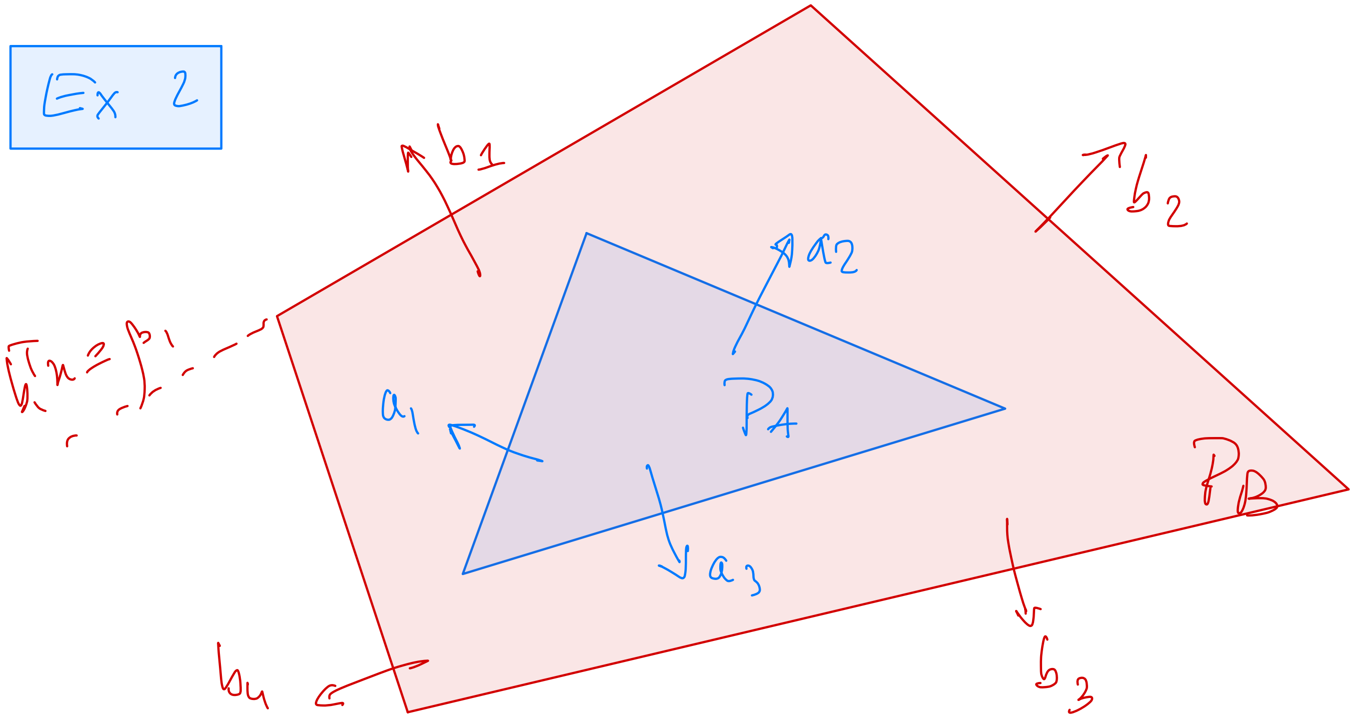
$\boxed{\text{Ex } 2}$



Peut-on caractériser le fait que $P_A \subset P_B$?

$$P_A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq \alpha\} \qquad A : m_A \times n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{m_A}$$

$$P_B = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx \leq \beta\} \qquad B : m_B \times n, \quad \beta \in \mathbb{R}^{m_B}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_{m_A}^T \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_{m_B}^T \end{pmatrix}$$

$P_A \subset P_B \iff b_i^T x \le \beta_i \quad , \quad \forall x \in P_A \quad , \forall i \in [1 : m_B]$

$$\boxed{P_A \subset P_B \iff \exists\, Y \in \mathbb{R}_+^{m_B \times m_A} \text{ t.q. } \begin{cases} B = YA \\ Y\alpha \le \beta \end{cases}}$$

$\Leftarrow$ $\quad \forall x \in P_A$ c-a-d $Ax \le \alpha$

$\Rightarrow x \in P_B$ c-a-d $Bx \le \beta$

$$Bx = \underbrace{Y}_{\ge 0}\,\underbrace{Ax}_{\le \alpha}$$

$$\underbrace{Y_{i:}}_{\ge 0}\,\underbrace{Ax}_{\le \alpha} \le Y_{i:}\,\alpha = (Y\alpha)_i$$

$$\le Y\alpha \le \beta \qquad \Rightarrow x \in P_B$$

$(\Rightarrow)$ $P_A \subset P_B$

$\Leftrightarrow \quad b_i^T x \leq \beta_i \quad , \quad \forall x \in P_A \quad , \forall i \in [1 : m_B]$

