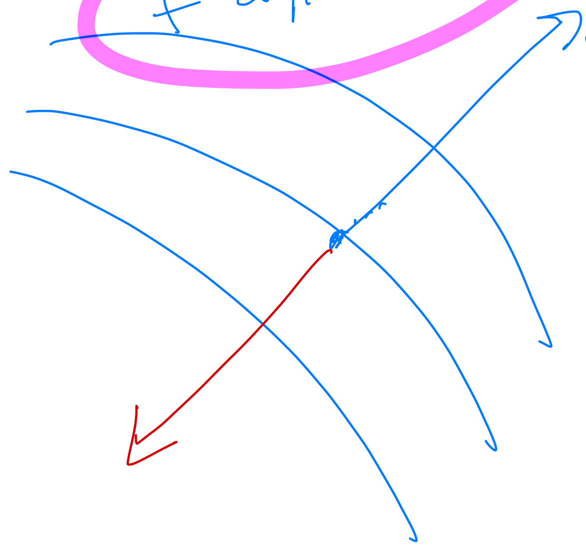
Ex 4

1

f différentiable



$\nabla f(x) \neq 0$

$f(x + t\nabla f(x)) > f(x)$

$\forall t > 0$ petit

$f(x - t\nabla f(x)) < f(x)$
$\forall t > 0$ petit

$f \in \mathrm{Conv}(E)$ non différentiable

$x^* \in \partial f(x)$

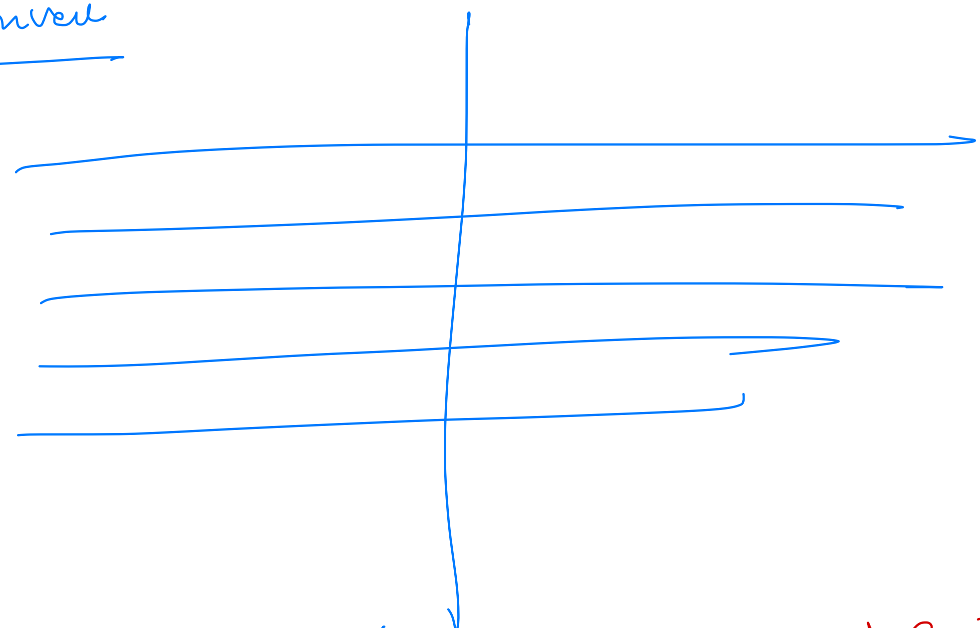
$\Longrightarrow f(x + t x^*) > f(x), \quad \forall t > 0$ petit

il suffit de prendre $y = x + t x^*$ dans (S)

