SOLUTIONS

1 Enveloppe convexe

1. Soit C un convexe. Par définition, C contient les combinaisons convexes formées à partir de deux éléments de C ($m = 2$). On raisonne ensuite par récurrence en supposant que C contient les combinaisons convexes formées de m éléments de C ($m \geqslant 2$). Alors pour une combinaison convexe de $m+1$ éléments de C, on écrit (on peut supposer que $t_1 \neq 1$, sinon le résultat est évident) :

$$\sum_{i=1}^{m+1} t_i x_i = t_1 x_1 + (1-t_1)\left(\sum_{i=2}^{m+1} \frac{t_i}{1-t_1} x_i\right).$$

   Cet élément est dans C car les facteurs de t_1 et de $1-t_1$ sont dans C (par récurrence pour le second).

   Réciproquement, si C contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments, il contient les combinaisons convexes formées de deux éléments. Donc C est convexe.

2. Il est facile de voir que l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de P est un convexe. Il contient donc $\operatorname{co} P$ qui est le plus petit convexe contenant P.

   Inversement, par la première partie, $\operatorname{co} P$ étant un convexe, il contient toutes les combinaisons convexes des éléments de $\operatorname{co} P$ donc de P.

3. Supposons que $x \in \operatorname{co} P$ s'écrive comme combinaison convexe de $m > n+1$ éléments x_i de P : $x = \sum_{i=1}^m t_i x_i$, avec $t := (t_1, \dots, t_m) \in \Delta_m$. Il suffit de montrer que l'on peut écrire x comme combinaison convexe de $m-1$ des x_i. On peut supposer que tous les $t_i > 0$ (sinon le travail est fait).

   En nombre $m > n+1$, les x_i sont affinement dépendants, si bien que l'on peut trouver $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq 0$, tel que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 0.$$

   Comme $\alpha \neq 0$, il existe un indice k tel que $\alpha_k > 0$ (cet indice k sera mieux choisi par la suite). On peut donc écrire

$$x_k = -\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq k}} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} x_i \quad \text{et} \quad x = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq k}} \left(t_i - t_k \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\right) x_i.$$

   On voit que $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m,\, i \neq k} (t_i - t_k \alpha_i/\alpha_k) = 1$, si bien que le résultat sera démontré si $t_i - t_k \alpha_i/\alpha_k \geqslant 0$ pour tout $i \neq k$. Ceci s'écrit encore (on se rappelle que $\alpha_k > 0$) :

$$\frac{\alpha_k}{t_k} \geqslant \frac{\alpha_i}{t_i}, \quad \text{pour tout } i \neq k.$$

   Cette condition spécifie comment choisir l'indice $k := \arg\max\{\alpha_i/t_i : 1 \leqslant i \leqslant m\}$, qui fournit bien un $\alpha_k > 0$.

2 Face exposée d'un convexe

1. On note $\alpha = \min\{c^\mathsf{T} x : x \in C\}$. Soient x_0 et $x_1 \in C$ tels que $x = (x_0 + x_1)/2 \in E$. Alors $c^\mathsf{T} x_i \geqslant \alpha$ (car $x_i \in C$) et $c^\mathsf{T} x_0 + c^\mathsf{T} x_1 = 2c^\mathsf{T} x = 2\alpha$ (car $x \in E$). Donc $c^\mathsf{T} x_i = \alpha$ et les $x_i \in E$.

   Le singleton $\{0\}$ de l'ensemble $\mathbb{R}^2_+ \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_{(2)} \geqslant x^2_{(1)}\}$ est une face, mais n'est pas exposé.

2. D'abord, il est clair qu'un ensemble de la forme $F = \{x \in P : (Bx - b)_I = 0\}$ est une face de P. En effet, F est convexe. D'autre part, si x_0 et $x_1 \in P$ sont tels que $x = (x_0 + x_1)/2 \in F$, alors $0 = (Bx - b)_I = \frac{1}{2}(Bx_0 - b)_I + \frac{1}{2}(Bx_1 - b)_I$. Comme $(Bx_i - b)_I \leqslant 0$, on en déduit que $(Bx_i - b)_I = 0$, c'est-à-dire $x_i \in F$.

   Montrons la réciproque. Soit F une face (non vide) de P. Pour définir I, on prend $x_0 \in F^{\circ}$ (non vide[8]) et ensuite $I = \{i : (Bx_0 - b)_i = 0\}$. Montrons que $F = \{x \in P : (Bx - b)_I = 0\}$.

   (a) Soit $x \in F$. Alors $x \in P$. Comme $x_0 \in F^{\circ}$ et $x \in F$, on a $(1-t)x_0 + tx \in F \subset P$ pour $|t|$ petit, ce qui implique que $0 \geqslant (1-t)(Bx_0 - b)_I + t(Bx - b)_I = t(Bx - b)_I$. Donc $(Bx - b)_I = 0$.

   (b) Inversement, montrons qu'un $x \in P$ vérifiant $(Bx - b)_I = 0$ est dans F. Il suffit de montrer que, pour $t < 0$ proche de zéro, $x_t := (1-t)x_0 + tx$ est dans P. D'une part $(Bx_t - b)_I = 0$. D'autre part, $(Bx_t - b)_{I^c} = (1-t)(Bx_0 - b)_{I^c} + t(Bx - b)_{I^c} \leqslant 0$, pour $t < 0$ assez proche de zéro, car $(Bx_0 - b)_{I^c} < 0$.