$\Leftrightarrow \quad \sup_{x \in P_A} b_i^T x \leq \beta_i$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \inf_x -b_i^T x \geq -\beta_i \\ Ax \leq \alpha \end{cases} \leftarrow (*)$

écrivons les CO du pb i $(i \in [1 : m_B])$

$$\ell(x, y) = -b_i^T x + y_i^T (Ax - \alpha)$$

(CO) $\exists y$ t.q. $\begin{cases} A^T y_i = b_i \\ 0 \leq y_i \perp (Ax - \alpha) \leq 0 \end{cases}$ $\longrightarrow y_i^T A = b_i^T$

$$y_i^T A = b_i^T \qquad i \in [1 : m_B]$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_{m_B}^T \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{YA = B}$$

$$\boxed{Y \geq 0}$$

$$Y\alpha \overset{?}{\leq} \beta$$

ou $y_i^T \alpha \overset{?}{\leq} \beta_i \qquad \forall i \in [1 : m_B]$

Or $y_i^T \alpha = y_i^T A x$ (Complémentarité)

$= b_i^T x$ (1 ≤ CO)

$\leq \beta_i$

$$\Rightarrow \boxed{Y\alpha \leq \beta}$$

$\square$

$\boxed{\text{Ex 1}}$

Soit (P_L) $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$

$x \in Sol(P_L) \iff \exists (y, s) :$ $\begin{cases} A^T y + s = c \\ Ax = b \\ 0 \leq x \perp s \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x_i s_i = 0, \quad \forall i \in [1:n]$

Complémentarité $\quad x_i > 0 \Rightarrow s_i = 0$

Complémentarité stricte : $\quad x_i > 0 \iff s_i = 0$

Un problème d'OL avec solution a une solution PD strictement complémentaire

Dém

$B := \{ i \in [1:n] : \exists x \in Sol(P_c) \text{ avec } x_i > 0 \}$

$N := \{ i \in [1:n] : \exists (y, s) \in Sol(D_c) \text{ avec } s_i > 0 \}$

i) $\boxed{B \cap N = \emptyset}$

- $\boxed{x \in Sol(P_c) \Rightarrow \exists (y,s) : \begin{cases} A^T y + s = c \\ Ax = b \\ 0 \leq s \perp x \geq 0 \end{cases}}$

Ce sont les CO vues au cours

- $\boxed{(y,s) \in Sol(D_c) \Rightarrow \exists x : \begin{cases} A^T y + s = c \\ A x = b \\ 0 \leq s \perp x \geq 0 \end{cases}}$

même système

En effet, on introduit le lagrangien du problème dual

$$(D_L)\ \begin{cases} \sup\ b^T y \\ A^T y + s = c \\ s \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \inf -b^T y \\ A^T y + s = c & \leftarrow x \\ s \geqslant 0 & \leftarrow z \end{cases}$$

qui s'écrit

$$\ell_D(y, s, x) = -b^T y + x^T(A^T y + s - c) - z^T s$$

les CO s'écrivent donc

$$\begin{cases} Ax = b \\ x = z \\ A^T y + s = c \\ 0 \leqslant z \perp s \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (D_x \ell_D(y,s,x) = 0) \\ (D_s \ell_D(y,s,x) = 0) \end{array}$$

On obtient le système annoncé après élimination de z

$\square$

- $$\boxed{\begin{array}{l} x \in Sol(P_L) \\ (y,s) \in Sol(D_L) \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ A^T y + s = c \\ 0 \leq s \perp x \geq 0 \end{array} \right.}$$ (prop 15.7)

Dém $\Leftarrow$ voir ci-dessus

$\Rightarrow$ $x \in Sol(P_L) \Rightarrow \exists (\bar{y}, \bar{s}) : \left\{ \begin{array}{l} \boxed{Ax = b} \\ A^T \bar{y} + \bar{s} = c \\ 0 \leq \bar{s} \perp \boxed{x \geq 0} \end{array} \right.$