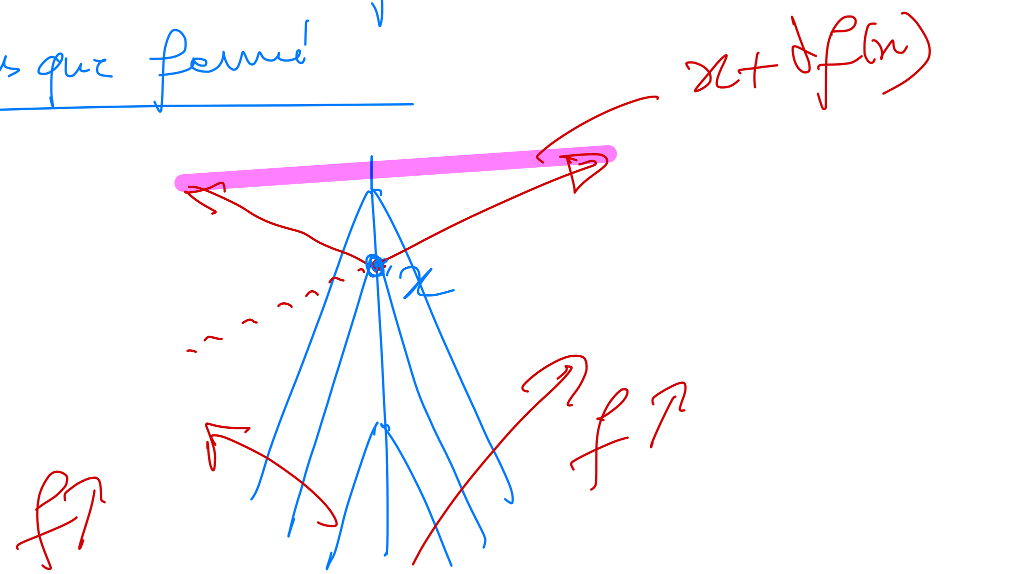
$$f(x + t x^*) \geq f(x) + \underbrace{\langle x^*, t x^* \rangle}_{\underbrace{t \|x^*\|^2}_{> 0}} > f(x) \quad \forall t > 0$$

- Mais $f(x - t x^*)$ n'est pas réel $< f(x)$ pour $t > 0$ petit

Livre ouvert

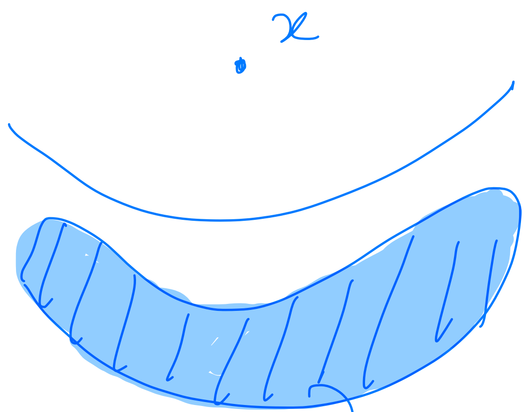


Livre presque fermé



(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\boxed{A}$



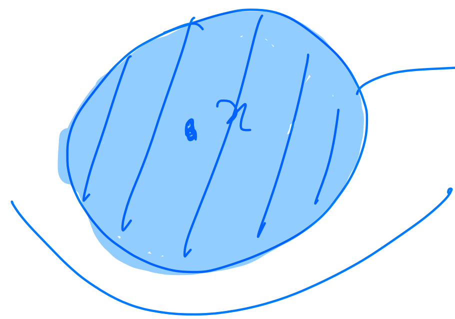
$\mathcal{C}$ = courbe de niveau de f

($f = c^{ste}$ sur $\mathcal{C}$)

$S \neq x + \partial f(x)$

NON car S n'est pas convexe

$\boxed{B}$



• $S \not\ni x + \partial f(x)$

$\mathcal{C}$

Oui, ce S peut être $x + \partial f(x)$ pour une convexe fct $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^2)$

$f = \|\cdot\|_2$ $\partial f(0) = B$

• $x \notin \operatorname{argmin} f$

On a $x \in x + \partial f(x)$

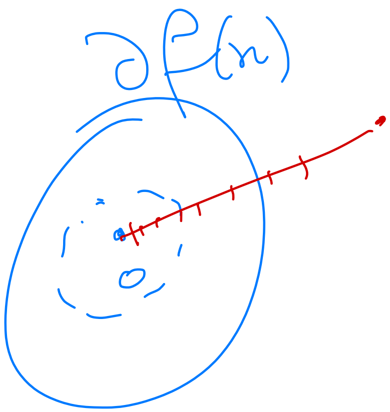
$\Rightarrow 0 \in \partial f(x)$

$\Rightarrow x \in \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^2} f(y)$

• Est-ce que $f(y) > f(x)$, $\forall y \neq x$?

oui, car $x \in \operatorname{int}(x + \partial f(x))$

$$\iff 0 \in \operatorname{int}(\partial f(x))$$



alors $f(y) > f(x)$ si $x \neq y$

car ...