3. Soit $F = \{x \in P : (Bx - b)_I = 0\}$ une face de P, supposée non vide. Il faut trouver $c \in \mathbb{R}^n$ tel que $F = \arg\min\{c^\mathsf{T} x : x \in P\}$. Les conditions d'optimalité de ce problème s'écrivent en partie

$$A^\mathsf{T} y - B^\mathsf{T} s = c, \quad s \geqslant 0, \quad s^\mathsf{T}(Bx - b) = 0,$$

   ce qui donne la forme que doit avoir c. On définit $e_I \in \mathbb{R}^m$ par

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   On prend (complémentarité stricte pour la contrainte $Bx \leqslant b$)

$$s = e_I, \quad y \text{ arbitraire} \quad \text{et} \quad c = A^\mathsf{T} y - B^\mathsf{T} s.$$

   On pose (c'est la valeur du critère dual)

$$\alpha := a^\mathsf{T} y - b^\mathsf{T} s.$$

   Pour tout $x \in P$, on a $c^\mathsf{T} x \geqslant \alpha$ (on multiplie $Ax = a$ par y et $Bx \leqslant b$ par $-s$). Pour $x \in F$, on a $c^\mathsf{T} x = \alpha$. Donc $F \subset \arg\min\{c^\mathsf{T} x : x \in P\}$. Il reste à montrer que si $x \in \arg\min\{c^\mathsf{T} x' : x' \in P\}$, alors $x \in F$. Dans ce cas, on a $c^\mathsf{T} x' \geqslant c^\mathsf{T} x$, pour tout $x' \in P$, ce qui s'écrit aussi $e_I^\mathsf{T}(Bx' - Bx) \leqslant 0$, pour tout $x' \in P$. En prenant $x' \in F$, on a $e_I^\mathsf{T}(b - Bx) \leqslant 0$. En utilisant $Bx \leqslant b$ dans cette inégalité, on obtient $(Bx - b)_I = 0$.

[8] On a noté F° l'intérieur relatif de F, qui est non vide si F est non vide.

3 Fonction conjuguée d'une forme quadratique

1. On a

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in\mathbb{E}} (\langle x^*, x\rangle - f(x)) = \sup_{x\in\mathbb{E}} \left(-\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle x^* - b, x\rangle\right). \tag{12.17}$$

Comme A est inversible, le sup est atteint pour $x = A^{-1}(x^* - b)$. On trouve alors

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= -\frac{1}{2}\langle A^{-1}(x^* - b), (x^* - b)\rangle + \langle x^* - b, A^{-1}(x^* - b)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle A^{-1}(x^* - b), (x^* - b)\rangle. \end{aligned}$$

2. Supposons maintenant que A est seulement semi-définie positive. Si $x^* - b \notin \mathcal{R}(A)$, le système $Ax = x^* - b$ n'a pas de solution et le problème concave en (12.17) est non borné. Donc $f^*(x^*) = +\infty$. Si $x^* - b \in \mathcal{R}(A)$, x^* est de la forme $Ax + b$ et $f^*(x^*) = f^*(Ax + b) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$ comme ci-dessus.

4 Représentations du sous-différentiel

1. (*a*) En effet, pour $t > 0$, on a

$$f(x + tx^*) \geqslant f(x) + \langle x^*, (x + tx^*) - x\rangle = f(x) + t\|x_*\|^2 > f(x),$$

car $t > 0$ et $x^* \neq 0$.

(*b*) *Contre-exemple du livre incliné légèrement ouvert.*
On considère la fonction convexe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en $x \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x) = \max(2x_1 + x_2, -2x_1 + x_2).$$

La figure 12 représente les courbes de niveaux de f et le sous-gradient $x^* = (2, 1) \in$

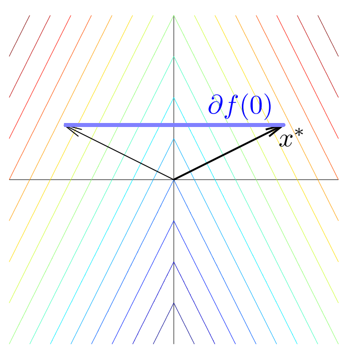


Fig. 12: Courbes de niveau de la fonction $f : x^2 \mapsto \max(2x_1 + x_2, -2x_1 + x_2)$ et son sous-différentiel en zéro. Le sous-gradient $x^* \in \partial f(0)$ est une direction de montée de f en 0, mais $-x^*$ n'est pas une direction de descente de f en 0.

$\partial f(0)$. On voit que si x^* est bien une direction de montée de f en 0, f croît aussi le long de la direction $-x^*$. Le calcul donne d'ailleurs

$$f(0 - tx^*) = -2(-tx^*)_1 + (-tx^*)_2 = -2(-2t) + (-t) = 3t > 0 = f(0).$$

2. A : S n'est pas convexe et ne peut donc pas être $x + \partial f(x)$.

   B : On peut avoir $S = x + \partial f(x)$ (par exemple le sous-différentiel de la norme ℓ_2 en zéro et la boule unité pour cette norme, ce qui ressemble à la figure B).

