SOLUTIONS

1 Cône tangent à $\mathcal{S}^n_+$

- [$\subset$] Soit $D \in T_S\mathcal{S}^n_+$. Alors il existe une suite $\{S_k\} \subset \mathcal{S}^n_+$, une suite $\{t_k\} \downarrow 0$ telles que $(S_k - S)/t_k \to D$. Pour $v \in \mathcal{N}(S)$, on a alors $v^\mathsf{T}(S_k - S)v/t_k = v^\mathsf{T} S_k v/t_k \geqslant 0$, qui à la limite donne $v^\mathsf{T} D v \geqslant 0$.
- [$\supset$] Pour démontrer la réciproque, on introduit

$$\begin{aligned} T &:= \{D \in \mathcal{S}^n : v^\mathsf{T} D v \geqslant 0,\ \text{pour tout } v \in \mathcal{N}(S)\} \\ T_0 &:= \{D \in \mathcal{S}^n : v^\mathsf{T} D v > 0,\ \text{pour tout } v \in \mathcal{N}(S) \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

  - On a $T_0 \subset T_S\mathcal{S}^n_+$. En effet, soit $D \in T_0$. Alors $v^\mathsf{T} D v > 0$ pour tout $v \in \mathcal{N}(S) \setminus \{0\}$. Par le lemme de Finsler, $S_k := S + t_k D = t_k(D + (1/t_k)S) \succ 0$ pour $t_k > 0$ assez petit. Comme $(S_k - S)/t_k = D$, on en déduit que $D \in T_S\mathcal{S}^n_+$.
  - Comme $T_S\mathcal{S}^n_+$ est fermé, $\operatorname{adh} T_0 \subset T_S\mathcal{S}^n_+$. Par ailleurs $T \subset \operatorname{adh} T_0$[9] car si $D \in T$, $D_k := D + t_k I \in T_0$ lorsque $t_k > 0$ et $D_k \to D$ lorsque $t_k \downarrow 0$. Donc $T \subset T_S\mathcal{S}^n_+$.

2 Projection sur des contraintes de borne

Il s'agit de résoudre analytiquement le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\bar{x}} \ \frac{1}{2}\|\bar{x} - x\|_2^2 \\ l \leqslant \bar{x} \leqslant u. \end{array} \right. \tag{8.7}$$

On note f le critère et X l'ensemble admissible. Voici quelques méthodes possibles, de la plus simple à la plus compliquée.

- On utilise dès le départ le fait que le problème de projection se décompose en n problèmes d'optimisation indépendants :

$$\text{pour } i \in [1:n]: \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\bar{x}_i} \ \frac{1}{2}(\bar{x}_i - x_i)^2 \\ l_i \leqslant \bar{x}_i \leqslant u_i \end{array} \right. \tag{8.8}$$

  dont les solutions sont trivialement données par (8.1).

  On peut justifier le fait que (8.7) et (8.8) sont équivalents par le fait que le premier problème signifie que

$$\bar{x} \in [l,u] \qquad \text{et} \qquad \forall\, y \in [l,u] : \quad \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2, \tag{8.9}$$

  tandis que le second signifie que

$$\bar{x} \in [l,u] \qquad \text{et} \qquad \forall\, y_i \in [l_i,u_i],\ \ \forall\, i \in [1:n] : \quad (\bar{x}_i - x_i)^2 \leqslant (y_i - x_i)^2. \tag{8.10}$$

  Clairement, (8.9) implique la i-ième inégalité dans (8.10) en y prenant y tel que $y_j = \bar{x}_j$ pour tout $j \neq i$ et $y_i \in [l_i, u_i]$. Inversement, (8.10) implique (8.9) en sommant ses inégalités.

[9] En réalité on a l'égalité, car on a montré que $T_0 \subset T \subset \operatorname{adh} T_0$, donc $\operatorname{adh} T = \operatorname{adh} T_0$; or T est fermé.

