$\boxed{\text{Ex 2}}$

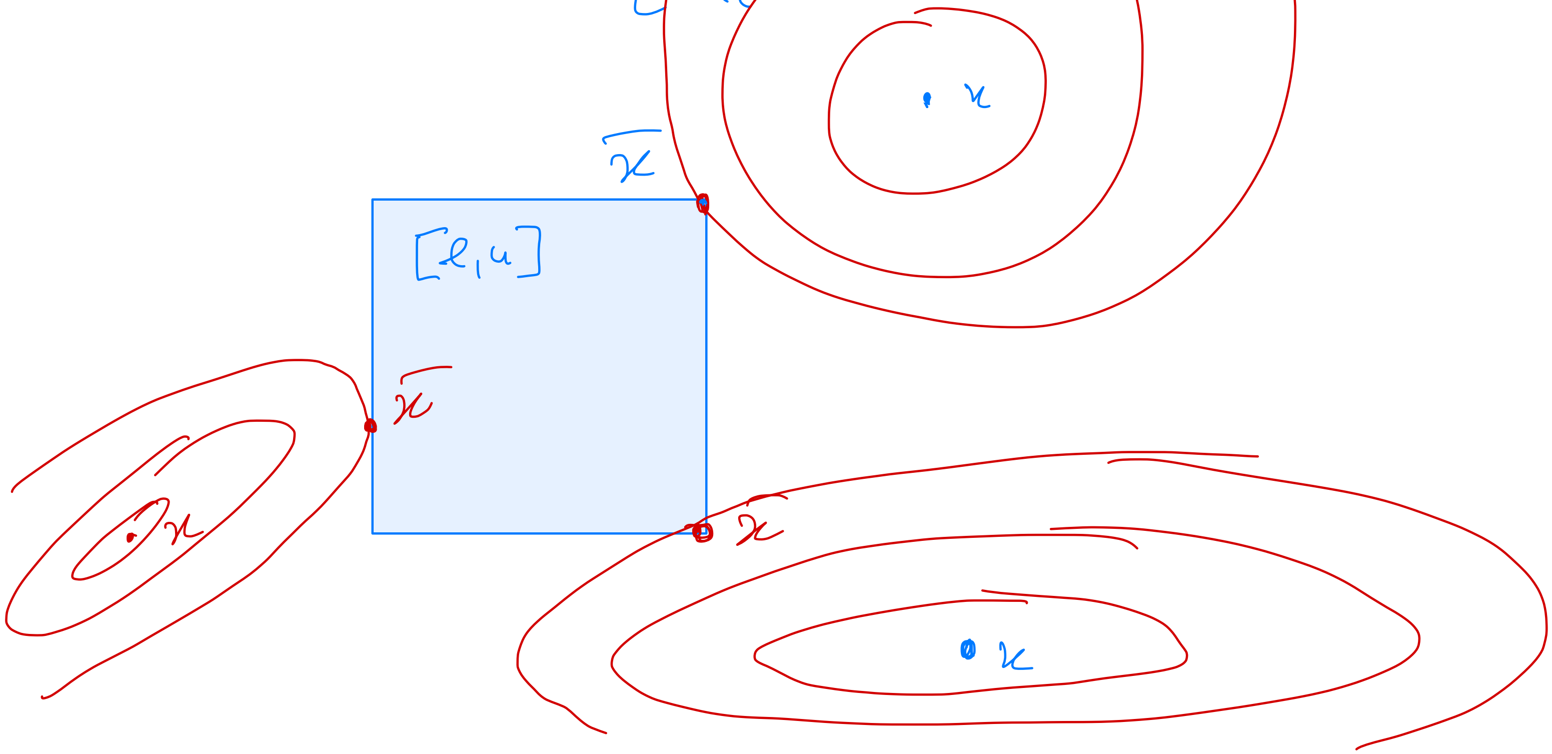
$l, u \in \bar{\mathbb{R}}^n \quad , \quad l \leq u$