   Dans ce cas, $x \in x + \partial f(x)$ ou encore $0 \in \partial f(x)$, si bien que x est un minimiseur de f.

   On a même $0 \in \operatorname{int} \partial f(x)$. Dès lors, quel que soit $y \in \mathbb{R}^2$ différent de x, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon(y - x) \in \partial f(x)$. On en déduit que

$$f(y) \geqslant f(x) + \varepsilon(y-x)^{\mathsf{T}}(y-x) > f(x),$$

   si bien que x est l'unique minimiseur de f.

   C : Étant donné la forme de $\mathcal{C}$, f croît en x lorsque l'on se dirige vers le bas. De manière plus précise, supposons que $S = x + \partial f(x)$ et que $s \in \partial f(x)$. Ce s est nécessairement non nul puique $x \notin S$. Alors on peut trouver un $\alpha \in]0,1[$ tel que $x' := x + \alpha s \in \mathcal{C}$. Montrons que $f(x') \leqslant f(x)$, ce qui conduit à une contradiction puisque f croît strictement en x le long de $s \in \partial f(x) \setminus \{0\}$ (point 1.a).

   D'une part, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $x'' := x + (\alpha + \varepsilon)s$ s'écrit comme une combinaison convexe de deux points de $\mathcal{C}$, donc

$$f(x'') \leqslant f(x'). \tag{12.18}$$

   Alors, par convexité, pour $t := \varepsilon/(\alpha+\varepsilon) \in]0,1[$, on a $f(x') \leqslant (1-t)f(x'') + tf(x) \leqslant (1-t)f(x') + tf(x)$ [par (12.18)], si bien que

$$f(x') \leqslant f(x).$$

   D : S peut être $x + \partial f(x)$ (exemple dans le syllabus). Si $S = x + \partial f(x)$, x ne minimise pas f car $x \notin x + \partial f(x)$.

5 Sous-différentiel d'une norme

1. En utilisant l'inégalité triangulaire, puis l'homogénéité positive, on a pour $t \in [0,1]$:

$$\|(1-t)x + ty\| \leqslant \|(1-t)x\| + \|ty\| \leqslant (1-t)\|x\| + t\|y\|.$$

   Donc $\|\cdot\|$ est convexe. Elle est évidemment propre (elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$), fermée (une norme est continue, donc s.c.i.) et a la fonction nulle comme minorante affine.

2. L'inégalité est vérifiée si $u = 0$. Supposons à présent que $u \neq 0$.

   Si $\|u\| = 1$, on a par définition de $\|v\|_{\mathrm{D}}$: $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|v\|_{\mathrm{D}}$.

   Si u est non nul et $\|u\| \neq 1$, on a $\|(u/\|u\|)\| = 1$ et donc : $|\langle (u/\|u\|), v\rangle| \leqslant \|v\|_{\mathrm{D}}$ ou encore $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|_{\mathrm{D}}$.

3. Si $\|x^*\|_{\mathrm{D}} \leqslant 1$, on a par Cauchy-Schwarz généralisé :

$$f^*(x^*) \leqslant \sup_x \underbrace{(\|x^*\|_{\mathrm{D}} - 1)}_{\leqslant 0}\|x\| \leqslant 0.$$

   Comme d'autre part, on a toujours $f^*(x^*) \geqslant 0$ (en prenant $x = 0$ dans la définition), $f^*(x^*) = 0$.

   Si $\|x^*\|_{\mathrm{D}} > 1$, on peut trouver $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\langle x^*, x_0\rangle > 1$. Alors, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $f^*(x^*) \geqslant \langle x^*, tx_0\rangle - \|tx_0\| = t(\langle x^*, x_0\rangle - 1)$. Donc $f^*(x^*) = +\infty$.

4. En utilisant le calcul de f^*

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(x) &\iff f(x)+f^*(x^*)=\langle x^*,x\rangle \\ &\iff \|x^*\|_{\mathrm{D}} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \langle x^*,x\rangle = \|x\|. \end{aligned}$$

Cas particuliers.

(a) Évident.

(b) Si $x \neq 0$ et $x^* \in \partial f(x)$, on a $\|x\| = \langle x^*,x\rangle \leqslant \|x^*\|_{\mathrm{D}}\|x\|$; donc $\|x^*\|_{\mathrm{D}} = 1$.

(c) • Pour $\|\cdot\|_1$, la formule (12.2) permet d'écrire

$$\begin{aligned} x^* \in \partial(\|\cdot\|_1)(x) &\iff x^* \in \bar{B}_\infty \quad \text{et} \quad \textstyle\sum_{i\in[1:n]} x_i^* x_i = \sum_{i\in[1:n]} |x_i| \\ &\iff x^* \in \bar{B}_\infty \quad \text{et} \quad \textstyle\sum_{i\in[1:n]} (x_i^* \operatorname{sgn}(x_i) - 1)|x_i| = 0 \\ &\iff x^* \in \bar{B}_\infty \quad \text{et} \quad x_i^* = \operatorname{sgn}(x_i),\ \forall i :\ x_i \neq 0, \end{aligned}$$

où la dernière équivalence vient du fait que $x_i^* \operatorname{sgn}(x_i) \leqslant 1$ pour tout $i \in [1:n]$. La formule reste valable si $x = 0$.

• La norme $\|\cdot\|_p$ est différentiable en $x \neq 0$ et son gradient est donné par la formule (12.4).

