$. Pour $t > 0$ assez petit, on a $0 \leqslant (Ax_t - b)^+ \leqslant (A\bar{x} - b)^+$, ce qui implique que x_t est aussi solution de (1). Par (2), $x_t = \bar{x}$ et donc que $d = 0$.

b) Soient $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ deux solutions de (1). Alors

$$\begin{array}{rcll} (A\bar{x} - b)_I & = & (A\bar{x} - b)^+_I & [\text{définition de } I] \\ & = & (A\bar{x}' - b)^+_I & [(A\bar{x} - b)^+ = (A\bar{x}' - b)^+ \text{ par le point } 3] \\ & \geqslant & (A\bar{x}' - b)_I & [v^+ \geqslant v]. \end{array}$$

On en déduit que $A_I(\bar{x}' - \bar{x}) \leqslant 0$ et $\bar{x}' = \bar{x}$ par (3).

c) On a

$$\begin{array}{rll} (3) & \iff & \{0\} = \{d : A_I d \leqslant 0\} \\ & \iff & \mathbb{R}^n = \{d : A_I d \leqslant 0\}^+ \qquad [\text{en prenant les duaux}] \\ & \iff & \mathbb{R}^n = A_I^\top(\mathbb{R}^{|I|}_-) \qquad [\text{lemme de Farkas}] \\ & \iff & (4) \qquad [\mathbb{R}^{|I|}_+ = -\mathbb{R}^{|I|}_-]. \end{array}$$

4. 1) La fonction e_C est convexe comme composition de la fonction convexe d_C (distance au convexe C, TD1) et de la fonction convexe croissante $t \mapsto (t^+)^2$.

2) L'inégalité de gauche

$$0 \leqslant \langle \mathrm{P}_C(x) - x, \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x)\rangle \tag{16}$$

s'obtient par la caractérisation classique du projeté $\mathrm{P}_C(x)$, avec $\mathrm{P}_C(x+h)$ comme point-test dans C.

Pour l'inégalité de droite, on décompose le facteur de gauche du produit scalaire comme suit

$$\mathrm{P}_C(x) - x = \big[\mathrm{P}_C(x) - \mathrm{P}_C(x+h)\big] + \big[\mathrm{P}_C(x+h) - (x+h)\big] + \big[h\big].$$

Le produit scalaire de ces trois termes avec $\mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x)$ donne (les justifications suivent)

$$\langle \mathrm{P}_C(x) - \mathrm{P}_C(x+h), \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x)\rangle \leqslant 0, \tag{17a}$$

$$\langle \mathrm{P}_C(x+h) - (x+h), \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x)\rangle \leqslant 0, \tag{17b}$$

$$\langle h, \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x)\rangle \leqslant \|h\| \, \| \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x)\| \leqslant \|h\|^2. \tag{17c}$$

Voici les justifications.

- L'inégalité (17a) est claire, car le membre de gauche est $-\| \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x)\|^2$.
- L'inégalité (17b) est la caractérisation classique du projeté $\mathrm{P}_C(x+h)$, avec $\mathrm{P}_C(x)$ comme point-test dans C.
- La première inégalité dans (17c) est celle de Cauchy-Schwarz ; la seconde provient de la 1-lipschitzianité de la projection.

On en déduit (5).

3) Il s'agit de montrer que

$$\mathrm{e}_C(x+h) - \mathrm{e}_C(x) - \langle x - \mathrm{P}_C(X), h\rangle = O(\|h\|^2).$$

On a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}_C(x+h) - \mathrm{e}_C(x) - \langle x - \mathrm{P}_C(X), h\rangle \\
&\quad= \frac{1}{2}\| \mathrm{P}_C(x+h) - (x+h)\|^2 - \frac{1}{2}\| \mathrm{P}_C(x) - x\|^2 - \langle x - \mathrm{P}_C(X), h\rangle \\
&\quad= \frac{1}{2}\| \mathrm{P}_C(x+h)\|^2 - \langle \mathrm{P}_C(x+h), x+h\rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2 + \langle x, h\rangle + \frac{1}{2}\|h\|^2 \\
&\qquad -\frac{1}{2}\| \mathrm{P}_C(x)\|^2 + \langle \mathrm{P}_C(x), x\rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x - \mathrm{P}_C(X), h\rangle \\
&\quad= \frac{1}{2}\| \mathrm{P}_C(x+h)\|^2 - \langle \mathrm{P}_C(x+h), x+h\rangle \\
&\qquad -\frac{1}{2}\| \mathrm{P}_C(x)\|^2 + \langle \mathrm{P}_C(x), x\rangle + \langle \mathrm{P}_C(X), h\rangle + O(\|h\|^2).
\end{aligned}$$