$$(S_2) \quad f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle$$

$$\forall x^* \in \partial f(x)$$

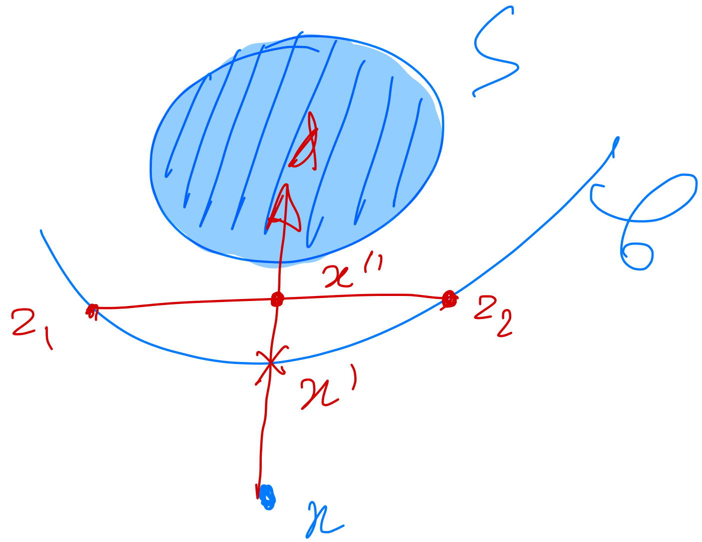
il suffit de prendre

$x^* = t(y - x)$ avec $t > 0$

suffisamment petit lorsque

$x^* \in \partial f(x)$

$\boxed{c}$



NON
S ne peut pas être $x + \partial f(x)$

S peut être $x + \partial f(x)$?

$$f(z_1) = f(z_2)$$

$$f(x'') = f\big((1-t) z_1 + t z_2\big) \quad t \in [0,1]$$

$$\leq (1-t) \underbrace{f(z_1)} + t f\underbrace{(z_2)}$$

$$= f|_{\mathscr{C}}$$

$$f(x'') < f(x') = f|_{\mathscr{C}} < f(x)$$

$\Rightarrow$ f diminue dans la direction d $\Rightarrow$ $d \notin \partial f(x)$

$\boxed{\text{Ex 5}}$

E e euclidien (p.s. $\langle \cdot , \cdot \rangle$)

$f(\cdot) = \|\cdot\|$ une norme sur E (non néc. associée au p.scalaire)

la norme duale de $\|\cdot\|$ pour le p.s. $\langle \cdot , \cdot \rangle$

est déf par

$$\boxed{\|v\|_D = \sup_{\|u\| \leq 1} \langle u, v \rangle .}$$

$$B_D = \{ x \in E : \|x\|_D \leq 1 \}$$

(1) $f = \|\cdot\| \in \mathrm{Conv}(E)$

- On a vu (TD1) que $\|\cdot\|$ est convexe
- propre car $\|x\| \in \mathbb{R}$
- fermée car continue

② CS généralisé

$$\boxed{|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|_D .}$$

$$\forall \|u\| \leq 1 : \quad \|v\|_D \geq \langle u, v\rangle$$

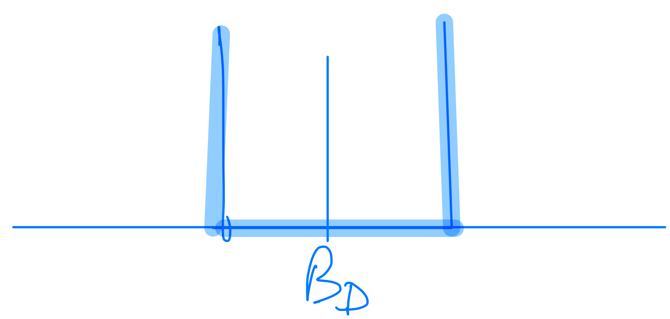
$$\forall u \in E \setminus \{0\} : \quad \|v\|_D \geq \left\langle \frac{u}{\|u\|}, v \right\rangle$$

$$\langle u, v\rangle \leq \|u\| \, \|v\|_D$$

$$\forall u \in E : \quad \langle u, v\rangle \leq \|u\| \, \|v\|_D$$

$$\text{et} \quad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|_D .$$

③ $\boxed{f^* = I_{B_D}}$ où $I_{B_D}(x^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x^*\|_D \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$



$$f^*(x^*) = \sup_{x \in E} \langle x^*, x \rangle - \|x\|$$

- $f^*(x^*) \geq 0$

$$f^*(x^*) \geq \langle x^*, 0 \rangle - \|0\| = 0$$

- $\|x^*\|_D \leq 1 \implies f^*(x^*) \leq 0$

$$f^*(x^*) \leq \sup_{x \in E} \underbrace{\left(\|x^*\|_D - 1 \right)}_{\leq 0} \|x\| \quad (CS)$$

$$\leq 0$$

- $\|x^*\|_D > 1 \implies f^*(x^*) = +\infty$

$\|\cdot\| = \langle \cdot , \cdot \rangle^{1/2}$

$$f^*(x^*) \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} t\left(|x^*|^2 - \|x^*\| \right)$$