• Pour $\|\cdot\|_\infty$, la formule (12.2) permet d'écrire

$$x^* \in \partial(\|\cdot\|_\infty)(x) \iff x^* \in \bar{B}_1 \quad \text{et} \quad \sum_{i\in[1:n]} x_i^* x_i = \max_{i\in[1:n]} |x_i|. \tag{12.19}$$

Donc si $x^* \in \partial(\|\cdot\|_\infty)(x)$, le côté droit de l'équivalence montre que

$$\max_{i\in[1:n]} |x_i| = \sum_{i\in[1:n]} x_i^* x_i \leqslant \sum_{i\in[1:n]} |x_i^*|\,|x_i| \leqslant \max_{i\in[1:n]} |x_i|, \tag{12.20}$$

où la dernière inégalité vient de ce que $x^* \in \bar{B}_1$. On a donc égalité partout dans (12.20). Alors $\sum_{i\in[1:n]} |x_i^*|\,|x_i| = \|x\|_\infty$ et $|x^*| \in \Delta_n$ (le simplexe unité de $\mathbb{R}^n$) impliquent que $x_i^* = 0$ si $|x_i| < \|x\|_\infty$ et $|x_i^*| = 1$ si $|x_i| = \|x\|_\infty$ (c'est-à-dire $i \in I$). Alors la première égalité dans (12.20) montre que $\operatorname{sgn}(x_i^*) = \operatorname{sgn}(x_i)$ pour $i \in I$ et que $\sum_{i\in I} |x_i^*| = 1$. On a montré que $x^* \in \operatorname{co}\{\operatorname{sgn}(x_i)e^i : i \in I\}$.

Réciproquement, si $x^* \in \operatorname{co}\{\operatorname{sgn}(x_i)e^i : i \in I\}$, les conditions du côté droit de l'équivalence (12.19) sont vérifiées et donc $x^* \in \partial(\|\cdot\|_\infty)(x)$.

5. (a) Comme $f \in \overline{\text{Conv}}(\mathbb{E})$, on a $f = f^{**}$. Il suffit alors de montrer que $f^{**}(\cdot) = \|\cdot\|_{\mathrm{DD}}$. On a vu que $f^* = \mathcal{I}_{\bar{B}_D}$. Alors

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \sup_{x^*\in\mathbb{E}} \langle x^*,x\rangle - f^*(x^*) \\ &= \sup_{x^*\in\mathbb{E}} \langle x^*,x\rangle - \mathcal{I}_{\bar{B}_D}(x^*) \\ &= \sup_{\|x^*\|_{\mathrm{D}}\leqslant 1} \langle x^*,x\rangle \\ &= \|x\|_{\mathrm{DD}}. \end{aligned}$$

(b) Pour la première affirmation, on utilise le fait que le problème (12.1) a une solution y (maximisation d'une fonction continue sur un compact) et ce y peut-être pris sur la frontière de l'ensemble admissible (c'est-à-dire de norme un).

Pour la deuxième affirmation, on utilise le fait que le problème (12.6) a une solution (maximisation d'une fonction continue sur un compact) et ce y peut-être pris sur la frontière de l'ensemble admissible (c'est-à-dire de norme duale un). De plus $\|x\|_{\mathrm{DD}} = \|x\|$.

(c) Par la seconde affirmation du point (b) et l'expression de $\partial f(x)$, on voit que $\partial f(x) \neq \varnothing$ (ce fait peut aussi se déduire du fait qu'une fonction convexe et propre est sous-différentiable en tout point dans l'intérieur relatif de son domaine, qui est ici $\mathbb{E}$ tout entier).

L'expression de $\partial f(x)$ s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}
&x^* \in \operatorname*{arg\,max}_{s \in \bar{B}_D} \langle s, x\rangle \\
&\quad\iff \|x^*\|_{\mathrm{D}} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \langle x^*, x\rangle = \|x\|_{\mathrm{DD}} \qquad [\text{définition de l'arg max}] \\
&\quad\iff \|x^*\|_{\mathrm{D}} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \langle x^*, x\rangle = \|x\| \qquad [\text{point 5.(a)}] \\
&\quad\iff x^* \in \partial f(x) \qquad [\text{point 4}].
\end{aligned}$$

Une autre manière d'arriver au même résultat est de noter que

$$\begin{aligned}
&x^* \in \partial f(x) \\
&\quad\iff x \in \partial f^*(x^*) \qquad [\text{règle de bascule}] \\
&\quad\iff x^* \in \operatorname*{arg\,max}_{y \in \mathbb{E}} \langle y, x\rangle - f^*(y) \\
&\quad\iff x^* \in \operatorname*{arg\,max}_{\|y\|_{\mathrm{D}} \leqslant 1} \langle y, x\rangle \qquad [f^* = \mathcal{I}_{\bar{B}_{\mathrm{D}}}].
\end{aligned}$$

6 Sous-différentiel de la valeur propre maximale

1. On a
$$\lambda_{\max}(A) = \sup_{\|x\|=1} x^{\mathsf{T}} A x.$$

Comme enveloppe supérieure de fonctions linéaires (de A), $\lambda_{\max} : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ est convexe et fermée.

Quel que soit $A \in \mathcal{S}^n$, $\lambda_{\max}(A) \in \mathbb{R}$; donc l'application est propre.

