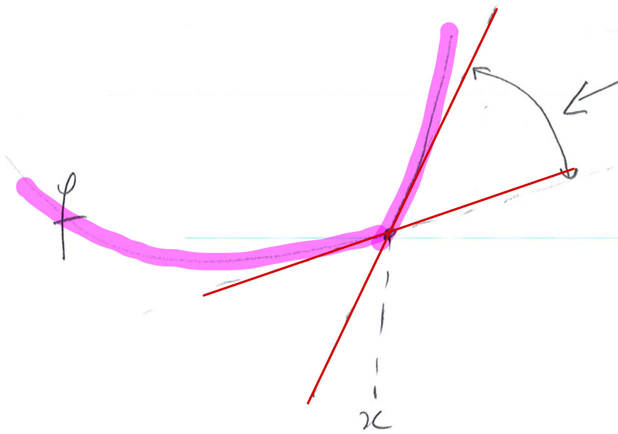
Sous-différentiabilité (§ 3.6)

1) Vue d'ensemble

— On cherche un concept de différentiabilité pour les fonctions <u>convexes</u> non différentiables au sens de Fréchet



$\partial f(x)$ = ensemble des "<u>pentes</u>" des minorantes affines de f, exactes en x

— Plusieurs manières d'arriver au même concept :

① à partir des dérivées directionnelles,

② à partir des minorantes affines (ci-dessus),

③ à partir de la conjuguée.

— But de la séance

- définir $\partial f(x)$
- donner quelques propriétés de ∂f
- donner 1 ou 2 applications

En TD

- apprendre à sous-différentier

— Le cadre est le suivant

• $\mathbb{E}$ e. euclidien, de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

(utile car $\partial f(x)$ est une généralisation du gradient pas de la dérivée $f'(x)$)

• On se donne une fonction $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E})$

c-a-d que

⊗ f est propre ($f \not\equiv +\infty$, $f > -\infty$)

⊗ f est convexe (epi f est convexe)

• $\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{E} : f(x) < +\infty\}$
qui est convexe (car f est convexe)

— La conjuguée de f est la fonction

$$f^* : \mathbb{E} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

↑ le dual de $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}$ (dim finie)

définie en $x^* \in \mathbb{E}$ (1 "pente" ou 1 forme linéaire) par

$$\boxed{f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{E}} \langle x^*, x \rangle - f(x)}$$

— Enveloppe affine de $P \subset \mathbb{E}$

$$\boxed{\mathrm{aff}\, P = \bigcap \text{ tous les sous-espaces affines contenant } P}$$

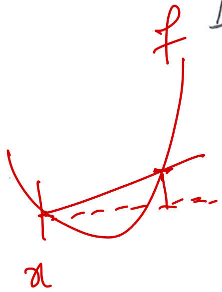
— Intérieur relatif de P

$$\boxed{\mathrm{intr}\, P = P^{\ominus} = \text{intérieur de } P \text{ dans } \mathrm{aff}\, P}$$

$$= \{x \in P : \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \cap \mathrm{aff}\, P \subset P\}$$

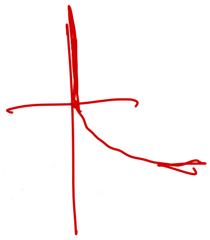
— Rappel sur les dérivées directionnelles :
1 fonction convexe a toujours des dérivées directionnelles à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

De manière plus précise (voir séance 1)



$$\boxed{f'(x;d) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}}$$

et on a (en partie dans la séance 1)



<u>si</u> • $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe
• $x \in \mathbb{E}$ tel que $f(x) \in \mathbb{R}$
• $d \in \mathbb{E}$

<u>alors</u> 1) $t \in \mathbb{R}_{++} \mapsto \dfrac{f(x+td)-f(x)}{t}$ est croissante

2) $f'(x;d)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$

3) $f'(x;d) = +\infty \iff f(x+td) \notin \operatorname{dom} f \quad \forall t>0$

4) $f'(x;d) \geq -f'(x;-d)$

5) $d \mapsto f'(x;d)$ est convexe

6) <u>si</u> $x \in (\operatorname{dom} f)^{\circ}$
<u>alors</u> $d \mapsto f'(x;d)$ est lipschitzienne
en part $f'(x;\cdot) \in \operatorname{Conv}(\mathbb{E})$

l'intérieur relatif

Dém 1-4) voir séance 1

5) Soit $\delta_x(\cdot) = f'(x;\cdot)$.

