Cours OPT 201

Optimisation Différentiable – Théorie et Algorithmes

Exercices de la séance 10
(pénalisation)

Analyse convexe

1. Cône tangent à $\mathcal{S}^n_+$

Méthodes de projection

2. Projection sur des contraintes de borne
3. Caractérisation de la projection sur un convexe défini au moyen d'inéquations

Méthodes de pénalisation

4. Reconnaître une fonction de pénalisation par ses courbes de niveau
5. Pénalisation d'un problème avec contraintes d'égalité
6. Pénalisation d'un problème avec contraintes d'inégalité
7. Pénalisation de problèmes quadratiques
8. Problème de moindres-carrés linéaire régularisé

1 Cône tangent à $\mathcal{S}^n_+$

Montrez que le cône tangent à $\mathcal{S}^n_+$ en $S \in \mathcal{S}^n_+$ s'écrit

$$T_S\mathcal{S}^n_+ = \{D \in \mathcal{S}^n : v^\mathsf{T} D v \geqslant 0, \text{ pour tout } v \in \mathcal{N}(S)\}.$$

2 Projection sur des contraintes de borne

Soient l et u donnés dans $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : l_i \leqslant x_i \leqslant u_i \text{ pour } i = 1, \dots, n\}.$$

Montrez que, pour le produit scalaire euclidien, la projection $\bar{x} = P_X(x)$ de x sur X est donnée par

$$\bar{x}_i = \begin{cases} l_i & \text{si} \quad x_i < l_i \\ x_i & \text{si} \quad l_i \leqslant x_i \leqslant u_i \\ u_i & \text{si} \quad u_i < x_i. \end{cases} \tag{8.1}$$

3 Caractérisation de la projection sur un convexe défini au moyen d'inéquations

On considère l'ensemble

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) \leqslant 0\},$$

où $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est régulière et a ses composantes convexes. On suppose que $X \neq \emptyset$.

1. Montrez que X est un convexe fermé.
2. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\bar{x} \in X$ tel que les gradients des contraintes actives en $\bar{x}$ soient linéairement indépendants. Montrez que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) $\bar{x}$ est la projection de x sur X;

   (ii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla c_i(\bar{x}) \\ \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_i c_i(\bar{x}) = 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, p. \end{cases}$$

4 Reconnaître une fonction de pénalisation par ses courbes de niveau

On considère un problème de minimisation

$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ x \in \mathbb{R}^2 \\ c(x) = 0 \end{cases}$$

en présence d'une unique contrainte d'égalité ($c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). La figure 13 donne les tracés des courbes de niveau de trois fonctions de pénalisation associées au problème ci-dessus.

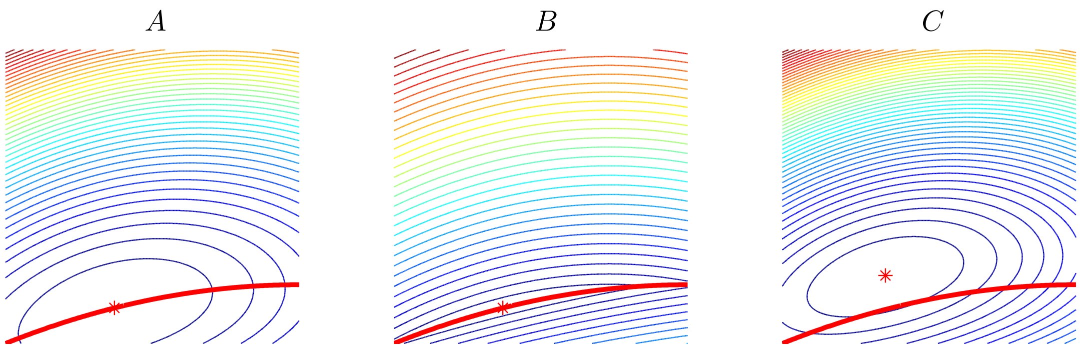

Fig. 14: Courbes de niveaux de 3 fonctions de pénalisation

L'ensemble admissible du problème est représenté dans chaque tracé par la courbe en trait large du bas. Déterminez pour chaque tracé (A), (B) et (C) laquelle des fonctions de pénalisation Θ_1, Θ_2 ou Θ_3 données ci-après qui a été utilisée pour dessiner ces courbes de niveau, sachant que toutes les trois ont été utilisées. Dans celles-ci r est un scalaire strictement positif et λ_* est le multiplicateur optimal du problème. Le minimum de ces fonctions est représenté par une étoile dans les dessins. Justifiez vos réponses.

$$\begin{aligned}
\Theta_1(x) &= f(x) + \frac{r}{2}\|c(x)\|_2^2 \\
\Theta_2(x) &= f(x) + \lambda_*^{\mathsf{T}} c(x) + \frac{r}{2}\|c(x)\|_2^2 \\
\Theta_3(x) &= f(x) + r\|c(x)\|_2
\end{aligned}$$

5 Pénalisation d'un problème avec contraintes d'égalité

On considère le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Trouvez la solution primale-duale de ce problème par pénalisation quadratique.

6 Pénalisation d'un problème avec contraintes d'inégalité

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable dans le voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $t^+ = \max(0, t)$. Montrez que la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

   $$g(x) = (f(x)^+)^2.$$

   est différentiable en x_0. Calculez sa dérivée en ce point.