On utilise maintenant

$$\langle \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x), h\rangle = O(\|h\|^2),$$

$$\frac{1}{2}\| \mathrm{P}_C(x+h)\|^2 - \frac{1}{2}\| \mathrm{P}_C(x)\|^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\| \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x)\|^2}_{O(\|h\|^2} + \langle \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x), \mathrm{P}_C(x)\rangle,$$

si bien que l'on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}_C(x+h) - \mathrm{e}_C(x) - \langle x - \mathrm{P}_C(X), h\rangle \\
&\quad= \langle \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x), \mathrm{P}_C(x)\rangle - \langle \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x), x\rangle + O(\|h\|^2) \\
&\quad= \langle \mathrm{P}_C(x+h) - \mathrm{P}_C(x), \mathrm{P}_C(x) - x\rangle + O(\|h\|^2) \\
&\quad= O(\|h\|^2) \qquad [(5)].
\end{aligned}$$

4) D'après le point 3, $\mathrm{P}_C(x)$ est le gradient de $x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2 - \mathrm{e}_C(x)$ en x.

Remarque: on trouvera chez Moreau [2 ; proposition 7.d] une démonstration indirecte (via l'application prox), mais plus courte de ce résultat.

5. Ce sont les conditions d'optimalité de KKT du problème (P), qui utilise le lagrangien

$$(x, y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \quad \mapsto \quad q(x) - y^\mathsf{T}(Ax - b) - s^\mathsf{T} x.$$

La première équation de (7) est l'annulation du gradient du lagrangien par rapport à x, la seconde est la contrainte d'égalité et la troisième sont les conditions de complémentarité correspondant à la contrainte d'inégalité $x \geqslant 0$.

6. 1) Le problème (P') s'écrit aussi

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} q(x)+\mathcal{I}_X(y)+z^\top(x-y)$$

Son dual min-max est donc

$$\begin{aligned}&\sup_{z\in\mathbb{R}^n} \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} q(x)+\mathcal{I}_X(y)+z^\top(x-y).\\ =\ & \sup_{z\in\mathbb{R}^n} -\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (-z)^\top x - q(x)\right)-\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} z^\top y-\mathcal{I}_X(y)\right)\\ =\ & \sup_{z\in\mathbb{R}^n} -q^*(-z)-\mathcal{I}_X^*(z),\end{aligned}$$

qui est (8).

2) • D'une part, on a

$$q^*(z)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n} z^\top x-q(x)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (z-g)^\top x-\frac{1}{2}x^\top Hx.$$

– Si $z-g\notin\mathcal{R}(H)$, le dernier supremum vaut $+\infty$ (TD I.9).

– Sinon, le problème a une solution (TD I.9) et toute solution x vérifie (CNS d'optimalité du premier ordre)

$$Hx=z-g.$$

Première possibilité (en utilisant une solution particulière). Une solution particulière de ce système est $x=H^\dagger(z-g)$ puisque $z-g=Hx_0$ pour un certain $x_0\in\mathbb{R}^n$ et donc on a $HH^\dagger(z-g)=HH^\dagger Hx_0=Hx_0=z-g$, où on a utilisé $HH^\dagger H=H$. Alors, la valeur optimale vaut $\frac{1}{2}(z-g)^\top H^\dagger(z-g)$, grâce à l'identité $H^\dagger HH^\dagger=H^\dagger$.

Seconde possibilité (sans utiliser une solution particulière). Comme toute solution x vérifie $Hx=z-g$, on a en utilisant cette fois $H=HH^\dagger H$:

$$(z-g)^\top x-\frac{1}{2}x^\top Hx=\frac{1}{2}x^\top Hx=\frac{1}{2}x^\top HH^\dagger Hx=\frac{1}{2}(z-g)^\top H^\dagger(z-g).$$

On a donc bien montré (9).

• D'autre part, il est clair que

$$\mathcal{I}_X^*(z)=\sup_{x\in X} z^\top x=:\sigma_X(z),$$

ce qui démontre (10).