Soient d_0 et $d_1 \in \mathrm{dom}\,\delta_x$. Alors

$(x+td_i) \in \mathrm{dom}\, f$ pour $t>0$ petit (point 3)

Alors pour $\alpha \in [0,1]$, on a

$$\delta_x\big((1-\alpha)d_0 + \alpha d_1\big)$$

$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\Big[f\big(\underbrace{x + t[(1-\alpha)d_0 + \alpha d_1]}_{(1-\alpha)(x+td_0)+\alpha(x+td_1)\ \in\ \mathrm{dom}\, f \text{ pour } t>0 \text{ petit}}\big) - f(x)\Big]$$

$$\leq \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\Big[\underbrace{(1-\alpha)f(x+td_0) + \alpha f(x+td_1)}_{\text{par convexité de } f} - \underbrace{f(x)}_{=(1-\alpha)f(x)+\alpha f(x)}\Big]$$

$$= (1-\alpha)\,\delta_x(d_0) + \alpha\,\delta_x(d_1)$$

6) admis

$\square$

2) Sous-différentiel

A) Lemme fondamental

Si $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E})$, $x \in \mathrm{dom}\, f$, $x^* \in \mathbb{E}$

alors les propriétés suivantes sont équivalentes

(S_1) $\forall d \in \mathbb{E}$: $f'(x; d) \geq \langle x^*, d \rangle$

(S_2) $\forall y \in \mathbb{E}$: $f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle$

(S_3) $x \in \underset{y \in \mathbb{E}}{\arg\max}\ \langle x^*, y \rangle - f(y)$

(S_4) $f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x^*, x \rangle$

(S_5) $f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle$

donc $f^*(x^*) \in \mathbb{R}$

Dém

$(S_1) \Rightarrow (S_2)$ $\quad y \in \mathbb{E}$

$$\left. f(y) \geq f(x) + \underbrace{f'(x; y - x)}_{\underset{S_1}{\geq} \langle x^*, y - x \rangle} \right) \Rightarrow (S_2)$$

$(S_2) \Rightarrow (S_3)$ $\quad (S_2) \Rightarrow$

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle$$

$$\langle x^*, x \rangle - f(x) \geq \langle x^*, y \rangle - f(y), \quad \forall y \in \mathbb{E}$$

$(S_3) \Rightarrow (S_4)$

$$\langle x^*, x \rangle - f(x) \geq \sup_{y \in \mathbb{E}} \langle x^*, y \rangle - f(y) = f^*(x^*)$$

(S4) $\Rightarrow$ (S5) car on a $\forall y$ l'inégalité

$$f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle - f(x)$$

$$f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x\rangle$$

(S5) $\Rightarrow$ (S1) $d \in \mathbb{E}$

- si $f(x+td) = +\infty$, $\forall t > 0$

$$\Rightarrow f'(x; d) = +\infty$$

- $f(x+td) < +\infty$ pour un $t > 0$
$\forall t > 0$ petit

(S5) $\langle x^*, x\rangle - f(x) = f^*(x^*) \geq \langle x^*, y\rangle - f(y)$ $\forall y \in \mathbb{E}$

prenons $y = x + td$, $t > 0$ petit

$$\cancel{\langle x^*, x\rangle} - f(x) \geq \langle x^*, \cancel{x} + td\rangle - f(x+td)$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \quad \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \geq \langle x^*, d\rangle$$

$$\Rightarrow f'(x; d) \geq \langle x^*, d\rangle$$

$\square$

$\boxed{B}$ Définitions

— On dit que f est sous-différentiable en $x \in \mathbb{E}$

si $\begin{cases} x \in \operatorname{dom} f \text{ et} \\ \exists x^* \in \mathbb{E} \text{ vérifiant les propriétés} \\ \quad (S_1)-(S_5) \text{ du lemme fondamental} \end{cases}$