(ne marche pas avec $x = x^*$)

$$\|x^*\|_D = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x^*, x\rangle > 1$$

$$\Rightarrow \exists x_1 : \begin{cases} \|x_1\| \leq 1 \\ \langle x^*, x_1\rangle > 1 \end{cases}$$

$$f^*(x^*) \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} t \underbrace{\left(\underbrace{\langle x^*, x_1 \rangle}_{>1} - \underbrace{\|x_1\|}_{\leq 1} \right)}_{>0} = +\infty$$

(4) $$\boxed{\partial f(x) = \{x^* \in B_D : \langle x^*, x\rangle = \|x\|\}}$$

$x^* \in \partial f(x)$

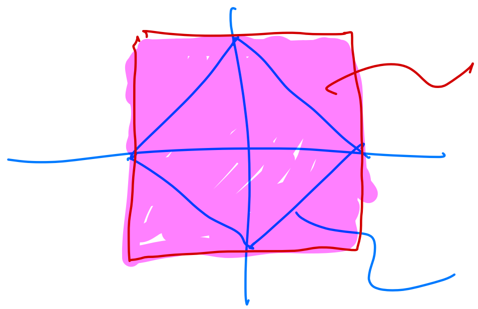
$$\overset{(S)}{\iff} \quad f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$$

$$\iff \quad \|x\| + \underbrace{I_{B_D}(x^*)}_{\Rightarrow \|x^*\|_D \leq 1} = \langle x^*, x\rangle \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^* \in B_D \quad \text{ou} \quad \langle x^*, x\rangle = \|x\|$$

$\square$

(a) $\boxed{\partial f(0) = B_D}$ clair car $\langle x^*, 0\rangle = \|0\|$



$$\partial(\|\cdot\|_1)(0) = B_\infty$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \le 1\}$$

$$B_1 = \{x : \|x\|_1 \le 1\}$$

(b) $\boxed{x^* \in \partial f(x),\ x \neq 0 \Rightarrow \|x^*\|_D = 1}$

$$\cancel{\|x\|} = \langle x^*, x\rangle \le \|x^*\|_D \cancel{\|x\|}$$

$$x^* \in B_D$$

$$\Rightarrow \|x^*\|_D = 1$$

5) La norme bidual $\|\cdot\|_{DD}$

$$\|x\|_{DD} := \sup_{\|y\|_D \leq 1} \langle x, y \rangle$$

a) $$\boxed{\|\cdot\|_{DD} = \|\cdot\|}$$

$$f(\cdot) = \|\cdot\|$$

$$f^*(x^*) = I_{B_D}(x^*)$$

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in E} \langle x^*, x \rangle - I_{B_D}(x^*)$$

$$= \sup_{x^* \in B_D} \langle x^*, x \rangle = \|x\|_{DD}$$

$$f \in \text{Conv}(\mathbb{E}) \Rightarrow f = f^{\cancel{**}}$$

et donc $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{D\,D}$

$\boxed{b}$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{E},\ \exists y \in \mathbb{E} : \|y\| = 1 \text{ et } \langle x, y \rangle = \|x\|_D}$

$$\|x\|_D = \sup_{\|y\| \leq 1} \langle x, y \rangle$$

compact

$\Rightarrow \exists$ 1 solution y : $\|y\| \leq 1$

et $\langle x, y \rangle = \underbrace{\|x\|_D}_{\text{si } x \neq 0}$ $\Rightarrow \|y\| = 1$

si $\|y\| < 1$
$y \neq 0$

$\langle x, \underbrace{\frac{y}{\|y\|}}_{\|\cdot\| \leq 1} \rangle = \frac{\|x\|_D}{\|y\|} > \|x\|_D$ pas possible

$$\forall x \in E,\ \exists y \in E : \|y\|_D = 1 \text{ et } \langle x, y \rangle = \|x\|$$

$$\|x\| = \|x\|_{DD} = \sup_{\|y\|_D \le 1} \langle x, y \rangle$$

et ce problème a 1 solution

$$\partial f(x) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \partial f(x) = \operatorname{argmax}_{\|y\|_D \le 1} \langle x, y \rangle$$

Ex 6

S^n = ensemble des matrices symétriques d'ordre n

muni du p.s.