Quel que soit x de norme 1, $A \mapsto x^{\mathsf{T}} A x$ est une minorante linéaire de $\lambda_{\max}$.

2. Par définition
$$\lambda^*_{\max}(A^*) = \sup_{A \in \mathcal{S}^n} (\langle A^*, A\rangle - \lambda_{\max}(A)).$$

- En prenant $A = 0$, on voit que $\lambda^*_{\max}(A^*) \geqslant 0$.
- Si $A^* \in \mathcal{S}^n_+$ et $\operatorname{tr} A^* = 1$, A^* est de la forme $\sum_i \lambda_i v_i v_i^{\mathsf{T}}$, où les valeurs propres $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$ et les vecteurs propres sont pris unitaires : $\|v_i\|_2 = 1$. Alors $\operatorname{tr} A^* A = \sum_i \lambda_i v_i^{\mathsf{T}} A v_i \leqslant \lambda_{\max}(A)$; dans ce cas $\lambda^*_{\max}(A^*) = 0$.
- Si $\operatorname{tr} A^* \neq 1$, en prenant $A = \alpha I$ dans la définition de $\lambda^*_{\max}(A^*)$, on trouve que $\lambda^*_{\max}(A^*) \geqslant \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha(\operatorname{tr} A^* - 1) = +\infty$.

- Si $A^* \notin \mathcal{S}_+^n$, A^* a une valeur propre $\lambda < 0$ et un vecteur propre associé v de norme 1; en prenant $A = \alpha v v^\mathsf{T}$, on trouve que $\lambda_{\max}^*(A^*) \geqslant \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}(\alpha\lambda - \alpha^+) = \sup_{\alpha<0} \alpha\lambda = +\infty$.

3. (a) En utilisant le point 2

$$\begin{aligned} A^* \in \partial\lambda_{\max}(A) &\iff \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}^*(A^*) = \langle A^*, A\rangle \\ &\iff A^* \in \mathcal{S}_+^n, \quad \operatorname{tr} A^* = 1 \quad \text{et} \quad \langle A^*, A\rangle = \lambda_{\max}(A). \end{aligned}$$

On a donc montré

$$\partial\lambda_{\max}(A) = \{A^* \in \mathcal{S}_+^n : \operatorname{tr} A^* = 1,\ \operatorname{tr} A^* A = \lambda_{\max}(A)\}.$$

- Soit $A^* \in \partial\lambda_{\max}(A)$. Avec la décomposition spectrale $A^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^\mathsf{T}$ (des v_i de norme 1), on doit avoir $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$ et $\operatorname{tr} A^* A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^\mathsf{T} A v_i = \lambda_{\max}(A)$. Ceci implique que $\lambda_i = 0$ si $v_i^\mathsf{T} A v_i < \lambda_{\max}(A)$, c'est-à-dire si v_i n'est pas un vecteur propre associé à $\lambda_{\max}(A)$. Dès lors $\partial\lambda_{\max}(A) \subset \operatorname{co}\{vv^\mathsf{T} : \|v\|_2 = 1,\ Av = \lambda_{\max}(A)v\}$.
- Réciproquement, si $A^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^\mathsf{T}$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$ et les v_i vecteurs propres unitaires de A associés à $\lambda_{\max}(A)$, on a $A^* \in \mathcal{S}_+^n$, $\operatorname{tr} A^* = 1$, $\operatorname{tr} A^* A = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i^\mathsf{T} A v_i = \lambda_{\max}(A)$. Donc $A^* \in \partial\lambda_{\max}(A)$.

(b) $\lambda_{\max}(\cdot)$ est différentiable en A si, et seulement si, $\partial\lambda_{\max}(A)$ est un singleton, c'est-à-dire si, et seulement si, $\partial\lambda_{\max}(A)$ est le singleton $\{vv^\mathsf{T}\}$, où $\pm v$ sont les uniques vecteurs propres unitaires maximaux, c'est-à-dire si, et seulement si, $\lambda_{\max}(A)$ est simple.

(c) Pour utiliser le théorème des fonctions implicites, on introduit l'application $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par

$$F(v, \lambda, A) = \begin{pmatrix} Av - \lambda v \\ \|v\|_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Les couples propres unitaires (v, λ) de A sont ceux vérifiant $F(v, \lambda, A) = 0$ et cette équation définit implicitement la dépendance de (v, λ) par rapport à A. Pour que (v, λ) puisse s'exprimer comme une fonction de A dans le voisinage d'un triplet (v_1, λ_1, A_1) vérifiant $F(v_1, \lambda_1, A_1) = 0$, il suffit de montrer l'inversibilité de $F'_{(v,\lambda)}(v_1, \lambda_1, A_1)$. On suppose que λ_1 est la plus grande valeur propre de A_1 et qu'elle est simple. Si $F'_{(v,\lambda)}(v_1, \lambda_1, A_1) \cdot (w, \mu) = 0$, on a