$(y,s) \in Sol(D_L) \Rightarrow \exists \bar{x} : \left\{ \begin{array}{l} A\bar{x} = b \\ \boxed{A^T y + s = c} \\ \boxed{0 \leq s} \perp \bar{x} \geq 0 \end{array} \right.$

Il reste à montrer que $s^T x = 0$. On a

$$s^T x = (c - A^T y)^T x = c^T x - b^T y = 0$$ (par dé saut de dualité) $\square$

- $\boxed{B \cap N = \emptyset}$ S'il existait un $i \in B \cap N$, on aurait un $x \in Sol(P_L)$ avec $x_i > 0$ et un $(y,s) \in Sol(D_L)$ avec $s_i > 0$ $\Rightarrow$ on ne pourrait avoir $s \perp x = 0$ comme requis ci-dessus.

2) $\boxed{B \cup N = [1:n] \iff \exists (x, y, s) \text{ solution PD strictement complémentaire}}$?

$\Leftarrow$ Soit $(x, y, s) \in (Sol\, P_L) \times (Sol\, D_L)$ strict complémentaire

$\Rightarrow \quad x_i > 0 \iff s_i = 0$

$\Rightarrow \quad \forall i \in [1:n]$ $\begin{cases} \text{Soit } x_i > 0 \iff i \in B \\ \text{Soit } s_i > 0 \iff i \in N \end{cases}$

$\Rightarrow$ • $\underline{\exists x \in Sol\,(P_L) \text{ avec } x_B > 0}$

Par dfn de B, $\forall i \in B$, $\exists x^i \in Sol\,(P_L)$ telle que $(x^i)_i > 0$

$0 \leq x := \sum_{i \in B} x^i \overset{?}{\Rightarrow} x_B > 0$

$j \in B \quad x_j = \sum_{i \in B} \underbrace{x^i_j}_{\geq 0} = \overbrace{x^j_j}^{> 0} + \sum_{i \in B \setminus \{j\}} \overbrace{x^i_j}^{\geq 0} > 0$

$$Ax = b$$

$$A\left(\sum_{i \in B} x^i\right) = \sum_{i \in B} b = |B|\, b$$

$$x = \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B} x^i \in Sol(P_L)$$

car $Sol(P_L)$ est convexe (en tant que ensemble de solution d'un pbl convexe)

- $\exists (y, s) \in Sol(D_L)$ avec $s_N > 0$

même démonstration

- Les x et (y, s) construits sont des solutions PD strictement complémentaires

car $x_B > 0$, $s_N > 0$

et $B \cup N = [1:n]$, donc $\forall i \in [1:n]$ soit $x_i > 0$, soit $s_i > 0$

3) Construisons 1 solution strictement complémentaire

On cherche un $x \in Sol(P_L)$

c-a-d. un élément de

$$Sol(P_L) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0,\ c^T x \leq val(P_L)\}$$

et on considère le pb suivant

$$(\tilde{P}_L) \begin{cases} \inf -e_{B^c}^T x = -\sum_{i \notin B} x_i & \left(e_{B^c} := \sum_{i \in B^c} e_i\right) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x \leq val(P_L) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \in B \\ \leftarrow i \in B^c \\ \\ \\ \end{matrix}$$

> Ce problème $(\tilde{P}_L)$ a une solution

- $(\tilde{P}_L)$ est réalisable (car son ensemble admissible est $Sol(P_L) \neq \emptyset$)

$$\Rightarrow \ val(\tilde{P}_L) < +\infty$$

- $val(\tilde{P}_L) \geq 0$ donc $> -\infty$

car si $i \notin B$ et $x \in Sol(P_L) \Rightarrow x_i = 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$

cible admissible de $(\tilde{P}_L)$

$$\Rightarrow val(\tilde{P}_L) \in \mathbb{R} \Rightarrow (\tilde{P}_L) \text{ a } \geq \text{ solution}$$

$\square$

Cherchons les CO de $(\tilde{P}_L)$

$$\mathcal{L}og(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}) = -e_{Bc}^T \tilde{x} - \tilde{y}^T (A\tilde{x} - b) - \tilde{s}^T \tilde{x} + \tilde{t}\,(c^T \tilde{x} - val(\tilde{P}_L))$$

$$CO \Rightarrow -e_{Bc} - A^T \tilde{y} - \tilde{s} + \tilde{t}\, c = 0$$

CO de $(\tilde{P}_L)$

$\exists (\tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t})$

$$\begin{cases} A^T\tilde{y} + \tilde{s} + e_{B^c} = \tilde{t}\, c \\ A\tilde{x} = b \\ 0 \le \tilde{s} \perp \tilde{x} \ge 0 \\ 0 \le \tilde{t} \perp (c^T\tilde{x} - val(\tilde{P}_L)) \le 0 \end{cases} \quad (1)$$

