$\boxed{\text{Ex XII.4}}$

- S^n = ensemble des matrices symétriques d'ordre n

  S^n_{++} = cône des matrices de S^n définies positives.

  euclidien pour le produit scalaire

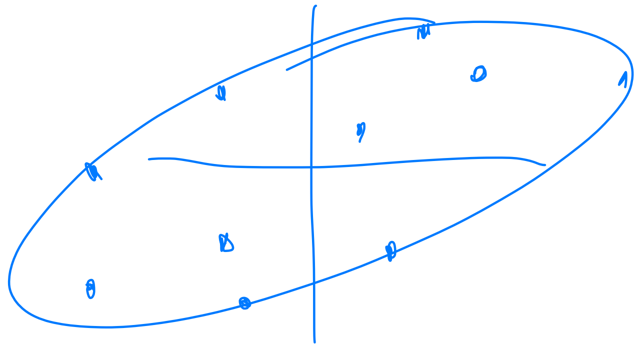
$$\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr} AB = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}$$

- Dans $\mathbb{R}^n$: un ellipsoïde est un ensemble de la forme

$$\mathcal{E} = \{ y \in \mathbb{R}^n : y^T H y \leq 1 \} \quad \text{où } H \succ 0$$

$$H = X X \quad \text{où } X = H^{1/2}$$

$$\mathcal{E} = \{ y \in \mathbb{R}^n : \| X y \| \leq 1 \}$$



$y^1, \dots, y^m$

On cherche $\mathcal{E}$ de volume minimal qui contient les y^i, $i \in [1:m]$

$$vol(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} 1 \, dy \underset{\substack{z = Xy \\ y = X^{-1} z}}{=} \int_{B} |\det X^{-1}| \, dz = \frac{\sigma_n}{\det X}$$

$\Rightarrow$ maximiser $\det X$

$\Rightarrow$ minimiser $-\log \det X$

s.c. $\begin{cases} \|X y^i\| \leq 1, & \forall i \in [1:m] \\ X \succ 0 \end{cases}$

$$ld(X) = \begin{cases} -\log \det X & \text{si } X \succ 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(P)\quad \begin{cases} \min \ \operatorname{ld}(X) \\ \|X y^i\|^2 \le 1, \quad \forall i \in [1:m] \end{cases}$$

(1) $$c_y(X) = \|X y\|^2 \qquad c_y : S^n \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{\nabla c_y(X) = X y y^T + y y^T X}$$

$$c_y(X+H) = y^T(X+H)(X+H)y = \|(X+H)y\|^2$$

$$= c_y(X) + y^T X H y + y^T H X y + \underbrace{y^T H H y}_{O(\|H\|^2)}$$

$$c_y'(X)\cdot H = y^T X H y + y^T H X y = \langle \nabla c_y(X), H\rangle$$

$$= \operatorname{tr} y^T X H y + \operatorname{tr} y^T H X y$$

$$= \operatorname{tr} y y^T X H + \operatorname{tr} X y y^T H$$

$$= \langle X y y^T, H\rangle + \langle y y^T X, H\rangle$$

$A : m \times n$
$B : n \times m$
$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$

$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} A^T B$

(2) $Y = (y^1 \cdots y^m)$ $\quad n \times m$

$$\boxed{\text{les } y^i \text{ engendrent } \mathbb{R}^n \iff YY^T \succ 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \ \exists \alpha \in \mathbb{R}^m : \quad z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y^i = Y\alpha$$

$\iff$ Y surjective

$\iff$ Y^T injective

$\iff$ $YY^T \succ 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\alpha^T Y Y^T \alpha = \|Y^T \alpha\|^2 > 0, \ \forall \alpha \neq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $Y^T \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^T \underbrace{YY^T}_{\succ 0} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

3

$$(P)\begin{cases} \min \ \mathrm{ld}(X) \\ c_{j,i}(X) \leq 1, \quad \forall i \in [1:m] \end{cases}$$

$$\mathcal{X} = \{ X \in S^n_{++} : \| X y^i \| \leq 1, \ \forall i \in [1:m] \}$$

3.a $\boxed{\mathcal{X} \neq \emptyset}$ $X = \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$ petit

3.b $\boxed{\mathcal{X} \text{ est borné}}$ 1) méthode spécifique

$$e^i = Y \alpha$$

$(X e^i)$ borné pour $X \in \mathcal{X}$

$$X e^i = X Y \alpha$$
$$= (X y^1 \ldots X y^m) \alpha$$
$$= \sum_{j=1}^m \alpha_j X y^j$$

$\forall X \in \mathcal{X}$ $\quad \| X e^i \| \leq \sum_j |\alpha_j| \, \| X y^j \| \leq \| \alpha \|_1$

2) Méthode générale   On raisonne par l'absurde

Si $\mathcal{X}$ n'est pas borné, $\exists (X_k) \subset \mathcal{X}$

$$\|X_k\| \to \infty$$

Sous-suite : $\dfrac{X_k}{\|X_k\|} \to D \neq 0 \quad (\|D\| = 1)$

On cherche une contradiction (i.e. $D = 0$)