- Il s'agit d'un problème d'optimisation convexe, dont la condition d'optimalité « $\forall\, y \in X : f'(\bar{x}; y-\bar{x}) \geqslant 0$ » est nécessaire et suffisante. Elle s'écrit

$$\forall\, y \in X : \quad 0 \leqslant (\bar{x}-x)^{\mathsf{T}}(y-\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i - x_i)(y_i - \bar{x}_i).$$

En prenant $y_j = \bar{x}_j$ pour tout $j \neq i$, cette condition se décompose en n conditions distinctes :

$$\forall\, i = 1, \ldots, n, \quad \forall t \in [l_i, u_i] : \quad (\bar{x}_i - x_i)(t - \bar{x}_i) \geqslant 0.$$

D'où les implications :

$$\begin{aligned}
&x_i < l_i \implies \bar{x}_i > x_i \implies \bar{x}_i = l_i,\\
&x_i > u_i \implies \bar{x}_i < x_i \implies \bar{x}_i = u_i,\\
&x_i \in [l_i, u_i] \implies \bar{x}_i = x_i \quad (\text{en prenant } t = x_i).
\end{aligned}$$

- On introduit le lagrangien

$$\ell(\bar{x}, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}\|\bar{x}-x\|_2^2 + \lambda^{\mathsf{T}}(\bar{x}-u) + \mu^{\mathsf{T}}(l-\bar{x}),$$

ce qui permet d'écrire les conditions d'optimalité de KKT

$$\left\{\begin{array}{ll}
(a) & \bar{x} - x + \lambda - \mu = 0\\
(b) & l \leqslant \bar{x} \leqslant u\\
(c) & \lambda \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0\\
(d) & \lambda^{\mathsf{T}}(\bar{x}-u) = \mu^{\mathsf{T}}(l-\bar{x}) = 0.
\end{array}\right.$$

Ces conditions caractérisent la solution car le problème est convexe. On peut résoudre ce système en $\bar{x}$, composante par composante.

  - Si $x_i \leqslant l_i$, on doit avoir $\bar{x}_i = l_i$; sinon $\mu_i = 0$ par (d) ; puis $\bar{x}_i \leqslant x_i$ par (a) et (b), ce qui n'est pas possible si $\bar{x}_i > l_i$.
  - Si $x_i \geqslant u_i$, on doit avoir $\bar{x}_i = u_i$; sinon $\lambda_i = 0$ par (d) ; puis $\bar{x}_i \geqslant x_i$ par (a) et (b), ce qui n'est pas possible si $\bar{x}_i < u_i$.
  - Si $l_i < x_i < u_i$, on doit avoir $\bar{x}_i = x_i$; sinon soit $\lambda_i > 0$, soit $\mu_i > 0$ par (a) ; si $\lambda_i > 0$, alors $\bar{x}_i = u_i$ et $\mu_i = 0$ par (d) et donc $\bar{x}_i < x_i$ par (a), ce qui contredit le fait que $\bar{x}_i = u_i$ et $x_i < u_i$; on s'y prend de la même manière lorsque $\mu_i > 0$.

3 Caractérisation de la projection sur un convexe défini au moyen d'inéquations

1. X est convexe car les composantes de c sont convexes. Il est fermé car c est continue.
2. La projection $\bar{x}$ est définie comme solution du problème

$$\min_{y \in X} \frac{1}{2}\|x-y\|^2.$$

Comme ce problème est convexe, sa solution est caractérisée par les conditions de KKT, qui ne sont autres que les conditions données en (ii).

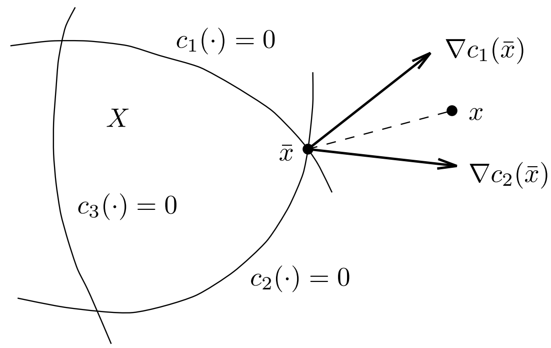

Fig. 15: Projection sur le convexe $\{c(\cdot) \leqslant 0\}$

Remarque. Les conditions 2.(ii) expriment que, pour que $\bar{x}$ soit la projection de x sur X, $(x - \bar{x})$ doit pouvoir s'exprimer comme combinaison linéaire conique des gradients des contraintes actives en $\bar{x}$. Ceci est illustré à la figure 14.

4 Reconnaître une fonction de pénalisation par ses courbes de niveau

Les courbes de niveaux de B ne sont pas différentiables. Il ne peut donc s'agir que de Θ_3, qui est la seule fonction de pénalisation à ne pas être différentiable.

Le minimum de la fonction de pénalisation de A vérifie la contrainte : il ne peut donc s'agir que de Θ_2 (exactitude du lagrangien augmenté si r est assez grand, ce qui doit être le cas ici).

C a été tracé avec Θ_1. C'est compatible; le minimum de Θ_1 ne vérifie pas la contrainte (c'est le cas quel que soit $r > 0$ si $\nabla f(x_*) \neq 0$).

