Cours OPT 202

Optimisation Différentiable – Théorie et Algorithmes

Exercices de la séance 12
(optimisation linéaire et consolidation)

Complément de théorie

1. Existence d'une solution primale-duale strictement complémentaire

Applications

2. Polyèdres convexes imbriqués
3. Alternative de Motzkin non homogène

Conditions d'optimalité

4. Ellipsoïde circonscrit de volume minimal

1 Existence d'une solution primale-duale strictement complémentaire

On considère le problème d'optimisation linéaire sous forme standard :

$$(P_0) \quad \begin{cases} \min_x \ c^\mathsf{T} x \\ Ax = b \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ses conditions d'optimalité s'écrivent

$$A^\mathsf{T} y + s = c, \quad Ax = b \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant s \perp x \geqslant 0.$$

La dernière relation, dite de complémentarité, revient à écrire

$$\forall\, i \in [1:n]: \qquad x_i > 0 \quad \Longrightarrow \quad s_i = 0,$$

On dit qu'une solution primale-duale (x, y, s) est *strictement complémentaire* si

$$\forall\, i \in [1:n]: \qquad x_i > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s_i = 0. \tag{10.1}$$

Toutes les solutions primales-duales ne sont pas nécessairement strictement complémentaires. Le but de l'exercice est de montrer que

> Un problème d'optimisation linéaire avec solution a toujours une solution primale-duale strictement complémentaire.

Dans ce qui suit, on suppose que (P_0) a une solution et on note $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$) l'ensemble des solutions primales (resp. duales) de (P_0).

1. Montrez que les ensembles d'indices

$$\begin{aligned} B &:= \{i \in [1:n] : \exists\, x \in \mathcal{S}_{\mathrm{P}} \text{ vérifiant } x_i > 0\} \\ N &:= \{i \in [1:n] : \exists\, (y, s) \in \mathcal{S}_{\mathrm{D}} \text{ vérifiant } s_i > 0\}. \end{aligned}$$

   sont disjoints et que l'on a complémentarité stricte si, et seulement si, (B, N) forme une partition de $[1:n]$.

2. Désignons par $\mathrm{val}(P_0)$ la valeur optimale de (P_0) et par e_{B^c} le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes avec indices dans B valent 0 et les autres valent 1. Montrez que le problème suivant a une solution

$$(P_1) \quad \begin{cases} \min_x \ -e_{B^c}^\mathsf{T} x \\ Ax = b \\ x \geqslant 0 \\ c^\mathsf{T} x \leqslant \mathrm{val}(P_0). \end{cases}$$

3. Montrez que (P_0) a une slution strictement complémentaire en utilisant une solution primale-duale (x_0, y_0, s_0) de (P_0) et une solution primale-duale du problème (P_1).

2 Polyèdres convexes imbriqués

Soient P_A et P_B deux polyèdres convexes de $\mathbb{R}^n$ définis par

$$P_A := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant a\} \qquad \text{et} \qquad P_B := \{x \in \mathbb{R}^n : Bx \leqslant b\},$$

où $A \in \mathbb{R}^{m_A \times n}$, $a \in \mathbb{R}^{m_A}$, $B \in \mathbb{R}^{m_B \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^{m_B}$. On suppose que $P_A \neq \varnothing$. Montrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $P_A \subset P_B$,

(ii) $\exists\, Y \in \mathbb{R}_+^{m_B \times m_A}$ tel que $B = YA$ et $Ya \leqslant b$.

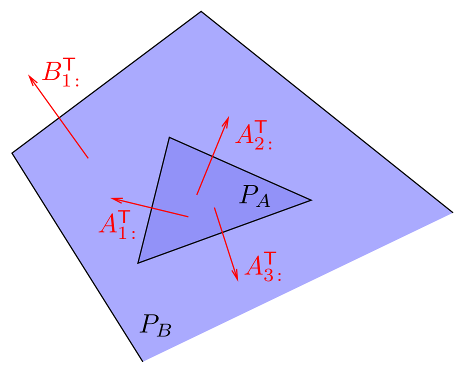

Fig. 16: Les relations $B = YA$ et $Y \geqslant 0$ expriment que chaque ligne $B_{i:}$ de la matrice B définissant P_B est combinaison conique des lignes $A_{i:}$ de la matrice A définissant P_A. Dans la figure, $B_{1:}^\mathsf{T}$ est combinaison conique de $A_{1:}^\mathsf{T}$ et $A_{2:}^\mathsf{T}$ (mais pourrait l'être aussi de $A_{1:}^\mathsf{T}$, $A_{2:}^\mathsf{T}$ et $A_{3:}^\mathsf{T}$).