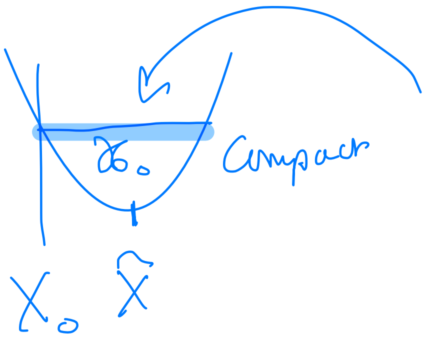
$$\left\| \frac{X_k}{\|X_k\|} y^i \right\| \leq \frac{1}{\|X_k\|}$$

contradiction

$$\|D y^i\| = 0 \qquad D y^i = 0, \ \forall i$$

$$DY = 0 \quad (Y \text{ surjective}) \Rightarrow D = 0$$

3.c



Soit $X_0 \in \mathcal{X}$

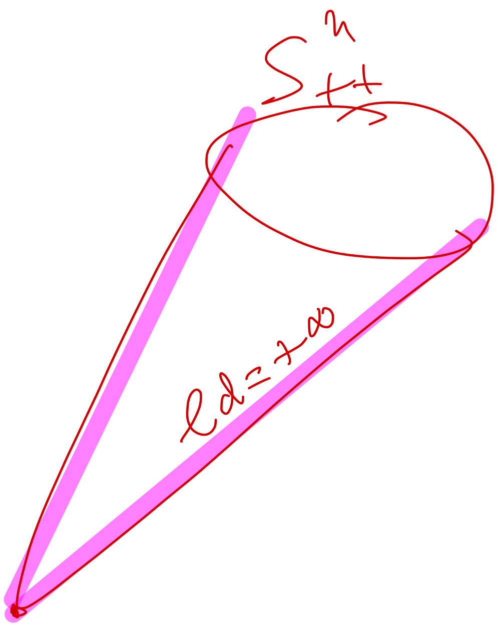
$$\boxed{\{X \in \mathcal{X} : \mathrm{ld}(X) \le \mathrm{ld}(X_0)\} \text{ est compact}}$$

$\mathcal{X}_0$ est borné (car $\mathcal{X}$ est borné)

$\mathcal{X}_0$ est fermé ?

Soit $(X_k) \subset \mathcal{X}_0$ avec $X_k \to X$

$\overset{?}{\Rightarrow} X \in \mathcal{X}_0$



$(\mathcal{X} = \{X \in S_{++}^n : \|X y^i\| \le 1, \forall i \in [1:m]\})$

- $\|X_k y^i\| \le 1 \xrightarrow{\text{à la limite}} \|X y^i\| \le 1$
- $\log\det(X_k) \ge \log\det(X_0)$, $\forall k$

$\Leftrightarrow \det(X_k) \ge \det(X_0) > 0$

$\Rightarrow \det(X) \ge \det(X_0) > 0$

$\det(X) = \prod_i d_i(X)$ et $d_i(X) \ge 0 \Rightarrow d_i(X) > 0$ $\quad \forall i \in [1:m]$

$\Rightarrow X \in \mathcal{X}_0$

et on a aussi $\mathrm{ld}(X) \leq \mathrm{ld}(X_0)$

$\Rightarrow X \in \mathcal{X}_0$

3.d $\boxed{(P) \text{ a une solution}}$

$(P') \begin{cases} \min \mathrm{ld}(X) \\ X \in \mathcal{X}_0 \end{cases}$ a 1 solution car ld est fermée et $\mathcal{X}_0$ est compact

$\Rightarrow$ soit $\hat{X}$

et $\hat{X}$ est aussi solution de (P) car

- $\mathrm{ld}(\hat{X}) \leq \mathrm{ld}(X)$ si $X \in \mathcal{X}_0$
- si $X \notin \mathcal{X}_0$ alors $\mathrm{ld}(\hat{X}) \leq \mathrm{ld}(X_0) \leq \mathrm{ld}(X)$

$\Rightarrow \hat{X}$ est aussi solution de (P)

3.e $\boxed{\text{(P) a une \underline{unique} solution}}$

car ld est strictement convexe.

(voir TD 1)

4 $\boxed{\text{Les contraintes de (P) sont qualifiées}}$

$$(P) \begin{cases} \min \ \mathrm{ld}(X) \\ \|X_i y_i\| \leq 1 \end{cases} \leftarrow \lambda_i$$

(QC-S) (Slater) vérifiée

car $\exists \check{X} : \quad \|\check{X} y_i\| < 1$

(il suffit de prendre $\check{X} = \varepsilon I$ avec $\varepsilon > 0$ petit)

5 **Écrire les conditions d'optimalité de (KKT)**

$$\ell(X,\lambda) = \mathrm{ld}(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\|X y_i\|^2 - 1 \right)$$

- $\ell'_X(X,\lambda) \cdot H = 0 \quad , \forall H \in S^n$

$$\left(\nabla_X \ell(X,\lambda) = 0 \right)$$

$$\det{}'(X) \cdot H = (\det X)\, \mathrm{tr}(X^{-1} H) \qquad \text{si } X \text{ est inversible}$$

$$\mathrm{ld}(X) = -\log\det(X)$$

$$\mathrm{ld}'(X) \cdot H = -\frac{1}{\cancel{\det X}} \left(\cancel{\det X} \right) \left(\mathrm{tr}\, X^{-1} H \right)$$

$$= -\langle X^{-1}, H \rangle$$

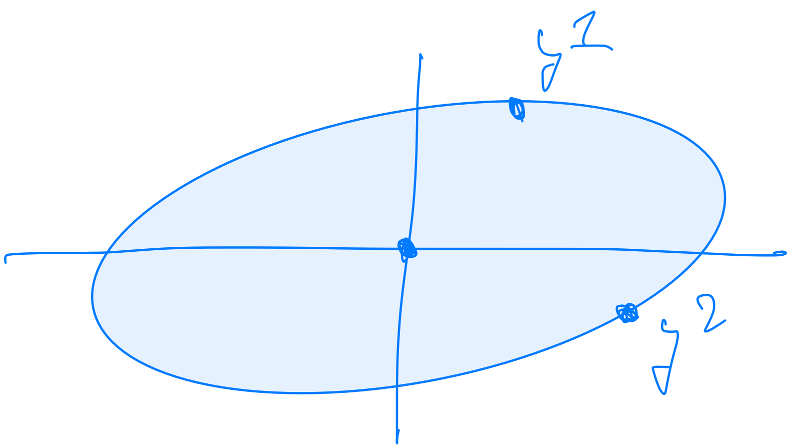
$$\nabla \mathrm{ld}(X) = -X^{-1}$$

$$-X^{-1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(X y^i (y^i)^T + y^i (y^i)^T X \right) = 0$$