5 Pénalisation d'un problème avec contraintes d'égalité

On introduit le problème pénalisé

$$\Theta_r(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{r}{2}(x_2 + x_2 - 1)^2,$$

dont les conditions d'optimalité s'écrivent

$$\begin{cases} 2x_1 + rx_1 + rx_2 - r = 0 \\ 2x_2 + rx_1 + rx_2 - r = 0. \end{cases}$$

On en déduit la solution

$$x_1^r = x_2^r = \frac{r}{2(1+r)}.$$

Lorsque $r \to \infty$, on a

$$x_1^r = x_2^r \to \frac{1}{2},$$

qui est la solution du problème de départ. Par ailleurs

$$r(x_2^r + x_2^r - 1) = \frac{-r}{1+r} \to -1,$$

lorsque $r \to \infty$, si bien que la solution duale est -1.

6 Pénalisation d'un problème avec contraintes d'inégalité

1. On peut écrire $g = p \circ f$, où $p : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^+)^2 \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement que p est différentiable et a pour dérivée

$$p'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 2t & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Dès lors g est différentiable en x_0 et

$$g'(x_0) = 2f(x_0)^+ f'(x_0).$$

2. On introduit le problème pénalisé

$$\Theta_r(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{r}{2}\left((1 - x_1 - x_2)^+\right)^2 + \frac{r}{2}\left(x_2^+\right)^2,$$

où $r > 0$. Par le point 1, cette fonction est différentiable et la condition d'optimalité $\nabla\Theta_r(x^r) = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} 2x_1^r - r(1 - x_1^r - x_2^r)^+ = 0 \\ 2x_2^r - r(1 - x_1^r - x_2^r)^+ + r(x_2^r)^+ = 0. \end{cases}$$

On retrouve dans ce système la « combinatoire » des problèmes avec contraintes d'inégalité. En effet, pour résoudre ce système, on doit envisager tous les différents cas possibles.

(a) $x_1^r + x_2^r \geqslant 1$ et $x_2^r \leqslant 0$. Le système conduit à $x_1^r = x_2^r = 0$, en contradiction avec les hypothèses du cas.

(b) $x_1^r + x_2^r \geqslant 1$ et $x_2^r \geqslant 0$. Cela conduit de nouveau à $x_1^r = x_2^r = 0$, en contradiction avec les hypothèses du cas.

(c) $x_1^r + x_2^r \leqslant 1$ et $x_2^r \leqslant 0$. On obtient

$$x_1^r = x_2^r = \frac{r}{2 + 2r},$$

qui ne vérifie pas $x_2^r \leqslant 0$.

(d) $x_1^r + x_2^r \leqslant 1$ et $x_2^r \geqslant 0$. On trouve

$$x_1^r = \frac{r(2 + r)}{4 + 6r + r^2} \qquad \text{et} \qquad x_2^r = \frac{2r}{4 + 6r + r^2},$$

qui vérifie les hypothèses du cas.

Dès lors, la seule solution possible est donnée par le cas (d). On observe que (x_1^r, x_2^r) ne vérifie pas les contraintes du problème original. Lorsque $r \to \infty$, on trouve

$$x_1^r \to 1 \quad \text{et} \quad x_2^r \to 0.$$

Le couple $(1, 0)$ est bien la solution du problème original. Par ailleurs

$$r(1 - x_1^r - x_2^r)^+ \to 2 \qquad \text{et} \qquad r(x_2^r)^+ \to 2,$$

lorsque $r \to \infty$, si bien que la solution duale est $(2, 2)$.

7 Pénalisation de problèmes quadratiques

1. L'ensemble admissible X est non vide (A surjective) et fermé. Le critère f est continu. D'autre part, si $\|x\| \to \infty$ avec $x \in X$, on a $x = x_0 + h$, avec $x_0 \in X$, $h \in \mathcal{N}(A)$ et $\|h\| \to \infty$. On obtient alors (C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de h) :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + (g + Hx_0)^\mathsf{T} h + \frac{1}{2} h^\mathsf{T} H h \\ &\geqslant -C_1 - C_2\|h\| + \alpha\|h\|^2, \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$, car H est définie positive sur $\mathcal{N}(A)$. Donc $f(x) \to \infty$ et le problème a au moins une solution.

