But : approximation quasi-newtonienne de $\nabla^2 \ell(x,d)$

$$(PQO)\ \begin{cases} \min\ \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T M d \\ [c(x) + c'(x) d]^\# = 0 \end{cases}$$

$\nabla^2_{xx} \ell(x,d)$ $\longrightarrow$ $M > 0$, d'ordre n approchée par la technique de quasi-Newton

$$M \simeq \nabla^2_{xx} \ell(x,d)$$

$$M_+ = BFGS(M, \gamma, \delta) \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} \delta = x_+ - x \\ \gamma = \gamma^\ell := \nabla_x \ell(x_+, d_+) - \nabla_x \ell(x, d_+) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \quad M \succ 0 \quad \text{et} \quad M_+ = BFGS(M, \gamma, \delta) \\ \text{alors} \quad M_+ \succ 0 \iff \gamma^T \delta > 0\end{array}}$$

$\Rightarrow$ On cherche à avoir $\gamma^T \delta > 0$

(on démontre leur 1 matrice $M \succ 0$)

- $(\gamma^\ell)^T \delta > 0$ n'est pas néc. assurée si
$$\gamma^\ell = \nabla_x \ell(x_+, \lambda_+) - \nabla \ell(x, \lambda_+)$$

$\Rightarrow$ remède (heuristique)

On prend $\gamma = (1-\theta) M \delta + \theta \gamma^\ell$

avec $\theta \in [0, 1]$ le + proche possible de 1 de telle sorte que

$$\gamma^T \delta \geq 0.2\, \delta^T M \delta$$

$\Rightarrow$ θ donné par la formule (5.5)

Algo. SQP avec quasi-Newton

$(x, d, \pi) \rightsquigarrow (x_+, d_+, \pi_+)$

① Si (x, d) est satisfaisant, on s'arrête

② On résout le (PQO) avec matrice $\pi \to (d, d^{PQ})$

③ $x_+ = x + d$, $d_+ = d^{PQ}$

④ Calcul de $\left| \begin{array}{l} \delta := x_+ - x \\ \gamma \text{ par la formule ci-dessus} \end{array} \right.$

puis $M_+ = BFGS(M, \gamma, \delta)$

Matrice initiale ?

- $M_1 = I$ (on ne connaît pas le psd)
- $M_2 = BFGS(\eta_1 I, \gamma_1, \delta_1)$

où $$\eta_1 = \frac{\|\gamma_1\|_2^2}{\gamma_1^T \delta_1}$$