$$\begin{cases} X^{-1} = X Y \Lambda Y^T + Y \Lambda Y^T X \\ \|X y^i\| \leq 1, & \forall i \in [1:m] \\ \lambda_i \geq 0, & \forall i \in [1:m] \\ \lambda_i \left(\|X y^i\| - 1 \right) = 0 \end{cases}$$

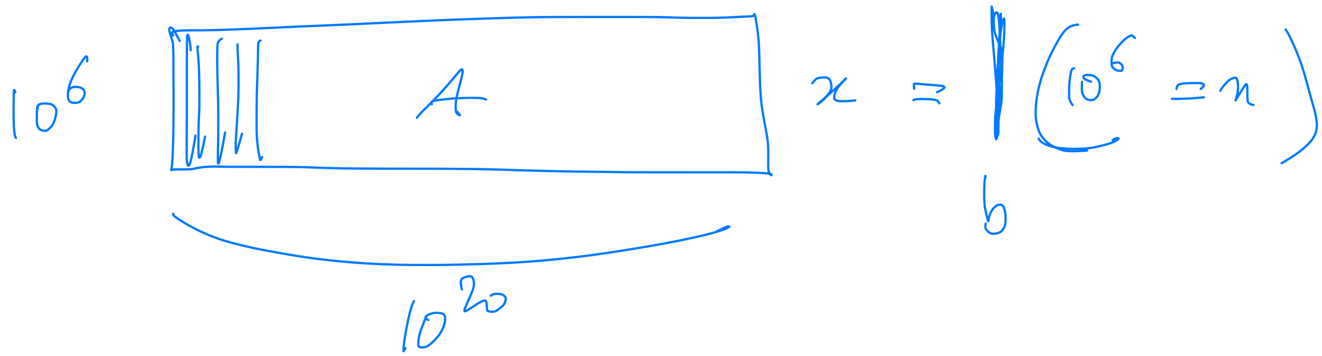
On résoudra ce système explicitement si $m = n$

et les y^i sont L.I.



$\boxed{\text{Ex 3}}$

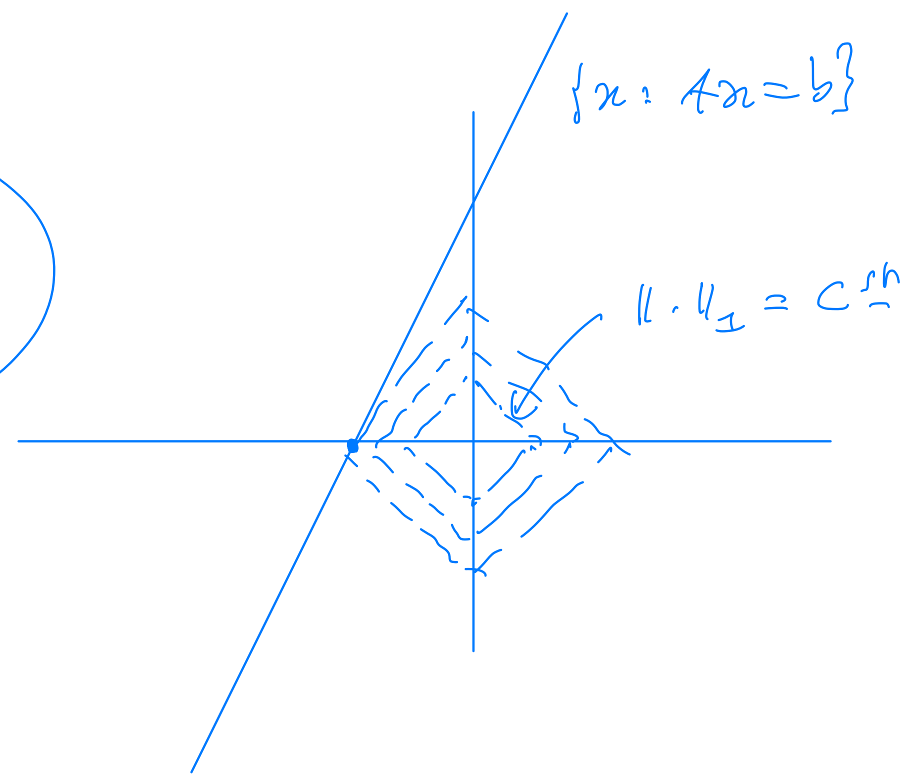
Recouvrement ℓ_1



$$(P_0)\ \begin{cases} \min \left(\|x\|_0 = \left| \{ i \in [1:n] : x_i \neq 0 \} \right| \right) \\ Ax = b \end{cases}$$

$$(P_1)\ \begin{cases} \min \|x\|_1 \\ Ax = b \end{cases}$$

« poursuite de base »