Il a une solution unique, car f est strictement convexe sur l'ensemble admissible X. Ceci peut se voir en écrivant $X = \{x_0 + Zh : h \in \mathbb{R}^{n-m}\}$, où x_0 est arbitraire dans X et les colonnes de $Z \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$ forment une base de $\mathcal{N}(A)$. Le hessien de $\varphi(h) = f(x_0 + Zh)$, $Z^\mathsf{T} H Z$, étant défini positif, f est strictement convexe sur $\mathcal{N}(A)$.

2. Comme les contraintes sont affines, elles sont qualifiées. Il existe donc un multiplicateur $\bar\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que l'on ait (8.2). Inversement, si $(\bar x, \bar\lambda)$ est solution de (8.2), alors $\bar x$ est solution de (P_1), car le problème est convexe (critère convexe sur X convexe). Comme (P_1) a une solution unique $\bar x$, il y a exactement un $\bar x$ solution de (8.2). Le multiplicateur $\bar\lambda$ est aussi unique du fait de la surjectivité de A.

3. (a) On raisonne par l'absurde. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite $(h_k) \subset \mathbb{R}^n$ telle que l'on ait $\|h_k\| = 1$ et (8.4). On peut aussi supposer (on extrait une sous-suite au besoin) que $h_k \to h$. En divisant le membre de gauche de (8.5) par k et en passant à la limite, on a $Ah = 0$. Et en passant à la limite dans $h_k^\mathsf{T} H h_k \leqslant 0$ on obtient $h^\mathsf{T} H h \leqslant 0$. Comme $\|h\| = 1$, ceci contredit l'hypothèse selon laquelle H est définie positive sur $\mathcal{N}(A)$.

   (b) Le hessien de Θ_r vaut $H + rA^\mathsf{T} A$. Il est défini positif pour r grand. Dès lors Θ_r est strictement convexe et tend vers l'infini pour $\|x\| \to \infty$. On en déduit que (8.3) a une unique solution pour r grand.
   L'équation d'optimalité $\nabla\Theta_r(\bar x^r) = 0$ donne

$$g + H\bar x^r + rA^\mathsf{T}(A\bar x^r - b) = 0, \tag{8.11}$$

   donc (8.5).

   (c) Par l'optimalité de $\bar x^r$, on a pour un point arbitraire x_0 vérifiant les contraintes :

$$g^\mathsf{T}\bar x^r + \frac{1}{2}(\bar x^r)^\mathsf{T} H \bar x^r \leqslant \Theta_r(\bar x^r) \leqslant \Theta_r(x_0) =: C,$$

   où $C > 0$ est une constante indépendante de r.

   (d) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une sous-suite de $(\bar x^r)$ telle que $\|\bar x^r\| \to \infty$. On note $\hat x^r = \bar x^r / \|\bar x^r\|$ et on suppose (en extrayant une sous-suite au besoin) que $\hat x^r \to \hat x$. En multipliant (8.5) par $\hat x^r / \|\bar x^r\|$, on obtient

$$(\hat x^r)^\mathsf{T} H \hat x^r + r\|A\hat x^r\|^2 = \frac{1}{\|\bar x^r\|}(-g + rA^\mathsf{T} b)^\mathsf{T} \hat x^r.$$

   En divisant par r et en passant à la limite, on obtient $A\hat x = 0$.

À la limite dans (8.6)$/\|\bar{x}^r\|^2$, on trouve $\hat{x}^\mathsf{T} H \hat{x} \leqslant 0$.

Comme $\hat{x} \neq 0$, les deux résultats précédents contredisent le fait que H est définie positive sur $\mathcal{N}(A)$.

(e) $(\bar{x}^r)$ étant bornée, elle a une sous-suite convergente. Considérons une de ces sous-suites convergentes (encore notée $(\bar{x}^r)$), convergeant, disons vers x. En divisant (8.5) par r, on obtient à la limite (A^T est injective)

$$Ax = b.$$

On peut alors récrire (8.11) comme suit

$$g + H\bar{x}^r + A^\mathsf{T}(rA\bar{x}^r - rb) = 0.$$

Comme $(\bar{x}^r)$ converge et que A est surjective, $rA\bar{x}^r - rb$ converge, disons vers un vecteur $\bar{\lambda}$. À la limite :

$$g + Hx + A^\mathsf{T}\bar{\lambda} = 0.$$

L'unicité de la solution de (8.2) implique que toute la suite $(\bar{x}^r)$ converge vers $x = \bar{x}$.