$$\begin{aligned} A_1 w - \lambda_1 w - \mu v_1 &= 0 \\ v_1^\mathsf{T} w &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant scalairement la première équation par $v_1 \neq 0$ et en utilisant $A_1 v_1 = \lambda_1 v_1$, on trouve $\mu = 0$. Alors la première équation et l'unicité du vecteur propre associé à λ_1, montre que w est parallèle à v_1. La seconde équation donne alors $w = 0$. Le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'une fonction implicite $A \mapsto (v(A), \lambda(A))$ telle que $F(v(A), \lambda(A), A) = 0$ pour tout matrice $A \in \mathcal{S}^n$ voisine de A_1. Si on note $\dot{v}_1 := v'(A_1) \cdot B$ et $\dot{\lambda}_1 := \lambda'(A_1) \cdot B$, on a $F'_v(v_1, \lambda_1, A_1) \cdot \dot{v}_1 + F'_\lambda(v_1, \lambda_1, A_1) \cdot \dot{\lambda}_1 + F'_A(v_1, \lambda_1, A_1) \cdot B = 0$ ou encore

$$\begin{aligned} A_1 \dot{v}_1 - \lambda_1 \dot{v}_1 - \dot{\lambda}_1 v_1 + B v_1 &= 0 \\ v_1^\mathsf{T} \dot{v}_1 &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant la première équation par v_1, on trouve $\dot{\lambda}_1 = v_1^{\mathsf{T}} B v_1 = \operatorname{tr} v_1 v_1^{\mathsf{T}} B = \langle v_1 v_1^{\mathsf{T}}, B\rangle$. Donc $\nabla \lambda_1(A_1) = v_1 v_1^{\mathsf{T}}$.

7 Sous-différentiel de la distance à un ensemble

1. Soit $x^* \in \mathbb{E}$. On a successivement

$$\begin{aligned}
d_C^*(x^*) &= \sup_{x\in\mathbb{E}} \Big(\langle x^*, x\rangle - d_C(x)\Big) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{E}} \sup_{y\in C} \Big(\langle x^*, x\rangle - \|x-y\|\Big) \\
&= \sup_{y\in C} \sup_{x\in\mathbb{E}} \Big(\langle x^*, x-y\rangle - \|x-y\| + \langle x^*, y\rangle\Big) \\
&= \sup_{y\in C} \left(\sup_{x\in\mathbb{E}} \Big(\langle x^*, x\rangle - \|x\|\Big) + \langle x^*, y\rangle\right) \\
&= \sup_{y\in C} \Big(\mathcal{I}_{B_D}(x^*) + \langle x^*, y\rangle\Big) \\
&= \mathcal{I}_{B_D}(x^*) + \sigma_C(x^*).
\end{aligned}$$

2. On a successivement

$$\begin{aligned}
x^* \in \partial d_C(x) &\iff d_C^*(x^*) + d_C(x) = \langle x^*, x\rangle \\
&\iff x^* \in B_D \quad \text{et} \quad \sigma_C(x^*) + \|x-\bar{x}\| = \langle x^*, x\rangle \\
&\iff x^* \in B_D \quad \text{et} \\
&\qquad \sup_{y\in C} \langle x^*, y-\bar{x}\rangle = \langle x^*, x-\bar{x}\rangle - \|x-\bar{x}\|. \qquad (12.21)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée dans (12.21) et le fait que $x^* \in B_D$, on voit que $\langle x^*, y-\bar{x}\rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in C$, c'est-à-dire que $x^* \in N_C(\bar{x})$. Alors $\sup_{y\in C} \langle x^*, y-\bar{x}\rangle = 0$ (en prenant $y = \bar{x}$) et $\langle x^*, x-\bar{x}\rangle = \|x-\bar{x}\|$ par (12.21). Réciproquement, $x^* \in N_C(\bar{x})$ et $\langle x^*, x-\bar{x}\rangle = \|x-\bar{x}\|$ impliquent directement (12.21).

3. On peut écrire la distance comme une fonction marginale :

$$d_C(x) = \inf_{y\in\mathbb{E}} \varphi(x,y), \quad \text{où} \quad \varphi(x,y) = \|x-y\| + \mathcal{I}_C(y).$$

Dès lors

$$\begin{aligned}
x^* \in \partial d_C(x) &\iff (x^*, 0) \in \partial\varphi(x,\bar{x}) \quad \text{(voir le syllabus)} \\
&\iff \varphi(x',y') \geqslant \varphi(x,\bar{x}) + \langle x^*, x'-x\rangle, \quad \forall (x',y') \in \mathbb{E}\times\mathbb{E} \\
&\iff \|x'-y'\| \geqslant \|x-\bar{x}\| + \langle x^*, x'-x\rangle, \quad \forall (x',y') \in \mathbb{E}\times C.
\end{aligned}$$

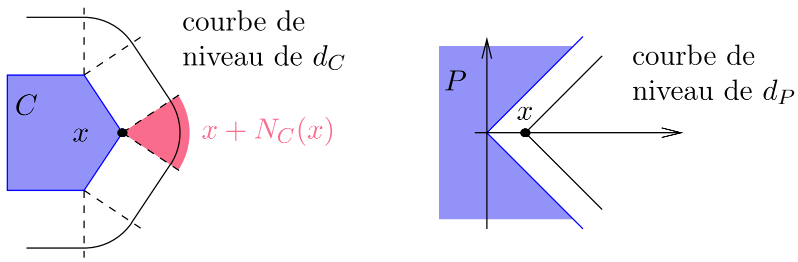
Il faut maintenant montrer que x^* vérifie

$$\|x'-y'\| \geqslant \|x-\bar{x}\| + \langle x^*, x'-x\rangle, \quad \forall (x',y') \in \mathbb{E}\times C \qquad (12.22)$$

si, et seulement si, x^* vérifie

$$x^* \in B_D \cap N_C(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \langle x^*, x-\bar{x}\rangle = \|x-\bar{x}\|. \qquad (12.23)$$

Cette équivalence aurait sans doute été difficile à trouver si l'on n'avait pas déjà calculé $\partial f(x)$ en se servant de la conjuguée f^*.