3 Alternative de Motzkin non homogène

Soient $A \in \mathbb{R}^{m_A \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m_B \times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{m_C \times n}$ des matrices ayant un même nombre de colonnes et $a \in \mathbb{R}^{m_A}$, $b \in \mathbb{R}^{m_B}$ et $c \in \mathbb{R}^{m_C}$ des vecteurs. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$: $Ax = a$, $Bx \leqslant b$ et $Cx < c$,

(ii) $\forall\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{m_A} \times \mathbb{R}_+^{m_B} \times \mathbb{R}_+^{m_C}$ vérifiant $A^\mathsf{T}\alpha + B^\mathsf{T}\beta + C^\mathsf{T}\gamma = 0$ et $a^\mathsf{T}\alpha + b^\mathsf{T}\beta + c^\mathsf{T}\gamma \leqslant 0$, on a $a^\mathsf{T}\alpha + b^\mathsf{T}\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

4 Ellipsoïde circonscrit de volume minimal

On note $\|\cdot\|$ la norme ℓ_2 (ou euclidienne), $\mathcal{S}^n$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{S}_{++}^n$ le cône de $\mathcal{S}^n$ formé des matrices définies positives. On munit $\mathcal{S}^n$ du produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(XY) = \sum_{i,j=1}^n X_{ij} Y_{ij}$, où « tr » désigne l'opérateur trace.

Un *ellipsoïde* de $\mathbb{R}^n$ centré en zéro est une partie de la forme :

$$\mathscr{E} := \{y \in \mathbb{R}^n : y^\mathsf{T} H y \leqslant 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|Xy\| \leqslant 1\},$$

où $H \in \mathcal{S}^n_{++}$ et où on a noté $X = H^{1/2}$ la racine carrée définie positive de H. Son volume est donné par

$$\mathrm{vol}(\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} 1 \, \mathrm{d}y = \int_{B(0,1)} |\det X^{-1}| \, \mathrm{d}z = \frac{\sigma_n}{\det X},$$

où on a utilisé le changement de variable $z = Xy$ et où σ_n désigne le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ [10]. Pour minimiser le volume de l'ellipsoïde $\mathscr{E}$, on pourra donc minimiser $-\log\det(X)$. Sans contrainte ce volume minimal est nul ! Ci-dessous on impose à $\mathscr{E}$ de contenir des vecteurs y^i donnés dans $\mathbb{R}^n$, ce qui s'exprime par des contraintes $\|Xy^i\| \leqslant 1$, pour $i = 1, \ldots, m$.

Ce problème se pose en analyse de données, en géométrie calculatoire et comme sous-problème dans certains algorithmes d'optimisation.

1. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On considère l'application $c_y : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$, définie pour $X \in \mathcal{S}^n$ par

$$c_y(X) = \|Xy\|^2.$$

   Montrez que

$$\nabla c_y(X) = Xyy^\mathsf{T} + yy^\mathsf{T}X.$$

2. Soit $y^1, \ldots, y^m$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (m peut être différent de n). Montrez que ces vecteurs **engendrent** $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des y^i) si, et seulement si,

$$\sum_{i=1}^m y^i (y^i)^\mathsf{T} \text{ est définie positive.}$$

On se donne à présent m vecteurs $y^1, \ldots, y^m$ **qui engendrent** $\mathbb{R}^n$.

On introduit l'application *log-déterminant* $\mathrm{ld} : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, définie en $X \in \mathcal{S}^n$ par

$$\mathrm{ld}(X) = \begin{cases} -\log\det X & \text{si } X \in \mathcal{S}^n_{++} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère donc le problème

$$\begin{cases} \min_X \ \mathrm{ld}(X) \\ c_{y^i}(X) \leqslant 1, \text{ pour } i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{10.2}$$

On note

$$\mathscr{X} := \{X \in \mathcal{S}^n_{++} : \|Xy^i\| \leqslant 1, \ \text{pour } i = 1, \ldots, m\}.$$

3. Montrons que le problème (10.2) a une solution et une seule en suivant les étapes suivantes.

   (a) Montrez que $\mathscr{X}$ est non vide.

   (b) Montrez que $\mathscr{X}$ est borné.

[10] On a

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)},$$

où Γ désigne la fonction gamma.

(c) Soit $X_0 \in \mathscr{X}$. Montrez que $\{X \in \mathscr{X} : \mathrm{ld}(X) \leqslant \mathrm{ld}(X_0)\}$ est fermé.

(d) Montrez que le problème (10.2) a une solution.

(e) Montrez que le problème (10.2) a une **unique** solution.

Soit $\bar{X}$ la solution de (10.2). On s'intéresse maintenant au calcul effectif de $\bar{X}$.

4. Montrez que les conditions de Mangasarian-Fromovitz sont vérifiées en $\bar{X}$.

5. Écrire les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker.

6. Déterminez $\bar{X}$ lorsque $m = n$.