Un tel x^* est appelé un sous-gradient de f en x

— Le sous-différentiel de f en $x \in \operatorname{dom} f$ est l'ensemble formé des sous-gradients de f en x. On le note

$$\boxed{\partial f(x) \subset \mathbb{E}}$$

— Interprétation des conditions $(S_1)-(S_3)$

(S_1) x^* est la pente d'une minorante linéaire de $f'(x;\cdot)$, exacte en 0

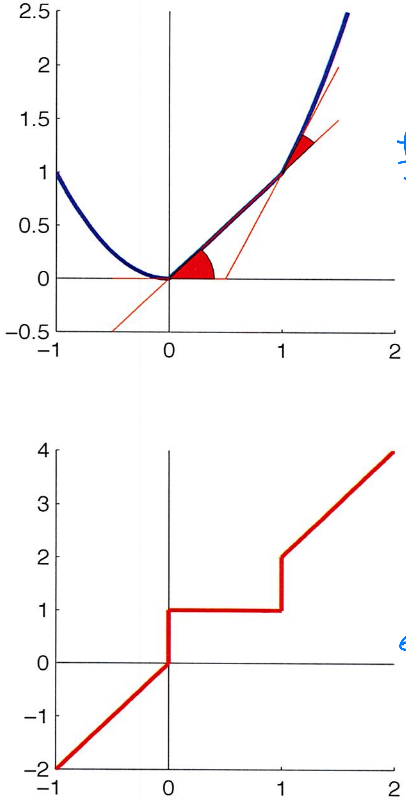
(S_2) x^* est la pente d'une minorante affine de f, exacte en x

(S_3) $x \in \underset{y \in \mathbb{E}}{\arg\max}\ \langle x^*, y\rangle - f(y)$

$\Rightarrow$ on trouve les x tels que $x^* \in \partial f(x)$ en trouvant les solutions du problème

$$\sup_{y \in \mathbb{E}} \langle x^*, y\rangle - f(y)$$

Exemple 1D



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\partial f(x) \subset \mathbb{R}$

$x \longmapsto \partial f(x)$

$\in \mathbb{E} \qquad \subset \mathbb{E}$

Figure 5: $f(x) = \max(x, x^2)$ et $\partial f(x)$ (en bas)

Exemple 2D

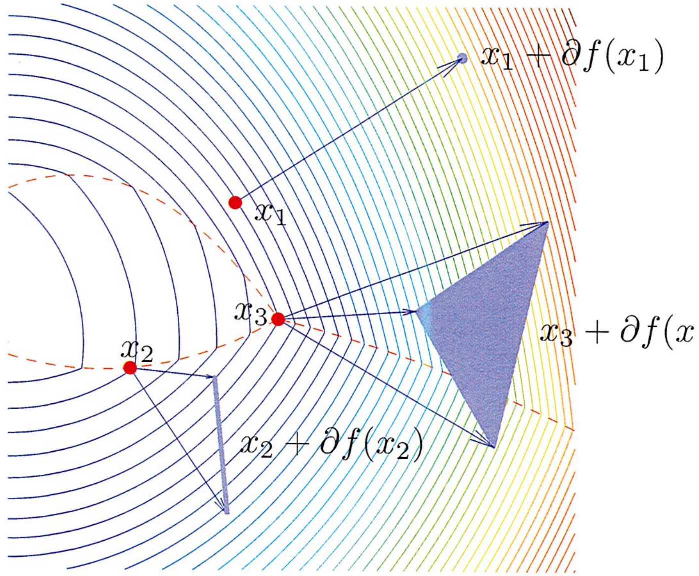
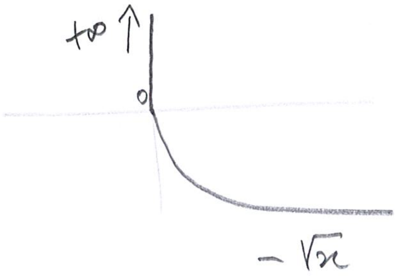


Figure 6: $f = \sup(q_1, q_2, q_3)$ et ∂f

$\boxed{C}$ Sous-différentiabilité

- c'est une notion importante !
- (S_1) montre qu'il ne faut pas que $f'(x;\cdot)$ prenne la valeur $-\infty$ (car le membre de droite est fini)