3) Avec le point 2, le problème dual (8) devient

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n} -\frac{1}{2}(z+g)^\top H^\dagger(z+g)-\mathcal{I}_{\mathcal{R}(H)}(z+g)-\sigma_X(z),$$

En transformant l'effet de la fonctioin indicatice par la contrainte $z+g\in\mathcal{R}(H)$ ou $z+g+Hw=0$ pour un certain $w\in\mathbb{R}^n$, on obtient le problème dual (D).

En réalité, (D) est le *dual de Fenchel* de (P), qui diffère de son *dual lagrangien*.

7. 1) On a

$$\sigma_X(\bar z)=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ Ax=b\\ x\geqslant 0}} -(A^\top\bar y+\bar s)^\top x=-b^\top\bar y-\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ Ax=b\\ x\geqslant 0}} \bar s^\top x=-b^\top\bar y,$$

parce que, par (7), $\bar{s}^{\mathsf{T}}x \geqslant 0$ quand $x \geqslant 0$ et $\bar{s}^{\mathsf{T}}\bar{x} = 0$. Dès lors, pour $(\bar{z}, \bar{w})$ donné par (11), l'objectif de (D) s'écrit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\,\bar{x}^{\mathsf{T}}H\bar{x} + b^{\mathsf{T}}\bar{y} &= -\frac{1}{2}\,\bar{x}^{\mathsf{T}}H\bar{x} + g^{\mathsf{T}}\bar{x} + \bar{x}^{\mathsf{T}}H\bar{x} \qquad [(7)] \\ &= g^{\mathsf{T}}\bar{x} + \frac{1}{2}\,\bar{x}^{\mathsf{T}}H\bar{x}. \end{aligned}$$

2) Le couple $(\bar{z}, \bar{w})$ est admissible pour (D), car

$$\bar{z} + H\bar{w} + g = -A^{\mathsf{T}}\bar{y} - \bar{s} + H\bar{x} + g = 0,$$

par (7). Dès lors

$$\mathrm{val}(D) \geqslant g^{\mathsf{T}}\bar{x} + \frac{1}{2}\,\bar{x}^{\mathsf{T}}H\bar{x} = \mathrm{val}(P).$$

Comme $\mathrm{val}(D) \leqslant \mathrm{val}(P)$ par dualité faible (on a obtenu (D) par dualité lagrangienne), on en déduit que $\mathrm{val}(D) = \mathrm{val}(P)$ (pas de saut de dualité) et que $(\bar{z}, \bar{w})$ est solution de (D).

8. 1) D'après (10), $\sigma_X = \mathcal{I}_X^*$. Alors $\sigma_X^* = \mathcal{I}_X^{**}$. Comme X est un convexe fermé non vide, $\mathcal{I}_X \in \overline{\mathrm{Conv}}(\mathbb{E})$ et se confond donc avec sa biconjuguée. Donc

$$\sigma_X^* = \mathcal{I}_X. \tag{18}$$

Le résultat résulte alors des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & x \in \partial\sigma_X(z) \\ \iff\ & \sigma_X(z) + \sigma_X^*(x) = \langle z, x\rangle \qquad [\text{proposition 3.49 } (v)] \\ \iff\ & \sigma_X(z) + \mathcal{I}_X(x) = \langle z, x\rangle \qquad [(18)] \\ \iff\ & x \in X \text{ et } \sup\{\langle z, x'\rangle : x' \in X\} = \langle z, x\rangle \qquad [\text{définition de } \sigma_X] \\ \iff\ & x \in \operatorname*{arg\,max}_{x' \in X}\, \langle z, x'\rangle. \end{aligned}$$

2) Cela résulte des équivalemces suivantes, la première résultant du corollaire 3.55(2) et de la proposition 3.65 :

$$\begin{aligned} z \in \arg\min \ell_r(\cdot, w, x) &\iff 0 \in \partial\sigma_X(z) - x + r(z + Hw + g) \\ &\iff \xi(w) - rz \in \partial\sigma_X(z) \\ &\iff \xi(w) - rz \in \arg\max_{x' \in X}\, \langle z, x'\rangle \qquad [\text{point 1}] \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \xi(w) - rz \in X \\ \langle z, \xi(w) - rz\rangle \geqslant \langle z, x'\rangle, \quad \forall\, x' \in X. \end{array} \right. \end{aligned}$$

3) Observons d'abord que l'on a

$$\begin{aligned} & \langle z, \xi(w) - rz\rangle \geqslant \langle z, x'\rangle, \quad \forall\, x' \in X \\ \iff\ & \langle rz, \xi(w) - rz - x'\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, x' \in X \\ \iff\ & \langle x' - [\xi(w) - rz], [\xi(w) - rz] - \xi(w)\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, x' \in X. \end{aligned}$$

Avec la condition supplémentaire que l'on a à droite dans (13), on voit que

$$\begin{aligned} z \in \arg\min \ell_r(\cdot, w, x) &\iff \xi(w) - rz = \mathrm{P}_X(\xi(w)) \\ &\iff z = r^{-1}[\xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w))]. \end{aligned}$$

D'où l'identité (14).