2. On considère à présent le problème d'optimisation dans $\mathbb{R}^2$:

   $$\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 0. \end{cases}$$

   Trouvez la solution primale-duale de ce problème par pénalisation quadratique.

7 Pénalisation de problèmes quadratiques

Soient H une matrice symétrique d'ordre n (non nécessairement définie positive), $g \in \mathbb{R}^n$, A une matrice $m \times n$ surjective et $b \in \mathbb{R}^m$. On considère le problème quadratique sur $\mathbb{R}^n$:

$$(P_1) \quad \begin{cases} \min \left(f(x) := g^\mathsf{T} x + \dfrac{1}{2}\, x^\mathsf{T} H x \right) \\ Ax = b. \end{cases}$$

On suppose que $h^\mathsf{T} H h > 0$, pour tout h non nul dans le noyau de A.

1. Montrez que le problème (P_1) a une solution *unique*. [On pourra considérer *et justifier* l'utilisation de la fonction $u \in \mathbb{R}^{n-m} \mapsto f(x_0 + Zu)$, où x_0 vérifie $Ax_0 = b$ et les colonnes de Z forment une base de $\mathcal{N}(A)$.]

   Soit $\bar{x}$ cette solution.

2. Montrez qu'il existe un vecteur $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\begin{cases} g + H\bar{x} + A^\mathsf{T} \bar{\lambda} = 0 \\ A\bar{x} = b. \end{cases} \tag{8.2}$$

   Justifiez le fait que si $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ est solution de (8.2), alors $\bar{x}$ est solution de (P_1). En déduire que (8.2) a une solution unique $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

3. On considère le problème pénalisé ($r \geqslant 0$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne ou ℓ_2)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; \Theta_r(x), \tag{8.3}$$

   où

$$\Theta_r(x) = g^\mathsf{T} x + \frac{1}{2}\, x^\mathsf{T} H x + \frac{r}{2} \|Ax - b\|^2.$$

   (a) Montrez que pour r assez grand, la matrice $H + rA^\mathsf{T} A$ est définie positive. [On pourra raisonner par l'absurde en montrant que si l'affirmation est fausse, il existe une suite (h_k) vérifiant $\|h_k\| = 1$ et

$$h_k^\mathsf{T} H h_k + k \|A h_k\|^2 \leqslant 0. \tag{8.4}$$

   On montre alors que (8.4) conduit à une contradiction.]

   (b) Montrez que pour r assez grand le problème (8.3) a une solution unique, notée $\bar{x}^r$, et que celle-ci vérifie

$$(H + rA^\mathsf{T} A)\bar{x}^r = -g + rA^\mathsf{T} b. \tag{8.5}$$

   (c) Montrez qu'il existe une constante C indépendante de r telle que

$$g^\mathsf{T} \bar{x}^r + \frac{1}{2} (\bar{x}^r)^\mathsf{T} H \bar{x}^r \leqslant C, \quad \forall r \geqslant 0. \tag{8.6}$$

   (d) Montrez que $(\bar{x}^r)$ est bornée lorsque $r \to \infty$. [On pourra à nouveau raisonner par l'absurde.]

   (e) Montrez que, lorsque $r \to \infty$, *toute* la suite $(\bar{x}^r)$ converge vers la solution du problème (P_1).

8 Problème de moindres-carrés linéaire régularisé

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie et de normes notées $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}$ respectivement, $A : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application linéaire et $b \in \mathbb{F}$. On considère le problème

$$(P) \quad \inf_{x \in \mathbb{E}} \|Ax - b\|_{\mathbb{F}}$$

et sa version régularisée

$$(P_\varepsilon) \quad \inf_{x \in \mathbb{E}} \|Ax - b\|_{\mathbb{F}}^{\alpha} + \varepsilon \|x\|_{\mathbb{E}}^{\beta},$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\varepsilon > 0$.

1. Montrez que (P) a une solution.
2. Montrez que (P_ε) a une solution. On en sélectionne une, notée $\bar{x}_\varepsilon$.
3. Montrez que $\bar{x}_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to \infty$.
4. On suppose à présent que $\varepsilon \downarrow 0$. Montrez que
   (a) $\|\bar{x}_\varepsilon\|_{\mathbb{E}}$ croît,
   (b) $\{\bar{x}_\varepsilon\}$ est bornée,
   (c) les points d'adhérence de $\{\bar{x}_\varepsilon\}$ sont solutions de $\min\{\|x\|_{\mathbb{E}} : x \in S\}$, où S est l'ensemble des solutions de (P).
5. On suppose à présent que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont euclidiens, que $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}$ sont associées à un produit scalaire, et que $\alpha = \beta = 2$. Montrez que
   (a) (P_ε) a une solution unique ;
   (b) lorsque $\varepsilon \to \infty$, $\varepsilon \bar{x}_\varepsilon$ converge vers A^*b (A^* est l'opérateur adjoint de $A : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$) ; et si, de plus, $A^*b \neq 0$, alors $\bar{x}_\varepsilon / \|\bar{x}_\varepsilon\| \to A^*b / \|A^*b\|$ ($\|\cdot\|$ est une norme quelconque) ;
   (c) lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, $\bar{x}_\varepsilon$ converge vers **la** solution de norme minimale de (P).