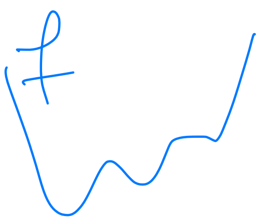
① (P_1) a 1 solution $\iff b \in R(A)$

$\Rightarrow$ clair

$\Leftarrow$ critère coercif (c'est 1 norme) s.c.i

ensble adm non vide ($b \in R(A)$) fermé

② écrire (P_1) sous forme de pbl d'optim linéaire



$$(P_1) \iff \begin{cases} \min \left(\sum |x_i| = |x_1| + |x_2| + \dots |x_n| \right) \\ Ax = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \min_{(x,t)} \; t_1 + t_2 + \dots t_n \\ |x_i| \leq t_i \,, \quad \forall i \in [1:n] \\ Ax = b \end{cases}$$

$$\min_x f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \min_{(x,t)} \; t \\ f(x) \leq t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \min \sum t_i \\ -t_i \leq x_i \leq t_i \\ Ax = b \end{cases}$$

Pb d'OL

③

$$\boxed{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \; y^T x - \|x\|_1 = I_{B_\infty}(y)}$$

c'est la conjuguée de $\|\cdot\|_1$ = l'indicatrice de la boule unité de la norme duale de $\|\cdot\|_1$ (c-à-d. $\|\cdot\|_\infty$)

④

Dans quel sens le pb suivant est le dual lagrangien de (P_1)

$$(D_1) \begin{cases} \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \; b^T y \\ \|A^T y\|_\infty \leq 1 \end{cases}$$

$$(P_1) \overset{\text{prop}}{\Longleftrightarrow} \inf_x \sup_y \|x\|_1 - y^T(Ax-b)$$

$$(D_1) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sup_y \left(\inf_x \|x\|_1 - y^T(Ax-b) \right)$$

$$= \left(- \underbrace{\sup_x \; y^T A x - \|x\|_1}_{I_{B_\infty}(A^T y)} \right) + b^T y$$

$$\sup_y \; b^T y - I_{B_\infty}(A^T y)$$

$$= \sup_{\substack{y \\ \|A^T y\|_\infty \le 1}} b^T y \qquad (D_1)$$

$$-1 \le (A^T y)_i \le 1$$

c'est un pb d'OL

5 $\boxed{(D_1) \text{ a 1 solution} \iff b \in R(A)}$

$\Rightarrow$ 1) Alors $y \in N(A^T) \Rightarrow b^T y = 0$

c-à-d. $N(A^T) \subset N(b^T) = b^\perp$

$$\begin{aligned}
&\ \ \| \\
&R(A)^\perp \subset (\mathbb{R} b)^\perp \\
&\mathbb{R} b \subset R(A) \\
&b \in R(A)
\end{aligned}$$

2) Autre démonstration

Si $b \notin R(A) \Rightarrow b = \underbrace{b_0}_{N(A^T)} + \underbrace{A x_0}_{R(A)}$

$b_0 \neq 0$

$y_t := t b_0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A^T y_t = 0 \Rightarrow y_t \text{ admissible pour } (D_2) \\ b^T y_t = t \|b_0\|^2 \rightarrow \infty \text{ si } t \uparrow \infty \end{array} \right.$

$\Leftarrow$ Si (D_1) n'a pas de solution

$\Rightarrow$ $\text{vol}(D_1) = +\infty$ [parce que (D_2) est un pbe d'OL]

$\Rightarrow$ $\text{vol}(P_2) \geq \text{vol}(D_1) = +\infty$

$\Rightarrow$ (P_1) n'a pas de solution

$\Rightarrow$ $b \notin R(A)$

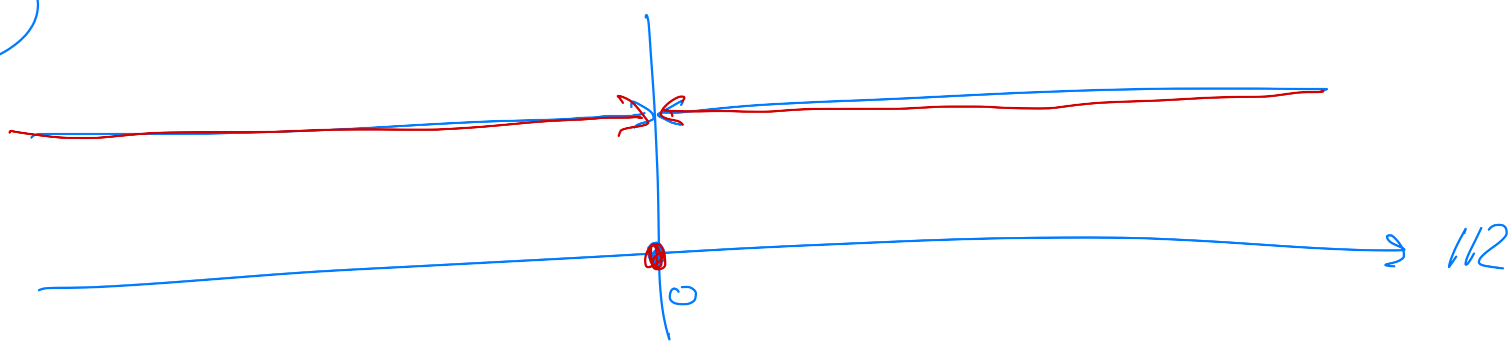
$\square$

$\boxed{\text{Ex 4}}$

Convexification de $\|\cdot\|_0$

$$\|x\|_0 = \left| \{ i \in [1;n] : x_i \neq 0 \} \right|$$

$n=1$



$$\boxed{\|\cdot\|_0^{**} = 0}$$

$$\|x^*\|_0^* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x^*)^T x - \|x\|_0$$

