Séance 3 : Recherche linéaire

(globalisation de l'algorithme de Newton)

Séance 1 : oracle

Séance 2 : méthode de Newton

$$\begin{cases} \min f(x) \\ c(x) = 0 \end{cases} \quad \underset{\text{Lagrange}}{\leadsto} \quad \begin{cases} \nabla_x l(x, \lambda) = 0 \\ c(x) = 0 \end{cases}$$

$$l(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x)$$

$$F(z) = 0 \qquad z \in \mathbb{R}^{n+m} \qquad z = (x, \lambda)$$

Newton : $z_{k+1} = z_k + d_k$

$$d_k = - F'(z_k)^{-1} F(z_k)$$

TB si

- $F$ est suffisament lisse $(C^1, C^{1,1})$
- $z_*$ est un zéro régulier $(F'(z_*)$ inversible$)$
- $z_1$ proche de $z_*$

pas bien : on trouve des points stationnaires

## Fonction de mérite

1) $F(z) = 0 \longrightarrow \min_{z \in \mathbb{R}^N} \left( \varphi(z) := \frac{1}{2} \| F(z) \|^2 \right)$

## 2) RL sur $\varphi$

- on est sûr que la direction de Newton sur $F$, $p$ est une direction de descente de $\varphi$ en $z$ :

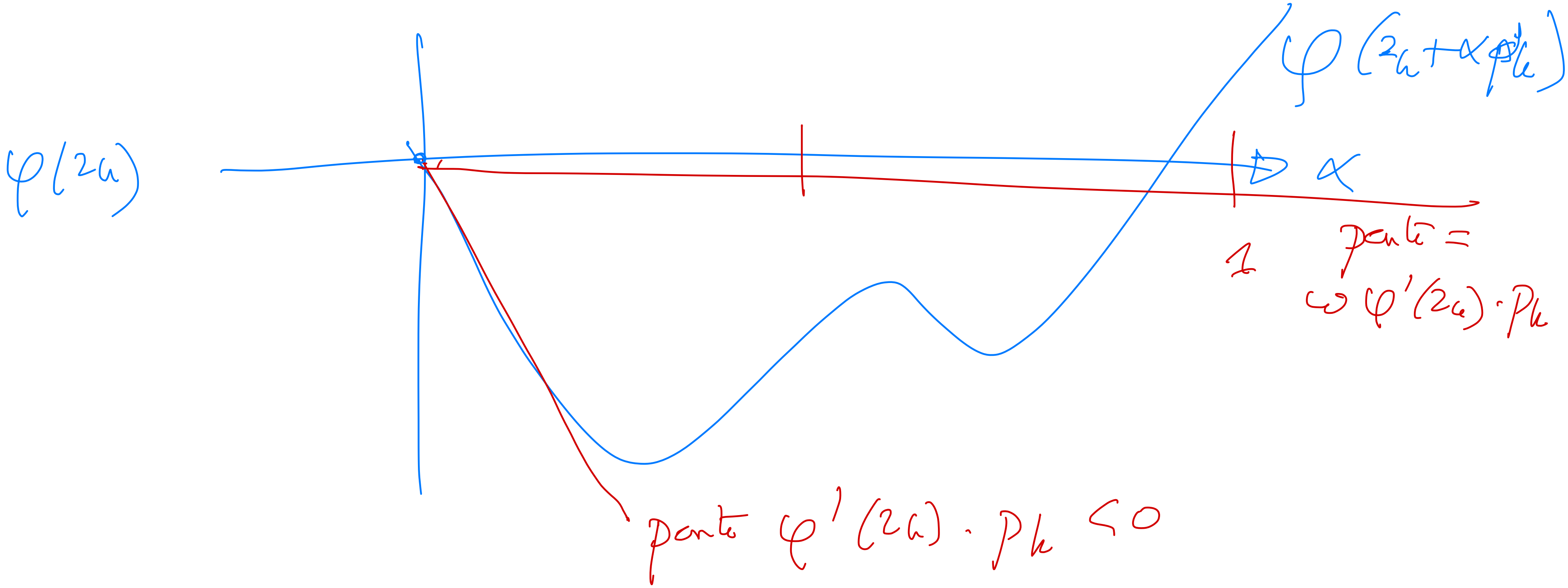
$$\varphi'(z) \cdot p < 0 \qquad (\text{si } \nabla \varphi(z) \neq 0)$$

- RL : $z_{k+1} = z_k + \alpha_k p_k \qquad \alpha_k > 0$

$\alpha_k$ = pas = $\alpha_k = 2^{-i_k}$ où $i_k$ est le premier entier tel que

$$\varphi(z_k + \alpha_k p_k) \leq \varphi(z_k) + \omega \alpha_k \underbrace{\varphi'(z_k) \cdot p_k}_{< 0}$$

$\omega = 10^{-4}$



$\varphi(x_k)$
$\varphi(x_k+\alpha p_k)$
$\alpha$
$1$
pente $= \omega\,\varphi'(x_k)\cdot p_k$
pente $\varphi'(x_k)\cdot p_k < 0$

# Rmq sur les rajouts et cordes

## 1) Detection min / max / point stationnaire

$x_*$ min local $\Longrightarrow$ CN2

$x_*$ min local strict $\Longleftarrow$ CS2

- CN2 servent à dire que l'on n'a pas de min local
- CS2 <u>            </u> a un min local strict

- $\boxed{\min f(x)}$

$x_*$ min local $\Longrightarrow \begin{cases} \nabla f(x_*) = 0 \\ \nabla^2 f(x_*) \succcurlyeq 0 \end{cases}$

$x_*$ min local strict $\Longleftarrow \begin{cases} \nabla f(x_*) = 0 \\ \nabla^2 f(x_*) \succ 0 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} \min f(x) \\ c(x) = 0 \end{cases}}$$

$X = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0\}$

$x_*$ min local $\Rightarrow$ $\begin{cases} \nabla_x \ell(x_*, \lambda_*) = 0 \\ \nabla^2_{xx} \ell(x_*, \lambda_*) \text{ cu } \succeq 0 \\ \text{doar } T_{x_*} X \end{cases}$

$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$\parallel$

$N(c'(x_*))$ și proliferatii

$x_*$ min local strict $\Leftarrow$ $\begin{cases} \nabla_x \ell(x_*, \lambda_*) = 0 \\ \nabla^2_{xx} \ell(x_*, \lambda_*) \text{ cu } \succ 0 \\ \text{doar } T_{x_*} X \end{cases}$

$$\begin{cases} \min -x^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Dire $D^2_{xx}\,\ell(x_*, \lambda_*)$ est $< 0$ dans $T_{x_*}X$

et $D_x\,\ell(x_*, \lambda_*) = 0$

$\Rightarrow$ $x_*$ est max local strict

c'est vrai mais ça demande 1 justification

Calcul d'un $\lambda_1$

$$\nabla f(x_1) + c'(x_1)^T \lambda_1 = 0$$

$$c'(x)^{-1}$$

$$-\left(c'(x)\,c'(x)^T\right)^{-1} \nabla f(x)$$