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB = \sum_i (AB)_{ii}$$

$$= \sum_{i,j} A_{ij} B_{ji}$$

$$= \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} \quad (B \in S^n)$$

$$S_+^n = \{ A \in S^n : \underbrace{A \text{ est semidefinie positive}}_{A \geq 0} \}$$

les valeurs propres de A sont ≥ 0

$\lambda_{max} : S^n \to \mathbb{R} : A \longmapsto \lambda_{max}(A)$

valeur propre maximale

1. $\boxed{\lambda_{max} \in \text{Conv}(S^n) \text{ et a une minorante affine}}$

- <u>λ_{max} est propre</u> : $\lambda_{max}(A)$ existe et $\in \mathbb{R}$

- <u>λ_{max} convexe et fermée</u>

- $$\lambda_{max}(A) = \max_{\|x\|=1} x^T A x$$

$$\lambda_{max}((1-t)A_0 + tA_1)$$

$$= \max_{\|x\|=1} (1-t) x^T A_0 x + t x^T A_1 x$$

$$\leq (1-t)\left(\max_{\|x\|=1} x^T A_0 x\right) + t \max_{\|x\|=1} (x^T A_1 x)$$

$$= (1-t)\, \lambda_{max}(A_0) + t\, \lambda_{max}(A_1)$$

- λ_{max} est continue (comme fct de A)

- autre justification λ_{max} est une enveloppe supérieure des fct linéaires (donc convexes et s.c.i)

$$A \longmapsto x^T A x$$

(2) Montrez que

$$\boxed{\lambda^*_{max}(A^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } A^* \succeq 0 \text{ et } \operatorname{tr} A^* = 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$$

Décomposition spectrale d'une matrice $A \in S^n$

$A \in S^n \Rightarrow \exists\ n$ vecteurs propres ON v_i

$Av_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in [1:n]$

$V = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\boxed{\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;} \rightarrow$ ON

$AV = V\Lambda$

$$\boxed{A = V \Lambda V^T}$$

ou $$\boxed{A = \sum_i \lambda_i v_i v_i^T}$$

- $\lambda^*_{max}(A^*) \geq 0$

$$d^*_{max}(A^*) := \sup_{A \in S^n} \langle A^*, A \rangle - d_{max}(A)$$

$$d^*_{max}(A^*) \geq \underbrace{\langle A^*, 0 \rangle}_{=0} - \underbrace{d_{max}(0)}_{=0}$$

$$= 0$$

- $d^*_{max}(A^*) = 0$ if $A^* \succeq 0$ et $\mathrm{tr}\, A^* = 1$

$$A^* = \sum \underbrace{d_i}_{\geq 0} u_i \cdot u_i^T \qquad \sum d_i = 1$$

$\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$

$$\mathrm{tr}\, A^* = \sum d_i \; \mathrm{tr}\, u_i u_i^T$$

$$= \sum d_i \; \underbrace{\mathrm{tr}\, u_i^T u_i}_{=1} = \sum d_i$$

$$\lambda^*_{\max}(A^*) = \sup_{A \in S^n} \underbrace{\operatorname{tr} \sum \lambda_i v_i v_i^T A - \lambda_{\max}(A)}_{\leq 0}$$

$$\underbrace{\underbrace{\lambda_i}_{\geq 0}}_{\substack{\| \\ 1}} \quad \underbrace{\underbrace{v_i^T A v_i}_{\leq \lambda_{\max}(A)}}$$

≤ 0

- $\lambda^*_{\max}(A^*) = +\infty$ si $A^* \not\succeq 0$

$$\lambda^*_{\max}(A^*) = \sup_{A \in S^n} \langle A^*, A \rangle - \lambda_{\max}(A)$$

$$A^* \not\succeq 0 \Rightarrow \exists v : \begin{cases} \|v\| = 1 \\ A^* v = \lambda v \\ \lambda \leq 0 \end{cases}$$

on prend $A = t\,vv^T$

$$\rightsquigarrow \lambda^*_{max}(A^*) \geq \sup_t \; t \underbrace{\langle A^*, vv^T \rangle}_{\underbrace{v^T A^* v}_{\lambda}} - \underbrace{\lambda_{max}(t\,vv^T)}_{t^+}$$

$$\geq \sup_t \underbrace{\lambda}_{<0} t - \underbrace{t^+}_{0} = +\infty$$

$t \to -\infty$