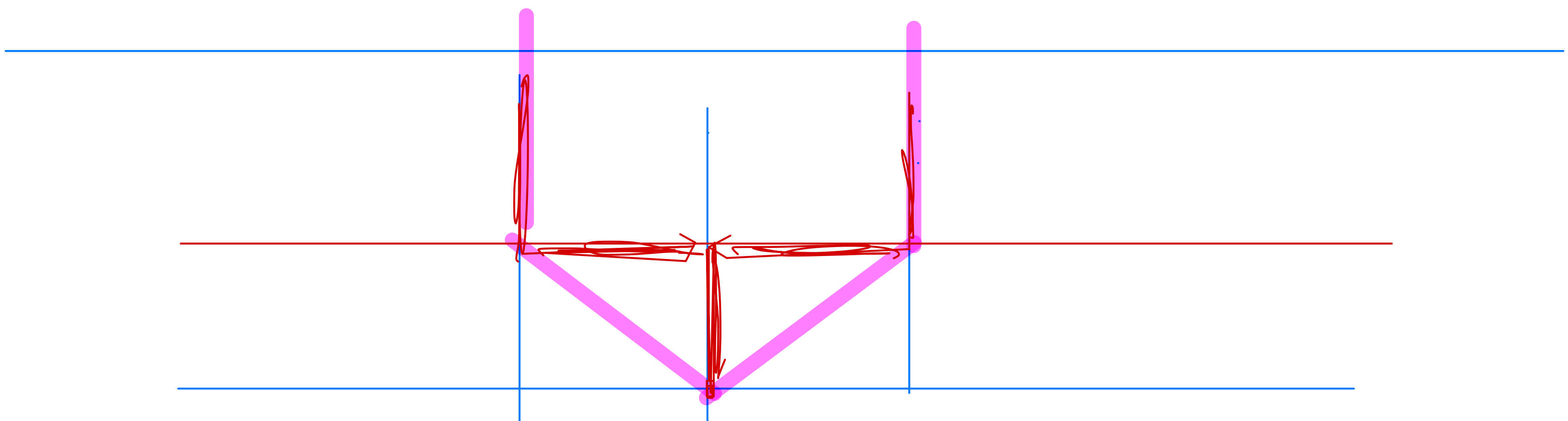
- $x^* = 0 \implies \|0\|_0^* = 0$
- $x^* \neq 0 \implies \|x\|_0^* = +\infty$

prenons $x = t x^*$

$$\|x^*\|_0^{**} \geq \sup_t \; t \underbrace{\|x^*\|^2}_{>0} - \underbrace{\|t x^*\|_0}_{cst\ (si\ t \neq 0)} = +\infty$$

$$\|x\|_0^{**} = \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} (x^*)^T x - I_0(x^*)$$

$$= 0$$



$$f(x) = \|x\|_0 + I_{B_1}(x)$$

$$\boxed{f^{**}(x) = \|x\|_1 + I_{B_1}(x)} \quad ?$$

- $$\boxed{f^*(x^*) = (\|x^*\|_\infty - 1)^+}$$

- $\underline{f^*(x^*) \geq 0}$

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (x^*)^T x - \left(\|x\|_1 + I_{B_1}(x) \right)$$

≥ 0 en prenant $x = 0$

- $\underline{f^*(x^*) \leq (\|x^*\|_\infty - 1)^+}$

$$f^*(x^*) \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \underbrace{(\|x^*\|_\infty - 1)\, \|x\|_1}$$

$$\begin{cases} = 0 & \text{si } x = 0 \\ \leq 0 & \text{si } \|x^*\|_\infty \leq 1 \\ \leq \|x^*\|_\infty - 1 & \text{si } \|x^*\|_\infty \geq 1 \text{ et } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\leq \max(0, \|x^*\|_\infty - 1)$$

$$= (\|x^*\|_\infty - 1)^+$$

- $f^*(x^*) = (\|x^*\|_\infty - 1)^+$

$$x = (\operatorname{sgn} x_i^*) e_i \quad \text{on } i : \|x^*\|_\infty = |x_i^*|$$

$$\Rightarrow f^*(x^*) \geq (x^*)^T x - \|x\|_1$$

$$= \|x^*\|_\infty - 1$$

$$f^*(x^*) \geq 0$$

$$f^*(x^*) \geq (\|x^*\|_\infty - 1)^+$$

$\square$

- $$\boxed{f^{**}(x) = \|x\|_1 + I_{B_1}(x)}$$

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*} (x^*)^T x - f^*(x^*)$$

$$= \sup_{x^*} (x^*)^T x - (\|x^*\|_\infty - 1)^+$$

- $\underline{f^{**}(x) = +\infty \text{ for } x \notin B_1}$

$\|x\|_1 > 1$

$$\sup_{\|x^*\|_\infty \leq 1} (x^*)^T x > 1$$

- $x^* = t x$

$$f^{**}(x) \geq \sup_{t} t\|x\|_2^2 - (t\|x\|_\infty - 1)^+$$

- $x^* = t\,\mathrm{sgn}(x)$

$$f^{**}(x) \geq \sup_t \; t\|x\|_1 - (t-1)^+$$

$$\geq \sup_{t\geq 1} \; t\|x\|_1 - t + 1$$

$$= \sup_{t\geq 1} \; t\underbrace{(\|x\|_1 - 1)}_{>0} + 1 \longrightarrow \infty$$