$[l, u] = \{ x \in \mathbb{R}^n : \ l \leq x \leq u \}$

projection sur $[l,u]$ de $x \in \mathbb{R}^n$: solution $\bar{x}$

$$(P) \qquad \min_{\bar{x} \in [l,u]} \ \frac{1}{2} \sum d_i (\bar{x}_i - x_i)^2 \quad , \ d_i > 0$$

$$\bar{x}_i = \begin{cases} l_i & \text{si } x_i < l_i \\ x_i & \text{si } l_i \leq x_i \leq u_i \\ u_i & \text{si } u_i < x_i \end{cases}$$



$(P) \iff n$ problèmes $\min_{l \leq \bar{x}_i \leq u} \frac{1}{2} d_i (\bar{x}_i - x_i)^2$

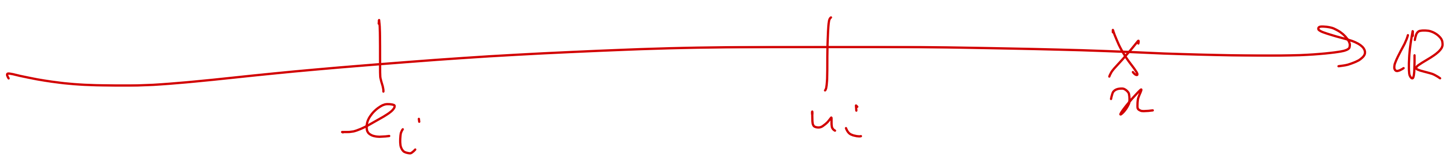
$\bar{x}$ sol de (P)

$$\iff \begin{cases} \sum_i d_i (\bar{x}_i - x_i)^2 \leq \sum d_i (y_i - x_i)^2, \ \forall y \in [l, u] \\ \bar{x} \in [l, u] \end{cases}$$

dim 2 ou

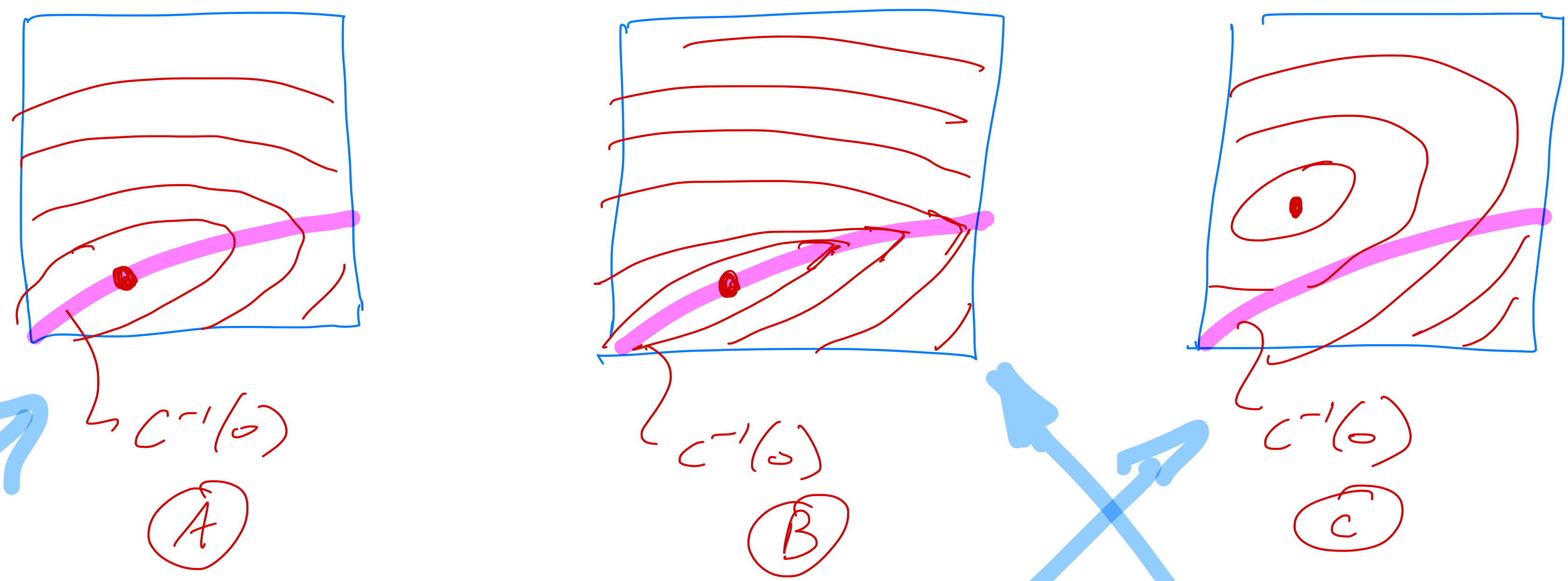
$$\iff \forall i \in [1 : n] \begin{cases} d_i (\bar{x}_i - x_i)^2 \leq d_i (y_i - x_i)^2, \ \forall y_i \in [l_i ; u_i] \\ \bar{x}_i \in [l_i, u_i] \end{cases}$$