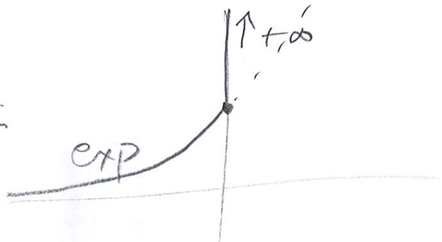
ex 1



$x \longmapsto f(x) = -\sqrt{x} + I_{\mathbb{R}_+}(x)$ n'est pas sous-différentiable en 0 car

$$f'(0;1) = -\infty$$

ex 2



$x \longmapsto f(x) = e^x + I_{\mathbb{R}_-}(x)$ est sous-différentiable en 0, bien que

$$f'(0;1) = +\infty$$

on a $\partial f(0) = [1, +\infty[$

- On montre que (admis)

Théo

> **Si** $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E})$ et $x \in \operatorname{dom} f$
> **alors** les props. suivantes sont équivalentes
> (i) $\partial f(x) \neq \emptyset$ (f est sous-diff en x)
> (ii) $\exists\, y \in (\operatorname{dom} f)^{\ominus}$ tel que $f'(x; y-x) > -\infty$
> (iii) $f'(x;\cdot)$ ne prend pas la valeur $-\infty$
> Ces propriétés sont réalisées si $x \in (\operatorname{dom} f)^{\ominus}$ (en prenant $y = x$ dans (ii))

→ donc il ne peut y avoir de difficulté que sur la frontière relative de dom f

— Pourquoi est-ce important ?

- Car "$\partial f(x) \neq \emptyset$" est un <u>résultat d'existence</u>

- exemple : si (D) est le dual de (P) et v la <u>fonction valeur</u> de (P)

  alors $\partial v(0) =$ ens. des solutions duales (§4.B)

  Donc $\partial v(0) \neq \emptyset \Rightarrow$ (D) a 1 solution

3) Propriétés

On suppose toujours que $f \in \mathrm{Conv}(E)$ et $x \in \mathrm{dom}\, f$
(donc $f(x) \in \mathbb{R}$)

$\boxed{A}$ Propriétés géométriques

$$\boxed{\partial f(x) \text{ est un convexe fermé}}$$ (éventuellement vide !)

Dém

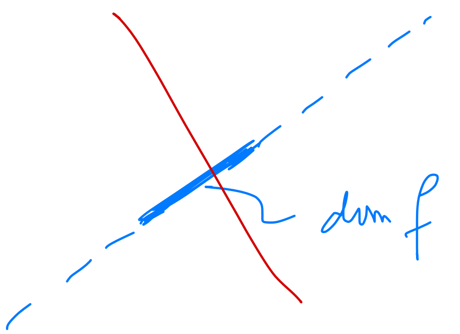
$$x^* \in \partial f(x) \overset{(SU)}{\iff} f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x^*, x \rangle$$

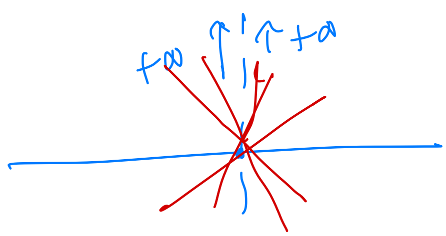
$$\iff f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle \leq -f(x)$$

$$\implies \partial f(x) = \underbrace{\{ x^* \in E : f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle \leq -f(x) \}}_{\text{c'est un convexe fermé}}$$

$x^* \longmapsto f^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle$ est dans $\mathrm{Conv}(E)$

□





$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } x \in (\mathrm{dom}\, f)^{\circ} \\ \text{alors } \partial f(x) \text{ est un convexe compact non vide} \end{array}}$$

Dém $\partial f(x)$ est un convexe fermé (ci-dessus), non vide (théo p9 et $x \in (\mathrm{dom}\, f)^{\circ}$) et borné (admis)

□

B Règle de bascule

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E}),\ x^* \in \mathbb{E} \\ \text{alors } x^* \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(x^*) \end{array}}$$

Dém

$x^* \in \partial f(x)$

$\iff f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle$ par (S_5)

$\quad \overset{\|}{f^{**}(x)}$ car $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E})$

$\iff (f^*)^*(x) + (f^*)(x^*) = \langle x^*, x \rangle$

$\iff x \in \partial f^*(x^*)$ par (S_5)