- $\underline{f^{**}(x) = \|x\|_1 \quad \text{si} \quad x \in B_1}$

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*} \; (x^*)^T x - (\|x^*\|_\infty - 1)^+$$

$$\otimes \quad \sup_{\|x^*\|_\infty \leq 1} \left(\quad \right) = \sup_{\|x^*\|_\infty \leq 1} (x^*)^T x = \|x\|_1$$

$$\otimes \quad \sup_{\|x^*\|_\infty \geq 1} \underbrace{(x^*)^T x}_{\leq \|x^*\|_\infty \|x\|_2} - \|x^*\|_\infty + 1$$

$$\leq \|x^*\|_\infty \underbrace{(\|x\|_2 - 1)}_{\leq 0} + 1$$

$$\leq \sup_{\|x^*\|_\infty \geq 1} \|x^*\|_\infty \underbrace{(\|x\|_2 - 1)}_{\leq 0} + 1$$

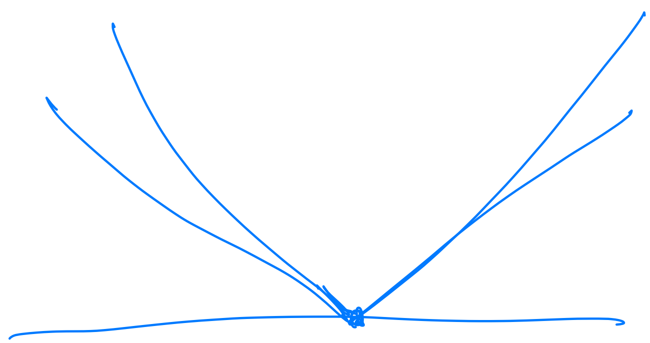
$$= \|x\|_2$$

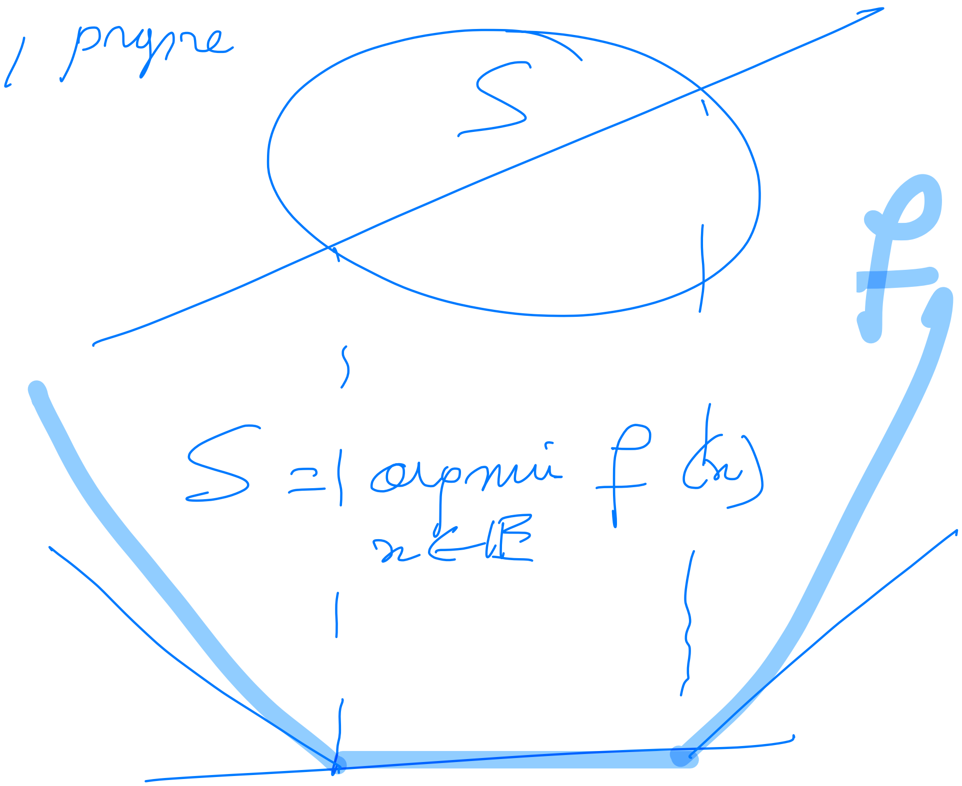
$$\square$$

Ex 5

Minimum saillant

f convexe, fermé, propre





$S = \operatorname{argmin}_{x \in E} f(x)$

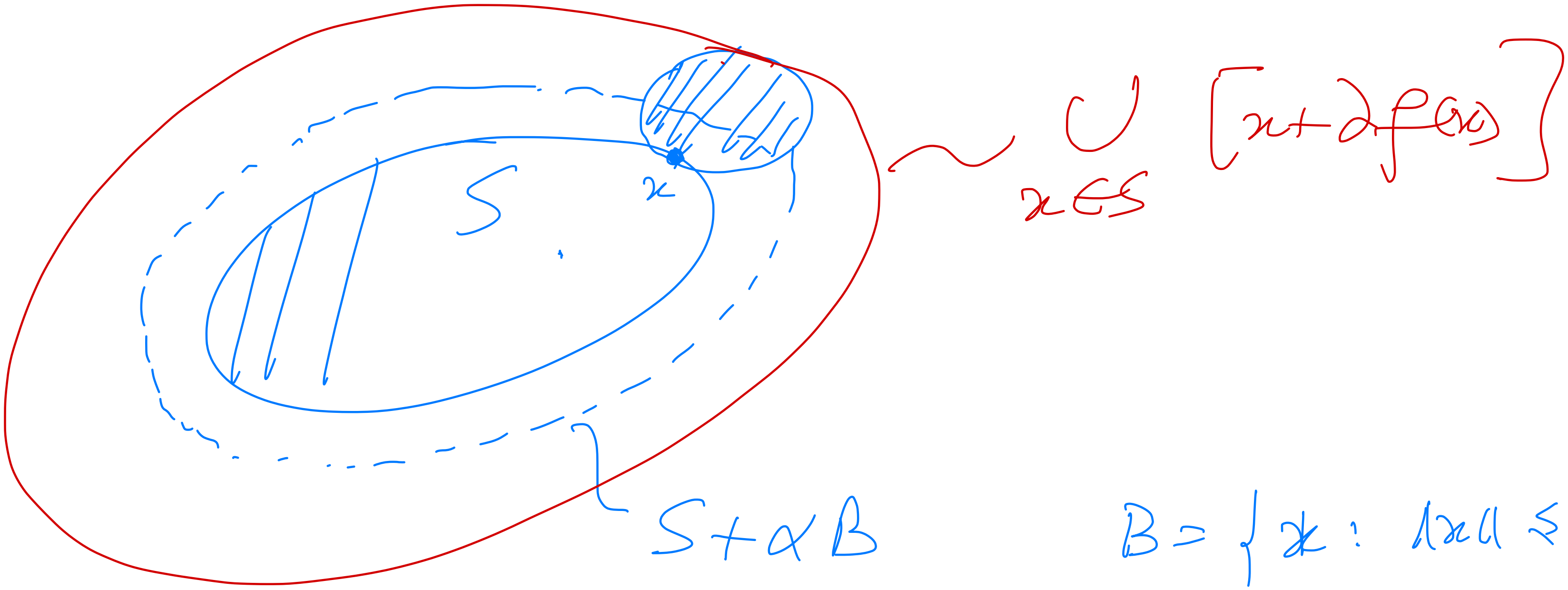
$f_{min} = \inf_{x \in E} f(x) \in \mathbb{R}$