$$\overset{d_i > 0}{\iff} \forall i \in [1 : n] \begin{cases} |\bar{x}_i - x_i| \leq |y_i - x_i|, \ \forall y_i \in [l_i ; u_i] \\ \bar{x}_i \in [l_i, u_i] \end{cases}$$



Ex 4

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ c(x) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$



$$\theta_1(x) = f(x) + \frac{r}{2} \|c(x)\|_2^2$$

$$\theta_2(x) = f(x) + \lambda^T c(x) + \frac{r}{2} \|c(x)\|_2^2$$

$$\theta_3(x) = f(x) + r \|c(x)\|_2$$

car nondifférentiable en $c(x) = 0$

$\bar{x} \in \mathrm{Sol}(P)$

$$\nabla_x \theta_1(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) + r\, c'(\bar{x})^T \underbrace{c(\bar{x})}_{=0} = \nabla f(\bar{x}) \neq 0$$

en général

$\bar{x}_1 \in \operatorname{argmin} \Theta_1$

$$0 = \nabla_x \Theta_1(\bar{x}_1) = \nabla f(\bar{x}_1) + r\, c'(\bar{x}_1)^T c(\bar{x}_1)$$

Ex 8

$$(P) \quad \min_{x \in E} \|Ax - b\|$$

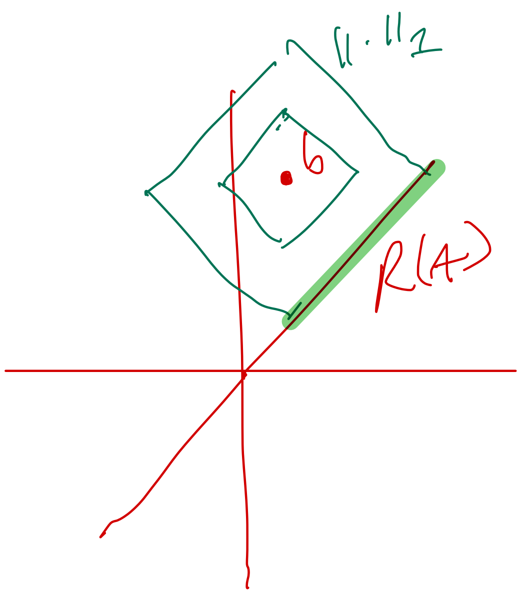
$$(P_\varepsilon) \quad \min_{x \in E} \|Ax - b\| + \varepsilon \|x\|$$