Soit $x \in Sol(P_L)$ telle que $x_B > 0$ (possible, voir ci-dessus)

CO de (P_L)

$\exists (y, s)$:

$$\begin{cases} A^Ty + s = c \\ Ax = b \\ 0 \le s \perp x \ge 0 \end{cases} \quad (2)$$

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas}}$ si $\tilde{t} > 0$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} A^T\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{t}}\right) + \frac{\tilde{s} + e_{B^c}}{\tilde{t}} = c \\ A\tilde{x} = b \\ 0 \le \frac{\tilde{s} + e_{B^c}}{\tilde{t}} \perp \tilde{x} \ge 0 \quad (\tilde{x}_{B^c} = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{x}_{x_B>0},\ \frac{\tilde{y}}{\tilde{t}},\ \underbrace{\frac{\tilde{s}+e_{B^c}}{\tilde{t}}}_{(\ )_{B^c}>0}\right)$$ e o soluție PD de (P_c) care e strict complementară

$\boxed{2^{\circ}\text{ caz}}$ și $\tilde{t}=0$

am ajuns (1) și (2) putem obține

$$\begin{cases} A^T(y+\tilde{y}) + s + \tilde{s} + e_{B^c} = c \\ Ax = b \\ 0 \le (s+\tilde{s}+e_{B^c}) \perp x \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{x}_{x_B>0},\ y+\tilde{y},\ \underbrace{s+\tilde{s}+e_{B^c}}_{(\cdot)_{B^c}>0}\right)$$ e o sol. PD strict compl. de (P_c) $\square$

Ex 3

Motzkin non homogène

On a déjà vu l'équivalence entre

(i) $\exists x \geq 0 \; : \; Ax = b$

(ii) $b^T y \geq 0$, $\forall y$ vérifiant $A^T y \geq 0$

C'était une conséquence de

$$b \in \{Ax : x \geq 0\} = \{y : A^T y \geq 0\}^+$$

(i) Farkas.

$A : m_A \times n$, $a \in \mathbb{R}^{m_A}$

$B : m_B \times n$, $b \in \mathbb{R}^{m_B}$

$C : m_C \times n$, $c \in \mathbb{R}^{m_C}$

Motzkin

Les 2 propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\exists x :\ Ax = a,\ Bx \leq b,\ Cx < c$

(ii) $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{m_A} \times \mathbb{R}_+^{m_B} \times \mathbb{R}_+^{m_C}$

vérifiant $\begin{cases} A^T\alpha + B^T\beta + C^T\gamma = 0 \\ a^T\alpha + b^T\beta + c^T\gamma \leq 0 \end{cases}$

on a $a^T\alpha + b^T\beta = 0$ et $\gamma = 0$

Dém (i) $\Rightarrow$ (ii) (facile car pb de vérification)

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{m_A} \times \mathbb{R}_+^{m_B} \times \mathbb{R}_+^{m_C}$

vérifiant $\begin{cases} A^T\alpha + B^T\beta + C^T\gamma = 0 \\ a^T\alpha + b^T\beta + c^T\gamma \leq 0 \end{cases}$ $\quad$ $(x$

$$\underbrace{x^T A^T}_{a} \alpha + \underbrace{\underbrace{x^T B^T}_{\leq b} \underbrace{\beta}_{\geq 0}}_{\leq b^T \beta} + \underbrace{x^T C^T}_{\leq c-s} \underbrace{\gamma}_{\geq 0} \geq 0$$

avec $s > 0$

$$0 \leq a^T \alpha + b^T \beta + (c-s)^T \gamma \leq 0$$

$$0 \geq a^T \alpha + b^T \beta + \underbrace{c^T \gamma}_{=0} = \overbrace{\underbrace{s}_{>0}{}^T \underbrace{\gamma}_{\geq 0}}^{\leq 0} \geq 0$$

(Hyp)

$$\underbrace{s}_{>0}{}^T \underbrace{\gamma}_{\geq 0} \geq 0 \implies \boxed{\gamma = 0}$$

$$a^T \alpha + b^T \beta \geq 0$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

On utilise le cas 1

$\square$