S non vide

On dit que S est <u>saillant</u> si $\exists \alpha > 0$,

$\forall x \in E$ $\boxed{f(x) \geq f_{min} + \alpha \operatorname{dist}(x, S)}$ $(*)$

On cherche à montrer que c'est équivalent à $\boxed{S + \alpha B \subset \bigcup_{x \in S} [x + \partial f(x)]}$ $(**)$



$B = \{x : \|x\| \leq 1\}$

① $\boxed{\forall x \in E, \text{ le pb } \min_{y\in S} \|x-y\| \text{ a 1 solution unique.}}$

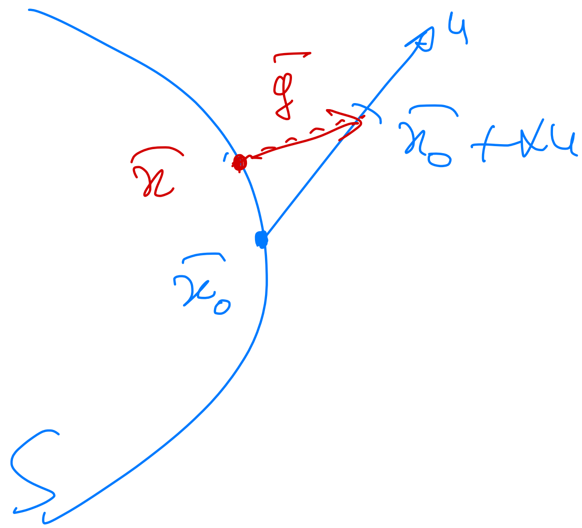
$S = \operatorname{argmin}_{x\in E} f(x) = \{x \in E : f(x) \leq f_{min}\}$

est convexe, fermé, non vide

$\Rightarrow$ la solution unique est le projeté de x sur S noté

$P_S(x)$

② $\boxed{(\ast) \Rightarrow (\ast\ast)}$



$\bar{x}_0 \in S$, $u \in B$

$$\bar{x}_0 + \alpha u \in \bigcup_{\bar{x} \in S} (\bar{x} + \partial f(\bar{x}))$$

$$\bar{x} := P_S(\bar{x}_0 + \alpha u)$$

$$\bar{x}_0 + \alpha u \overset{?}{=} \bar{x} + \bar{\varphi} \quad \text{avec } \bar{\varphi} \in \partial f(\bar{x})$$

$$\bar{\varphi} := \bar{x}_0 + \alpha u - \bar{x} \quad \overset{?}{\in} \partial f(\bar{x})$$

$$\boxed{\|\bar{\varphi}\| \leq \alpha}$$

$$\|(\bar{x}_0 + \alpha u) - \bar{x}_0\| = \alpha \|u\| \leq \alpha$$

$$\|\bar{\varphi}\| = \|(\bar{x}_0 + \alpha u) - \bar{x}\|$$

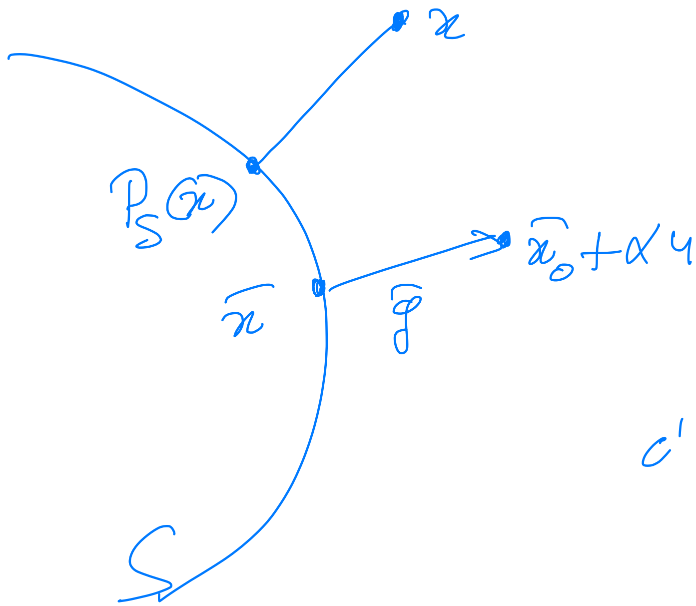
$$\leq \|(\bar{x}_0 + \alpha u) - \bar{x}_0\| \quad \text{(déf de la proj)}$$

$$\leq \alpha$$

$$\boxed{\bar{g} \in \partial f(\bar{x})}$$

On choisit de montrer que $\forall x \in E$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \bar{g}, x - \bar{x} \rangle$$