1) $\boxed{(P) \text{ a 1 solution}}$

$$(P) \iff \begin{cases} \min \|y - b\| \\ y \in R(A) \end{cases}$$

Coercive en y

est admissible fermé non vide



$\Rightarrow \exists$ solution $\bar{y} \in R(A)$

$\Rightarrow \exists \bar{x} : \bar{y} = A\bar{x}$

et a $\bar{x}$ est sol. de (P)

② $\boxed{(P_\varepsilon) \text{ a une solution}}$ $\quad \varepsilon > 0$

Car $x \mapsto \underbrace{\|Ax-b\|}_{\geq 0} + \underbrace{\varepsilon \|x\|}_{\to \infty}$ est coercive

③ $\boxed{\begin{array}{l} \bar{x}_\varepsilon \in \arg\min (P_\varepsilon) \\ \bar{x}_\varepsilon \to 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \nearrow \infty \end{array}}$

$$\|A\bar{x}_\varepsilon - b\| + \varepsilon \|\bar{x}_\varepsilon\| \leq \|Ax - b\| + \varepsilon \|x\|, \quad \forall x \in E$$

$$x = 0 \Rightarrow \underbrace{\|A\bar{x}_\varepsilon - b\|}_{\geq 0} + \varepsilon \|\bar{x}_\varepsilon\| \leq \|b\|$$

$$\varepsilon \|\bar{x}_\varepsilon\| \leq \|b\|$$

$$\|\bar{x}_\varepsilon\| \leq \frac{\|b\|}{\varepsilon} \to 0$$

(4) $\boxed{\varepsilon \downarrow 0}$

(P_ε) $\inf_{x \in \mathbb{E}} \|Ax-b\| + \varepsilon \|x\|$

(a) $\boxed{\|\bar{x}_\varepsilon\| \text{ croît}}$

résultat de monotonie en optimisation

(b) $\boxed{\{\bar{x}_\varepsilon\} \text{ est bornée}}$

$$\boxed{\|A\bar{x}_\varepsilon - b\| + \varepsilon \|\bar{x}_\varepsilon\| \leq \|Ax-b\| + \varepsilon\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{E}} \quad (1)$$

$\hat{x} \in \mathrm{Sol}(P)$

$$\underbrace{\|A\bar{x}_\varepsilon - b\|}_{\geq \cancel{\|A\hat{x}-b\|}} + \varepsilon\|\bar{x}_\varepsilon\| \leq \cancel{\|A\hat{x} - b\|} + \varepsilon\|\hat{x}\|$$

$x = \bar{x}_\varepsilon + h \qquad h \in N(A)$

$$\boxed{\|\bar{x}_\varepsilon\| \leq \|\hat{x}\|} \qquad \forall \hat{x} \in \mathrm{Sol}(P) \quad (2)$$

(c) $\boxed{\text{les points d'adhérence de } \{\bar{x}_\varepsilon\} \text{ sont solutions de } \min\{\|x\| : x \in Sol(P)\}}$

Soit $\bar{x}_\varepsilon \to \bar{x}$ (sous-suite)

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\bar{x} \in Sol(P)$

c-à-d $\|A\bar{x} - b\| \leq \|Ax - b\|, \ \forall x \in E$

oui : on passe à la limite quand $\varepsilon \downarrow 0$ dans (1)

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\|\bar{x}\| \leq \|\hat{x}\|, \ \forall \hat{x} \in Sol(P)$

oui : on passe à la limite dans (2)

5) $\boxed{\|\cdot\| \text{ sont des normes associées à un produit scalaire, et } \|\cdot\| \to \|x\|^2}$

(a) $\boxed{(P_\varepsilon) \text{ a } 1 \text{ solution unique}}$

OK par stricte convexité de $x \longmapsto \|x\|^2$

(b) Si $\varepsilon \to \infty$

alors 1) $\varepsilon\, \bar{x}_\varepsilon \longrightarrow A^* b$

2) si $A^* b \neq 0$

alors $\dfrac{\bar{x}_\varepsilon}{\|\bar{x}_\varepsilon\|} \longrightarrow \dfrac{A^* b}{\|A^* b\|}$