4) Soit $z(w)$ le minimiseur de $\ell_r(\cdot, w, x)$ donné par (14). On calcule facilement

$$\begin{aligned}
z(w) + Hw + g &= \frac{1}{r}\big[x - \mathrm{P}_X(\xi(w))\big], \\
r\,\sigma_X(z(w)) &= \sigma_X\big(\xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w)\big) \\
&= \sup_{x' \in X} \langle \xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w)), x' \rangle \\
&= \langle \xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w)), \mathrm{P}_X(\xi(w)) \rangle \\
&\quad + \sup_{x' \in X} \langle \xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w)), x' - \mathrm{P}_X(\xi(w)) \rangle \\
&= \langle \xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w)), \mathrm{P}_X(\xi(w)) \rangle,
\end{aligned}$$

parce que $\langle \xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w)), x' - \mathrm{P}_X(\xi(w)) \rangle \leqslant 0$ (une propriété de la projection) et que la borne supérieure est atteinte en prenant $x' = \mathrm{P}_X(\xi(w))$. Alors, le lagrangien augmenté (12) prend en $z(w)$ la valeur

$$\begin{aligned}
\psi(w) &= \ell_r\big(z(w), w, x\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\, w^\mathsf{T} H w + \sigma_X(z(w)) - x^\mathsf{T}(z(w) + Hw + g) + \tfrac{r}{2}\|z(w) + Hw + g\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\, w^\mathsf{T} H w + \tfrac{1}{r}\langle \xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w)), \mathrm{P}_X(\xi(w)) \rangle \\
&\quad - \tfrac{1}{r}\langle x, x - \mathrm{P}_X(\xi(w)) \rangle + \tfrac{1}{2r}\|x - \mathrm{P}_X(\xi(w))\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\, w^\mathsf{T} H w + \tfrac{1}{r}\langle \xi(w), \mathrm{P}_X(\xi(w)) \rangle - \tfrac{1}{2r}\|x\|^2 - \tfrac{1}{2r}\|\mathrm{P}_X(\xi(w))\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\, w^\mathsf{T} H w - \tfrac{1}{2r}\|\mathrm{P}_X(\xi(w)) - \xi(w)\|^2 + \tfrac{1}{2r}(\|\xi(w)\|^2 - \|x\|^2),
\end{aligned}$$

qui est la valeur recherchée.

5) La valeur $\psi(w)$ peut aussi s'écrire

$$\psi(w) = \frac{1}{2}\langle Hw, w \rangle - \frac{1}{r}\,\mathrm{e}_X(\xi(w)) + \frac{1}{2r}(\|\xi(w)\|^2 - \|x\|^2).$$

où e_X est la moitié du carré de la distance à X, qui est une fonction dérivable (voir la question 4). Donc ψ est dérivable et son gradient est donné par

$$\begin{aligned}
\nabla\psi(w) &= Hw - \frac{1}{r}\xi'(w)^\mathsf{T}\nabla\,\mathrm{e}_X(\xi(w)) + \frac{1}{r}\xi'(w)^\mathsf{T}\xi(w) \\
&= Hw + H[\xi(w) - \mathrm{P}_X(\xi(w)] - H\xi(w) \\
&= H[w - \mathrm{P}_X(\xi(w)].
\end{aligned}$$

Remarque. Une méthode de Newton semi-lisse de résolution du problème quadtatique convexe omniprésent (6) consiste à résoudre par un *algorithme de Newton semi-lisse* l'équation non lisse (15), ce qui revient à minimiser la fonction convexe ψ, qui est quadratique par morceaux. Le cadre présenté ici généralise quelque peu celui particulier de [1 ; § 4], dans lequel le polyèdre convexe est le polytope de Birkhoff.

Bibliographie

[1] X. Li, D. Sun, K.-C. Toh (2020). On the efficient computation of a generalized Jacobian of the projector over the Birkhoff polytope. *Mathematical Programming*, 179, 419–446. [doi]. 10

[2] J.-J. Moreau (1965). Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93, 273–299. [url]. 7