[htbp]

Fig. 13: Différentiabilité de d_C et non-différentiabilité de d_P

- Supposons que x^* vérifie (12.22).
  - En prenant $x' = x + v$, avec v arbitraire dans $\mathbb{E}$, et $y' = \bar{x} \in C$, on trouve que $\langle x^*, v\rangle \leqslant \|v\|$, donc $x^* \in B_D$.
  - En prenant z quelconque dans C, $x' = x - \bar{x} + z$ et $y' = z \in C$, on trouve que $\langle x^*, z - \bar{x}\rangle \leqslant 0$ donc $x^* \in N_C(\bar{x})$.
  - En prenant $x' = y' = \bar{x} \in C$, on trouve que $\|x - \bar{x}\| \leqslant \langle x^*, x - \bar{x}\rangle$. En prenant $x' = 2x - \bar{x}$ et $y' = \bar{x} \in C$, on trouve que $\|x - \bar{x}\| \geqslant \langle x^*, x - \bar{x}\rangle$. Dès lors $\|x - \bar{x}\| = \langle x^*, x - \bar{x}\rangle$.

  On a montré que x^* vérifie (12.23).
- Supposons que x^* vérifie (12.23). Soit $(x', y') \in \mathbb{E} \times C$. Alors

$$\begin{aligned}
\underbrace{\|x - \bar{x}\|}_{=\langle x^*, x - \bar{x}\rangle} + \langle x^*, x' - x\rangle &= \langle x^*, x' - \bar{x}\rangle \\
&= \langle x^*, x' - y'\rangle + \underbrace{\langle x^*, y' - \bar{x}\rangle}_{\leqslant 0} \\
&\leqslant \underbrace{\|x^*\|_{\mathrm{D}}}_{\leqslant 1} \|x' - y'\| \\
&\leqslant \|x' - y'\|.
\end{aligned}$$

4. On a $\|y\|_{\mathrm{D}} = \sup\{\langle y, x\rangle \colon \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \|y\|$ par Cauchy-Schwarz. Par ailleurs $\|y\|_{\mathrm{D}} = \sup\{\langle y, x\rangle \colon \|x\| \leqslant 1\} \geqslant \|y\|$ en prenant $x = y/\|y\|$ (le cas où $y = 0$ est trivial).

5. Soit $x^* \in \partial d_C(x)$.

   (a) Si $x \notin C$, $x \neq \bar{x}$. Alors $\langle x^*, x - \bar{x}\rangle = \|x - \bar{x}\|$ et $x^* \in B$ impliquent que $\|x^*\| = 1$ et $x^* \parallel (x - \bar{x})$ (Cauchy-Schwarz), c'est-à-dire $x^* = (x - \bar{x})/\|x - \bar{x}\|$. Le sous-différentiel étant réduit à ce seul point x^*, d_C est différentiable (voir la figure 13, tracé de gauche).

   (b) Si $x \in C^\circ$, alors $\bar{x} = x$, $N_C(\bar{x}) = \{0\}$ et on voit que $\partial d_C(x) = \{0\}$. Donc d_C est différentiable en x avec un gradient nul.

   (c) Si $x \in C \backslash C^\circ$, alors $\bar{x} = x$ et $\partial d_C(x) = B \cap N_C(x)$.

6. On prend par exemple $P := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \geqslant x_1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \leqslant -x_1\}$, qui n'est pas convexe, et $x = (1, 0) \notin P$. Pour $t \in [0, 1]$, on a $d_P(x + te^2) = d_P(x - te^2) = (1 - t)/\sqrt{2}$, si bien que

$$d'_P(x; e^2) = d'_P(x; -e^2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dès lors d_P n'est pas différentiable en x (voir la figure 13, tracé de droite).

7. (a) Supposons que $x \in P$. Alors $d_P(x) = 0$ et, comme d_P est différentiable en x, on a pour tout $h \in \mathbb{E}$:
$$d'_P(x) \cdot h = \lim_{t \downarrow 0} \frac{d_P(x+th)}{t} \geqslant 0.$$
Dès lors $d'_P(x) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

   (b) Comme d_P est non expansive,
$$d'_P(x) \cdot h = \lim_{t \downarrow 0} \frac{d_P(x+th) - d_P(x)}{t} \leqslant \|h\|,$$
si bien que $\|\nabla d_P(x)\| \leqslant 1$.

   (c) Il s'agit de la minimisation sur un fermé non vide, d'une fonction continue tendant vers l'infini à l'infini.