$\square$

$\boxed{C}$ Optimalité

1) $\bar{x} \in \arg\min f \iff 0 \in \partial f(\bar{x})$
2) $f \in \overline{\text{Conv}}(E) \implies \arg\min f = \partial f^*(0)$
3) $\left.\begin{array}{l} f \in \overline{\text{Conv}}(E) \\ 0 \in (\text{dom } f^*)^{\circ} \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{l}(\arg\min f) \text{ est un} \\ \text{convexe fermé \underline{non vide}}\end{array}\right.$

<u>Dém</u> 1)

$x^* \in \partial f(x)$

$\iff f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle \quad \forall y \in E$

$\implies f(y) \geq f(\bar{x}), \quad \forall y \in E$

on peut prendre $x^* = 0$

$\implies 0 \in \partial f(\bar{x})$

$\Leftarrow$ idem

2) $\bar{x} \in \arg\min f$ $\overset{(1)}{\iff} 0 \in \partial f(\bar{x}) \iff \bar{x} \in \partial f^*(0)$

$\arg\min f = \partial f^*(0)$

3) • $\arg\min f$ = ensble de sous niveau de f (convexe fermée)

= ensble convexe fermé

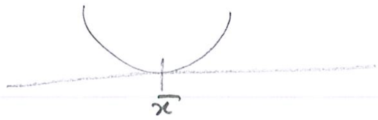
• $0 \in (\text{dom } f^*)^{\circ} \underset{\text{(théo pg 9)}}{\implies} \underbrace{\partial f^*(0)}_{= \arg\min f \text{ (point 2)}} \neq \emptyset$

$\square$

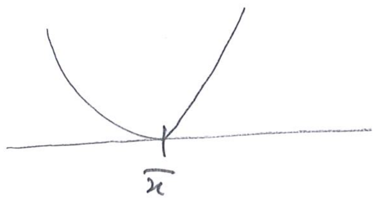
Rmq

1) le point 1 est 1 extension du cas différentiable (pour 1 fonction convexe) qui dit

$$\bar{x} \in \arg\min f \iff Df(\bar{x}) = 0$$



Ici f est non différentiable et il revient au même de dire que $\bar{x} \in \arg\min f$ et que 0 est la pente d'1 minorante affine de f exacte en $\bar{x}$



2) La condition $0 \in \partial f(\bar{x})$ se rencontre souvent pour des multifonctions $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$:

trouver x tel que $0 \in T(x)$

Par exemple pour le problème

$$\min_{x \in X} f(x)$$

$\bar{x}$ est stationnaire

$$\iff Df(\bar{x}) \in (T_{\bar{x}} X)^+ = -N_{\bar{x}} X \equiv -N_X(\bar{x})$$

$$\iff 0 \in \underbrace{Df(\bar{x}) + N_X}_{\text{une multifonction évaluée en } \bar{x}}(\bar{x})$$

$$0 \in -Df(\bar{x}) + (T_{\bar{x}} X)^+$$

$\boxed{D}$ Formule du max

Si $x \in (\operatorname{dom} f)^\circ$

alors $f'(x; d) = \max\limits_{x^* \in \partial f(x)} \langle x^*, d \rangle$

formule du max

Dém

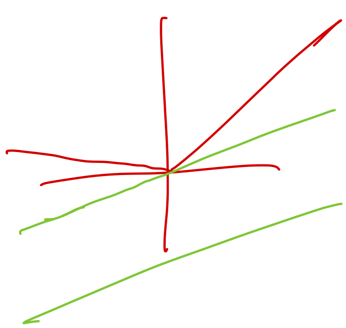
$x \in (\operatorname{dom} f)^\circ$

$\underset{(\text{prop } 3)}{\Longrightarrow} \quad f'(x; \cdot) \in \operatorname{Conv}(\mathbb{E})$

$\underset{(\text{cours préc.})}{\Longrightarrow} \quad f'(x;\cdot)$ est l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines

Montrons que $f'(x;\cdot)$ est l'enveloppe supérieure de ses minorantes linéaires

Si $\exists x^* \in \mathbb{E}, \exists \alpha \in \mathbb{R} : f'(x; d) \geq \langle x^*, d\rangle + \alpha \quad \forall d \in \mathbb{E}$



- $d \rightsquigarrow td$, $\frac{1}{t}$, $t \to \infty \Longrightarrow$
  $f'(x; d) \geq \langle x^*, d\rangle, \quad \forall d \in \mathbb{E}$