2) évident : $\varepsilon\, \bar{x}_\varepsilon \longrightarrow A^* b$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\varepsilon}\, \bar{x}_\varepsilon}{\cancel{\varepsilon}\, \|\bar{x}_\varepsilon\|} \longrightarrow \frac{A^* b}{\|A^* b\|}$$

1) (P'_ε) $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\|Ax-b\|^2 + \varepsilon \|x\|^2}_{\varphi(x)}$

$$0 = \underbrace{\nabla \varphi(\bar{x}_\varepsilon)}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{2A^*(\underbrace{A\bar{x}_\varepsilon - b}_{\in \mathbb{R}^m})}_{\longrightarrow\, -2A^*b} + \underbrace{2\varepsilon \bar{x}_\varepsilon}$$

$A : m \times n$

$$\varepsilon \bar{x}_\varepsilon \to A^* b.$$

c) Si $\varepsilon \downarrow 0$

alors $\bar{x}_\varepsilon \to$ la solution de norme minimale de (P)

(4.c) les p^{ts} d'adhérence de $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \to 0}$ sont des solutions de norme minimale de (P)

- $\|\cdot\|$ associée à 1 produit scalaire

$\Rightarrow$ (P) a 1 <u>unique</u> solution de norme minimale

$$\begin{cases} \min \|x\| \\ A^*(Ax-b) = 0 \end{cases}$$

- (x_ε) bornée avec 1 seul point d'adhérence, converge vers ce point d'adhérence

$\square$

$\boxed{\text{Ex 1}}$

S^n = ensble des matrices symétriques d'ordre n

S^n_+ = cône convexe des matrices symétriques semi-définies positives d'ordre n

$\boxed{S^n_+ \text{ cône convexe}}$

$$\left.\begin{array}{l} A, B \in S^n_+ \\ t \in [0,1] \end{array}\right) \Rightarrow (1-t)A + tB \in S^n_+$$

$$v^T\left[(1-t)A + tB\right]v$$

$$= (1-t)\,\underbrace{v^TAv}_{\geq 0} + t\,\underbrace{v^TBv}_{\geq 0} \geq 0$$

$\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$T_S S^n_+ = \{ D \in S^n : v^T D v \geq 0, \ \forall v \in N(S) \}$$

$\boxed{\subset}$

$$D \in T_S S^n_+$$

$$\overset{\text{def.}}{\iff} \exists (X_k) \subset S^n_+, \ \exists (t_k) \downarrow 0 :$$

$$\frac{X_k - S}{t_k} \longrightarrow D$$

$$v \in N(S) \Rightarrow v^T \left(\frac{X_k - \cancel{S}}{t_k} \right) v \longrightarrow \underbrace{v^T D v}_{\geq 0}$$

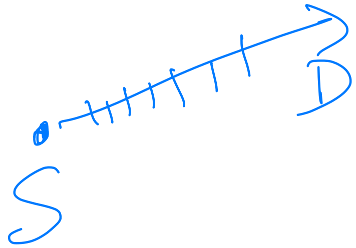
$$\| $$

$$\frac{v^T X_k v}{t_k} \geq 0$$

car

$$(X_k \succeq 0)$$

$\boxed{\supset}$ plus compliqué.



$$X_k = \underbrace{S}_{\succeq 0} + t_k \underbrace{D}_{\succeq 0 \text{ dans } N(S)}, \quad t_k \downarrow 0$$

alors on a $\dfrac{X_k - S}{t_k} = D \longrightarrow D$

OK si $X_k \succeq 0$, $\forall t_k$ assez petit.