   (d) Montrons d'abord que pour $t \in [0,1]$, $\bar{x}$ est aussi une projection de $x_t := x + t(\bar{x} - x)$. En effet, s'il existait un point $\bar{x}_t \in P$ tel que $\|x_t - \bar{x}_t\| < \|x_t - \bar{x}\|$, on aurait $\|x - \bar{x}_t\| \leqslant \|x - x_t\| + \|x_t - \bar{x}_t\| < t\|x - \bar{x}\| + (1-t)\|x - \bar{x}\| = \|x - \bar{x}\|$, ce qui contredirait le fait que $\bar{x}$ est une projection de x sur P.
Par ailleurs, on a
$$\begin{aligned} d'_P(x) \cdot (\bar{x} - x) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{d_P(x_t) - d_P(x)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{(1-t)\|\bar{x} - x\| - \|\bar{x} - x\|}{t} \\ &= -\|\bar{x} - x\|. \end{aligned}$$
Par Cauchy-Schwarz et ce qui précède, on trouve que
$$\|\bar{x} - x\| = \langle -\nabla d_P(x), \bar{x} - x \rangle \leqslant \|\nabla d_P(x)\| \, \|\bar{x} - x\| \leqslant \|\bar{x} - x\|.$$
On a donc égalité partout, ce qui implique que $\nabla d_P(x)$ est parallèle à $\bar{x} - x$ et de norme 1. On en déduit le résultat.

   (e) La formule $\nabla d_P(x) = (x - \bar{x})/\|x - \bar{x}\|$ implique que $\bar{x}$ est déterminé de manière unique.

8 Sous-différentiel de la fonction duale d'un problème d'optimisation quadratique convexe

1. On se rappelle qu'un problème quadratique est borné si, et seulement si, il a une solution (Frank et Wolfe). Alors $\lambda \in \operatorname{dom} \delta$ si, et seulement si, le problème quadratique dans (12.8) a une solution ou encore si, et seulement si, il existe un x tel que $\nabla q(x) + A^\mathsf{T} \lambda = 0$ ou $Hx + g + A^\mathsf{T} \lambda = 0$, ce qui conduit à (12.9).

2. Soit $\lambda \in \operatorname{dom} \delta$. Par le point précédent, il existe un x tel que $Hx = -(g + A^\mathsf{T} \lambda)$. Ces x sont solutions du problème quadratique dans (12.8). En particulier, il en est ainsi de la solution de norme minimale, à savoir $x_\lambda := -H^\dagger(g + A^\mathsf{T} \lambda)$. Alors $\delta(\lambda) = -[q(x_\lambda) + \lambda^\mathsf{T}(Ax_\lambda - b)]$, ce qui conduit à la formle (12.10).

3. On sait que $\lambda^* \in \partial\delta(\lambda)$ si, et seulement si, λ minimise $\mu \mapsto \delta(\mu) - (\lambda^*)^\mathsf{T}\mu$ sur $\operatorname{dom}\delta$, ce qui conduit à (12.11).

   Le problème d'optimisation convexe (12.11) a des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, qui s'écrivent : il existe un $z \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} S\lambda + v + b - \lambda^* + Az = 0 \\ Hz = 0 \\ A^\mathsf{T}\lambda + g \in \mathcal{R}(H). \end{cases}$$

   On en déduit (12.12).

9 Mécaniques lagrangienne et hamiltonienne sur un espace vectoriel

1. C'est évident :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = m\ddot{q}$$

   et

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\nabla V(q) = F(q).$$

2. On a

$$H(p,q) = \sup_{\dot{q}\in\mathbb{R}^n}\Big(p^\mathsf{T}\dot{q} - \frac{m}{2}\|\dot{q}\|_2^2 + V(q)\Big).$$

   Le maximum ci-dessus est obtenu pour $\dot{q} = p/m$, si bien que

$$H(p,q) = \frac{1}{2m}\|p\|_2^2 + V(q).$$

   Les équations d'Hamilton (12.15) s'écrivent alors

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad \text{et} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\nabla V(q) = F(q).$$

   On en déduit l'équation de Newton $F(q) = m\ddot{q}$.

3. Si $\dot{q}$ est solution du problème de maximisation en (12.14) et si L est différentiable par rapport à son second argument, on a

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q},t). \tag{12.24}$$

   L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit alors

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q},t). \tag{12.25}$$

4. Avec $\dot{q}$ solution du problème de maximisation en (12.14), l'hamiltonien s'écrit

$$H(p,q,t) = p^\mathsf{T}\dot{q} - L(q,\dot{q},t).$$

   Ce $\dot{q}$, donné par (12.24), est fonction de p et de q. En dérivant la formule ci-dessus, on a alors, pour $i = 1,\ldots,n$:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i,$$

grâce à (12.24). De même, pour $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

grâce à (12.24) et (12.25).

Pour en savoir davantage, on pourra consulter [1, 3, 4, 2, 5].

Bibliographie

[1] V.I. Arnold (1989). *Mathematical Methods in Classical Mechanics* (seconde édition). Graduate Texts in Mathematics 60. Springer-Verlag. [doi].

[2] V.I. Arnold, V.V. Kozlov, A.I. Neishtadt (2006). Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics (troisième édition). In *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Tome 3. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[3] J.E. Marsden, T.S. Ratiu (1999). *Introduction to Mechanics and Symmetry* (seconde édition). Springer-Verlag, New York. [doi].

[4] J. Meiss (2007). Hamiltonian systems. Scholarpedia, 2(8):1943.

[5] D. Sorokin (2010). Lagrangian formalism for fields. Scholarpedia, 5(8):10223.