- $d = 0 \Longrightarrow \alpha \leq 0$

$\Longrightarrow f'(x; d) \geq \langle x^*, d\rangle \geq \langle x^*, d\rangle + \alpha$

$\Longrightarrow f'(x; d) = \sup\limits_{x^* \in \mathbb{E}} \langle x^*, d\rangle$

$\langle x^*, y\rangle \leq f'(x; y), \quad \forall y \in \mathbb{E}$

$\Longleftrightarrow x^* \in \partial f(x)$ par (S_i)

$= \sup\limits_{x^* \in \partial f(x)} \langle x^*, d\rangle$

$\square$

E Détection de la différentiabilité

On dit que f est Gâteaux-différentiable (G-diff.) en x si

- $f'(x;d)$ existe pour tout $d \in \mathbb{E}$
- $d \longmapsto f'(x;d)$ est linéaire

(c'est moins fort que la Fréchet-différentiabilité, en général, mais équivalent pour les fonctions convexes)

Si $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E})$, $x \in (\mathrm{dom}\, f)^\circ$

alors 1) f est G-différentiable

$$\Longleftrightarrow \quad \partial f(x) = \{D\}$$

2) dans ce cas, $\nabla f(x) = D$.

Dém 1) $\Rightarrow$ • $f'(x;d) = \langle \nabla f(x), d \rangle$, $\forall d \in \mathbb{E}$

$$\overset{(S_1)}{\Longrightarrow} \quad \nabla f(x) \in \partial f(x)$$

• si $D \in \partial f(x) \Longrightarrow$

$$\langle \nabla f(x), d\rangle = f'(x;d) \overset{(S_1)}{\geq} \langle D, d\rangle, \ \forall d \in \mathbb{E}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = D$$

$\Leftarrow$ $\quad f'(x;d) = \sup\limits_{x^* \in \partial f(x)} \langle x^*, d\rangle = \langle D, d\rangle$

$\Rightarrow f'(x;\cdot)$ est linéaire

2) On l'a fait au passage $\square$

F Règles de calcul

- Sous-différentiel d'une somme

Si
- $f_1, \dots, f_p \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E})$
- $\bigcap_{i \in [1:p]} (\mathrm{dom}\, f_i)^{\circ} \neq \emptyset$
- $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}_+$

alors $\partial \left(\sum_{i \in [1:p]} \alpha_i f_i \right)(x) = \sum_{i \in [1:p]} \alpha_i \, \partial f_i(x)$

↑ somme de fonctions ↑ somme d'ensembles

Dém

⊂ difficile, admis

⊃ Soit $x_i^* \in \partial f_i(x)$, $y \in \mathbb{E}$

$\Rightarrow f_i(y) \geq f_i(x) + \langle x_i^*, y - x \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{E}$

$\Rightarrow \left(\sum \alpha_i f_i \right)(y) \geq \left(\sum_i \alpha_i f_i \right)(x) + \langle \underbrace{\sum \alpha_i x_i^*}_{\in \partial \left(\sum \alpha_i f_i \right)(x)}, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{E}$

□

- Précomposition par une fonction affine

Si
- $a : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est affine
$$a(x) = Ax + b \quad , \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}), b \in \mathbb{F}$$
- $g \in \mathrm{Conv}(\mathbb{F})$ telle que
$$(\mathrm{dom}\, g)^{\circ} \cap R(A) \neq \emptyset$$
- $x \in \mathbb{E}$ tel que $a(x) \in \mathrm{dom}\, g$