- $v \in N(S) \Rightarrow v^T X_k v = t_k \underbrace{v^T D v}_{\geq 0} \geq 0$

- $v \notin N(S) \Rightarrow v^T X_k v = \underbrace{v^T S v}_{> 0} + t_k \underbrace{v^T D v}_{?}$

> 0, $\forall t_k$ assez petit

$$\boxed{T_S^{o} S_+^n := \{ D \in S^n : v^T D v > 0, \ \forall v \in N(S), v \neq 0 \}}$$

On a (a) $T_S^{o} S_+^n \subset T_S S_+^n$?

(b) $\overline{T_S^{o} S_+^n} \overset{?}{=} \{ D \in S^n : v^T D v \geq 0, \ \forall v \in N(S) \}$

(a) (b) $\Rightarrow$ <u>Conclusion</u> $\{ D \in S^n : v^T D v \geq 0, \ \forall v \in N(S) \} \subset T_S S_+^n$

<u>Dem (b)</u> Soit $D \in S^n : v^T D v \geq 0, \ \forall v \in N(S)$

On cherche $D_k \in S^n : v^T D_k v > 0, \ \forall v \in N(S), v \neq 0$

et $D_k \longrightarrow D$

Prenons $D_k = D + \frac{1}{k} I \xrightarrow[k \to \infty]{} D$

et $v^T D_k v = \underbrace{v^T D v}_{\geq 0} + \frac{1}{k} \underbrace{\|v\|^2}_{> 0} > 0$

Dem (a) Soit $X_h = S + t_h D$, $(t_h) \downarrow 0$

$$\frac{X_h - S}{t_h} = D \longrightarrow D$$

$$X_h \succcurlyeq 0 \quad ?$$

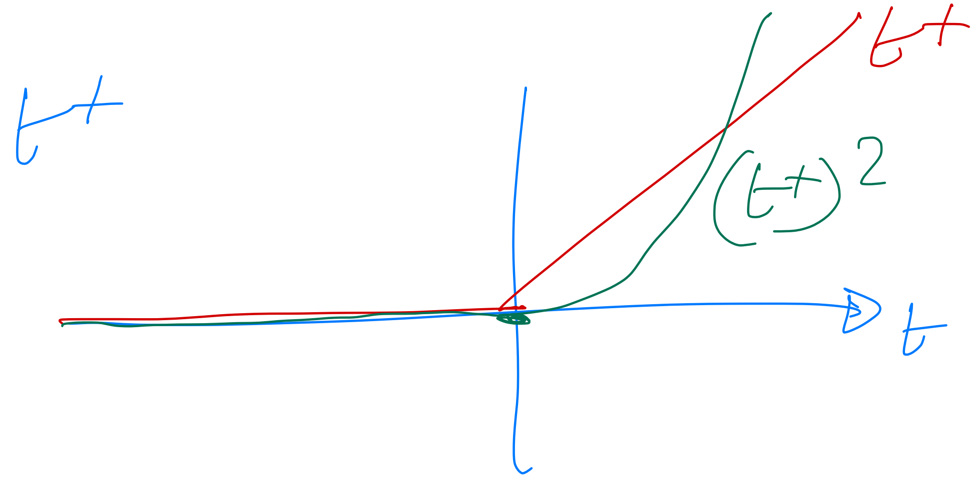
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{t_h} X_h \succcurlyeq 0 \quad ?$$

$$\Longleftrightarrow D + \frac{1}{t_h} S \succcurlyeq 0$$ (FINSLER!)

Dem $\succcurlyeq 0$ dans le $N(S)$

$\Longrightarrow D + r S \succcurlyeq 0$ pour r assez grand.

$\boxed{\text{Ex 6}}$



1) $\|c(x)^+\|_2^2$ est différentiable

$$\begin{cases} \min f(x) \\ c(x) \leq 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{quadratique}]{\text{pénalisation}} \theta_r(x) = f(x) + r\,\|c(x)^+\|_2^2$$