On sait par $(*)$ que

$$f(x) \geq f_{min} + \alpha \underbrace{\mathrm{dist}(x, S)}_{\|x - P_S(x)\|}$$

c'est gagné si on montre que

$$\alpha \,\mathrm{dist}(x, S) \geq \langle \bar{g}, x - \bar{x} \rangle$$

ce qui est bien vrai car

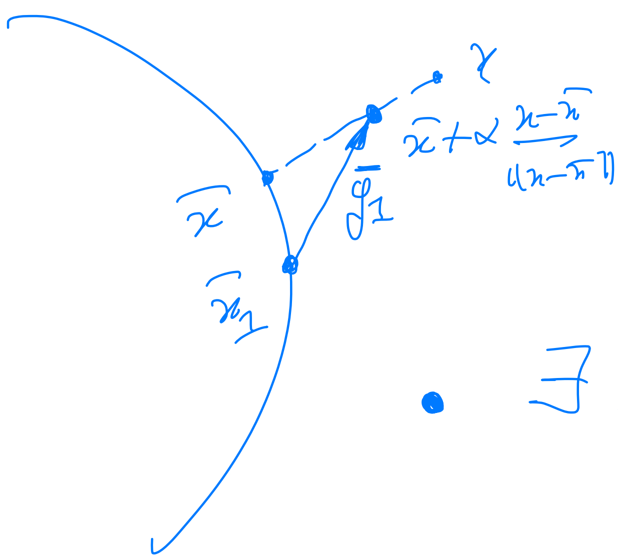
$$\langle \bar{g}, x - \bar{x} \rangle = \underbrace{\langle \bar{g}, x - P_S(x) \rangle}_{\substack{\leq \|\bar{g}\| \, \|x - P_S(x)\| \\ \leq \alpha \|x - P_S(x)\|}} + \underbrace{\langle \bar{g}, P_S(x) - \bar{x} \rangle}_{\leq 0}$$

3 $\boxed{(**) \Rightarrow (*)}$

$$(**) \quad S + \alpha B \subset \bigcup_{x \in S} [x + \partial f(x)]$$

$$(*) \quad f(x) \geq f_{min} + \alpha \, dist(x, S)$$

Soit $x \in E$, $\bar{x} = P_S(x)$



Il suffit de montrer que

$$\underline{f(x) \geq f(\bar{x}) + \alpha \|x - \bar{x}\|}$$

- $\exists \, \bar{x}_1 \in S$, $\bar{g}_1 \in \partial f(\bar{x}_1)$ tel que

$$\bar{x} + \alpha \underbrace{\frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|}}_{\in B} = \bar{x}_1 + \bar{g}_1$$

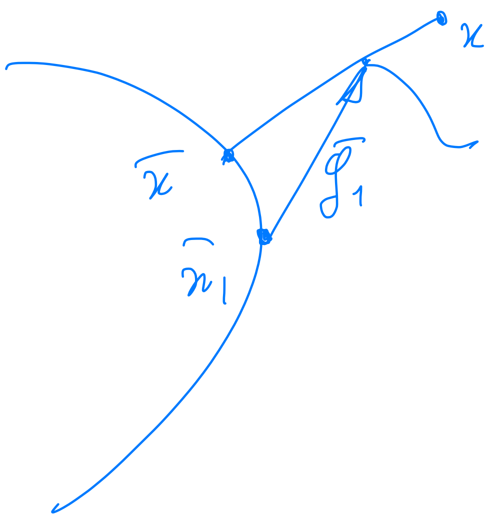
par $(**)$

- $f(x) \geq f_{min} + \langle \bar{g}_1, x - \bar{x}_1 \rangle$

car $f(x) \geq \underbrace{f(\bar{x}_1)}_{\geq f_{min}} + \langle \bar{g}_1, x - \bar{x}_1 \rangle$

- Conclure : il reste à montrer que

$$\langle \bar{g}_1, x - \bar{x}_1 \rangle \geq \alpha \|x - \bar{x}\| \quad ?$$



$$\bar{x} + \alpha \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|}$$

$$\bar{g}_1 = \bar{x} + \alpha \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} - \bar{x}_1$$

$$\left\langle \bar{x} + \alpha \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} - \bar{x}_1 , x - \bar{x}_1 \right\rangle \geq \alpha \|x - \bar{x}\|$$

$$\underbrace{\langle \bar{x} - x_1,\ x - \bar{x}_1 \rangle}_{\geq 0\ ?} + \frac{\alpha}{\|x-\bar{x}\|}\underbrace{\langle x - \bar{x},\ x - \bar{x}_1 \rangle} \overset{?}{\geq} \alpha\|x-\bar{x}\|$$

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1 - \bar{x},\ \bar{x}_1 - x \rangle}_{\geq 0}$$

$$\underbrace{\langle \bar{x} - x,\ \bar{x}_1 - x \rangle}_{\geq \|\bar{x} - x\|^2}$$

$$\underbrace{\langle \bar{x} - x,\ \bar{x}_1 - \bar{x} \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle \bar{x} - x,\ \bar{x} - x \rangle}_{\|\bar{x} - x\|^2}$$

$$\square$$