alors $\partial (g \circ a)(x) = A^* \left(\partial g (a(x)) \right)$

Dém $\subset$ admis

$\supset$ Soit $y^* \in \partial g(a(x))$. Alors

$$g(y') \geq g(a(x)) + \langle y^*, y' - a(x) \rangle$$

Soit $x' \in \mathbb{E}$ et $y' := a(x') = Ax' + b$. On a

$$(g \circ a)(x') \geq (g \circ a)(x) + \langle A^* y^*, x' - x \rangle$$

vrai $\forall x' \in E \Rightarrow A^* y^* \in \partial (g \circ a)(x)$

$\square$

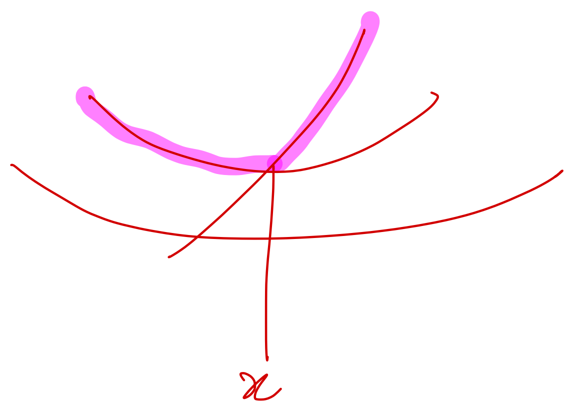
- Enveloppe supérieure

Si
- $(f_i)_{i\in I}$ famille de fonctions convexes telles que $f := \sup_{i\in I} f_i \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E})$
- $x \in \mathrm{dom}\, f$
- $I(x) = \{ i \in I : f_i(x) = f(x) \}$

alors $\boxed{\partial f(x) \supset \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{i\in I(x)} \partial f_i(x)}$

avec égalité si
- I compact
- $\forall x \in \mathrm{dom}\, f,\ i \to f_i(x)$ est s.c.s
- $x \in (\mathrm{dom}\, f)^\circ$

Dém



($\supset$) à montrer que $\partial f_i(x) \subset \partial f(x)$ pour $i\in I(x)$

$x_i^* \in \partial f_i(x)$, $\underline{i \in I(x)}$

$$f(y) \geq f_i(y) \geq \underbrace{f_i(x)}_{= f(x)} + \langle x_i^*, y - x\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{E}$$

$\Rightarrow x_i^* \in \partial f(x)$ $\square$

- **Fonction marginale**

— Soit $\varphi : \mathbb{E} \times \mathbb{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

— La fonction marginale de φ est la fonction $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ définie en $x \in \mathbb{E}$ par

$$\boxed{f(x) = \inf_{y \in \mathbb{F}} \varphi(x, y)}$$

— $\boxed{\varphi \text{ convexe} \implies f \text{ convexe}}$ (voir TD 1)

— $\boxed{\left.\begin{array}{l} \varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E} \times \mathbb{F}) \\ f > -\infty \end{array}\right) \implies f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E})}$

Dém Il reste à montrer que $f \not\equiv +\infty$

φ propre $\implies \exists (x_0, y_0) : \varphi(x_0, y_0) < +\infty$

Alors

$$f(x_0) = \inf_{y \in \mathbb{F}} \varphi(x_0, y) \leq \varphi(x_0, y_0) < +\infty$$

$\square$

— On munit $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ du produit scalaire induit par ceux de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$:

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_{\mathbb{E} \times \mathbb{F}} = \langle x, x' \rangle_{\mathbb{E}} + \langle y, y' \rangle_{\mathbb{F}}$$

Si
- $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{E} \times \mathbb{F})$
- la fonction marginale f de φ est dans $\mathrm{Conv}(\mathbb{E})$
- $x \in \mathrm{dom}\, f$ et $f(x) = \varphi(x, y_0)$ où $y_0 \in \mathbb{F}$

alors $\partial f(x) = \{ x^* \in \mathbb{E} : (x^*, 0) \in \partial \varphi(x, y_0) \}$

on suppose que l'inf $\underset{y \in \mathbb{F}}{\inf} \varphi(x,y)$ est atteint en $y_0 \in \mathbb{F}$

Dém

$x^* \in \partial f(x)$

$\Leftrightarrow f(x') \geq f(x) + \langle x^*, x' - x \rangle, \quad \forall x' \in \mathbb{E} \quad (S_2)$

$\Leftrightarrow \varphi(x', y') \geq \varphi(x, y_0) + \langle x^*, x' - x \rangle, \quad \forall (x', y') \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$

$\Rightarrow$ car $\varphi(x', y') \geq f(x')$

$\Leftarrow$ en prenant l'inf en $y' \in \mathbb{F}$ qui n'apparait qu'à gauche

$\Leftrightarrow \varphi(x', y') \geq \varphi(x, y_0) + \langle (x^*, 0), (x', y') - (x, y_0) \rangle$
$\forall (x', y') \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$

$\Leftrightarrow (x^*, 0) \in \partial \varphi(x, y_0)$ par (S_2)

$\square$