8 Problème de moindres-carrés linéaire régularisé

1. On peut voir (P) comme le problème $\inf\{\|y - b\|_\mathbb{F} : y \in \mathcal{R}(A)\}$, dans lequel on « projette » le point b sur $\mathcal{R}(A)$. Il ne s'agit pas d'une projection au sens habituel, car la norme $\|\cdot\|_\mathbb{F}$ ne dérive pas nécessairement d'un produit scalaire. Cette projection existe (mais elle n'est pas nécessairement unique) puisque le critère est coercif et que l'ensemble admissible est fermé non vide (corollaire 1.4).

2. Soit f_ε le critère de (P_ε). Il est clair que f_ε est continue et que $f_\varepsilon(x) \to \infty$ si $\|x\|_\mathbb{E} \to \infty$; donc (P_ε) a au moins une solution (corollaire 1.4).

3. Par optimalité de $\bar{x}_\varepsilon$, $f_\varepsilon(\bar{x}_\varepsilon) \leqslant f_\varepsilon(0)$, ce qui conduit à $\|\bar{x}_\varepsilon\|_\mathbb{E}^\beta \leqslant \|b\|_\mathbb{F}^\alpha/\varepsilon$, montrant que $\bar{x}_\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to \infty$.

4. (a) Par la proposition 12.2 (vue au cours), lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, $\|\bar{x}_\varepsilon\|_\mathbb{E}^\beta$ croît, donc aussi $\|\bar{x}_\varepsilon\|_\mathbb{E}$.

   (b) Soit $\hat{x}$ une solution de (P). D'une part

$$\|A\bar{x}_\varepsilon - b\|_\mathbb{F}^\alpha + \varepsilon\|\bar{x}_\varepsilon\|_\mathbb{E}^\beta \leqslant \|A\hat{x} - b\|_\mathbb{F}^\alpha + \varepsilon\|\hat{x}\|_\mathbb{E}^\beta \tag{8.12}$$

   par optimalité de $\bar{x}_\varepsilon$ et, d'autre part, $\|A\hat{x} - b\|_\mathbb{F} \leqslant \|A\bar{x}_\varepsilon - b\|_\mathbb{F}$ par optimalité de $\hat{x}$. En additionnant ces inégalités, on obtient

$$\|\bar{x}_\varepsilon\|_\mathbb{E} \leqslant \|\hat{x}\|_\mathbb{E}, \tag{8.13}$$

   ce qui montre que $\{\bar{x}_\varepsilon\}$ est bornée.

   (c) Le fait que les points d'adhérence de $\{\bar{x}_\varepsilon\}$ sont solutions de $\min\{\|x\|_\mathbb{E} : x \in S\}$, se déduit de la proposition 12.3 (non vue au cours) et peut se démontrer comme suit.

Soit $\bar{x}$ un point d'adhérence de $\{\bar{x}_\varepsilon\}$. Il existe donc une sous-suite $\{\bar{x}_\varepsilon\} \to \bar{x}$. En passant à la limite dans (8.12), on trouve que $\|A\bar{x} - b\|_{\mathbb{F}} \leqslant \|A\hat{x} - b\|_{\mathbb{F}}$, ce qui montre que $\bar{x} \in S$. En passant à la limite dans (8.13), on trouve $\|\bar{x}\|_{\mathbb{E}} \leqslant \|\hat{x}\|_{\mathbb{E}}$ et comme $\hat{x}$ est arbitraire dans S, on en déduit que $\bar{x}$ est solution du problème $\min\{\|x\|_{\mathbb{E}} : x \in S\}$.

5. (a) On a $\nabla^2 f_\varepsilon(x) = 2(A^*A + \varepsilon I)$, qui est défini positif; donc f_ε est strictement convexe et (P_ε) a une solution unique.

   (b) La solution $\bar{x}_\varepsilon$ vérifie
   $$A^*(A\bar{x}_\varepsilon - b) + \varepsilon\bar{x}_\varepsilon = 0.$$
   Comme $\bar{x}_\varepsilon \to 0$, cette équation montre que $\varepsilon\bar{x}_\varepsilon \to A^*b$.
   Si, de plus, $A^*b \neq 0$, alors $\bar{x}_\varepsilon \neq 0$ et $\bar{x}_\varepsilon/\|\bar{x}_\varepsilon\| = (\varepsilon\bar{x})/\|\varepsilon\bar{x}_\varepsilon\| \to A^*b/\|A^*b\|$.

   (c) Comme le problème $\min\{\|x\|_{\mathbb{E}} : x \in S\}$ a aussi une unique solution (projection de zéro sur S), toute la suite $\{\bar{x}_\varepsilon\}_{\varepsilon\downarrow 0}$ converge vers cette solution de norme minimale.