$\boxed{\text{III.7}}$

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ c_E(x) = 0 \\ c_I(x) \le 0 \end{cases} \qquad (P_p)\begin{cases} \min f(x) \\ c_E(x) + p_E = 0 \\ c_I(x) + p_I \le 0 \end{cases}$$

$p \in \mathbb{R}^m$ voisin de 0

$$v(p) = \mathrm{val}(P_p)$$

$$\boxed{\nabla v(0) = \lambda_*}$$

dans 1 cas très particulier

c-a-d $(\lambda_*)_i = \dfrac{\partial v}{\partial p_i}(0)$ $\leftarrow$ c'est la variation du coût optimal lorsque on fait varier la i-ème contrainte

Hypothèse de travail

- $\mathcal{V}_p$ voisin de 0, (P_p) a 1 unique solution $(\bar{x}(p), \bar{\lambda}(p))$ qui est différentiable

- $\bar{x}(0) = \bar{x}$, $\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}$ qui est 1 solution ($=$ pt stationnaire) primale-duale de (P)

(I) $v(p) = \text{val}(P_p) = f(\bar{x}(p))$

$$\boxed{f(\bar{x}(p)) = \ell(\bar{x}(p), \bar{\lambda}(p)) + \bar{\lambda}(p)^T p}$$

où $\ell(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x)$

$$\cancel{f(\bar{x}(p))} \overset{?}{=} \cancel{f(\bar{x}(p))} + \underbrace{\bar{\lambda}(p)^T c(\bar{x}(p)) + \bar{\lambda}(p)^T p}_{\overset{?}{=} 0}$$

$$\begin{cases} \nabla_x \ell(x, \lambda) = 0 \\ c_E(x) = 0 \\ 0 \leq \lambda_I \perp c_I(x) \leq 0 \end{cases}$$

$\lambda_I^T c_I(x) = 0$

$\bar{\lambda}(0)^T c(\bar{x}(0)) = 0$

pour (P_p) on a $\bar{\lambda}(p)^T \left(c(\bar{x}(p)) + p\right) = 0$

$\ell(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x)$

(2) $\boxed{DV(0) = \bar{\lambda}}$? $p \longmapsto f(\bar{x}(p))$

$\bar{\lambda} \stackrel{?}{=} D_p(f \circ \bar{x})(0)$?

$\stackrel{?}{=} D_p\left(\ell(\bar{x}(p), \bar{\lambda}(p)) + \bar{\lambda}(p)^T p \right)(0)$, $p=0$

$$(f \circ \bar{x})'(0) \cdot q = \underbrace{\cancel{\ell'_x(\bar{x}, \bar{\lambda})}}_{=0} \cdot \bar{x}'(0) \cdot q + \ell'_\lambda(\bar{x}, \bar{\lambda}) \cdot (\bar{\lambda}'(0) \cdot q)$$

$$+ (\bar{\lambda}'(0) \cdot q)^T \underbrace{p}_{=0} + \bar{\lambda}^T q$$

$$= \underbrace{c(\bar{x}) \cdot (\bar{\lambda}'(0) \cdot q)}_{=0\,?} + \bar{\lambda}^T q$$

(alors c'est fini)

$$\underbrace{c_E(\bar{x})}_{=\,0}\cdot\left(\lambda_E'(0)\cdot q\right) + \underbrace{c_I(\bar{x})\cdot\left(\lambda_P'(0)\cdot q\right)}_{=\,0\ ?}$$

$$I = I_0(\bar{x}) = \{ i : c_i(\bar{x}) = 0 \}$$

$$I \setminus I_0(\bar{x}) = \{ i : c_i(\bar{x}) < 0 \}$$

$$\underbrace{c_{I\setminus I_0(\bar{x})}(\bar{x})}_{<\,0}\cdot\left(\underbrace{\lambda'_{I\setminus I_0(\bar{x})}(0)}_{=\,0\ ?}\cdot q\right) \overset{?}{=} 0$$

$$i \in I \setminus I_0(\bar{x})$$

$$\lambda_i = \lambda_i(0) = 0$$

$$\lambda_i(p) = 0, \quad \forall p \text{ petit.}$$

$$\left(c_i(\bar{x}(p)) + p_i\right)\bar{\lambda}_i(p) = 0$$

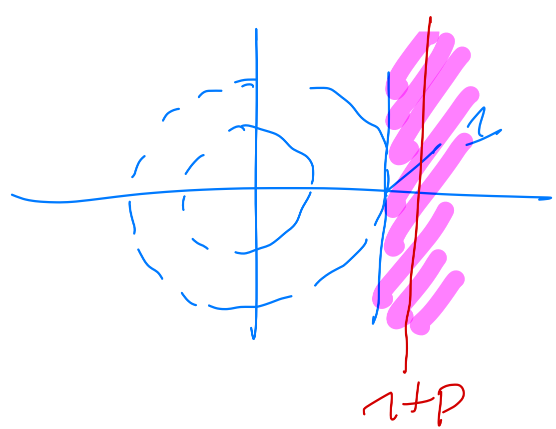
$$p \mapsto c_i(\bar{x}(p)) + p_i \quad \left|\begin{array}{l} < 0 \text{ en } p = 0 \\ < 0 \text{ pour } |p| \text{ petit,} \\ \quad\text{par continuité} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \bar{\lambda}_i(p) = 0 \text{ pour } |p| \text{ petit.}$$

$$\Rightarrow \bar{\lambda}_i'(0) = 0$$

<u>Applications de ce résultat</u>

$$\begin{cases} \min \|x\|_2^2 & x \in \mathbb{R}^2 \\ x_1 \geq 1 \end{cases}$$



$$\bar{x} = \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \min \|x\|_2^2 \\ x_1 \geq 1+p \end{cases}$$

$$\bar{x}(p) = \begin{pmatrix} 1+p \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(p) = \left\| \begin{pmatrix} 1+p \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (1+p)^2$$

$$v'(0) = 2$$

$$\bar{\lambda} = 2 \ ?$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ 0 \leq \lambda \perp (x_1 - 1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

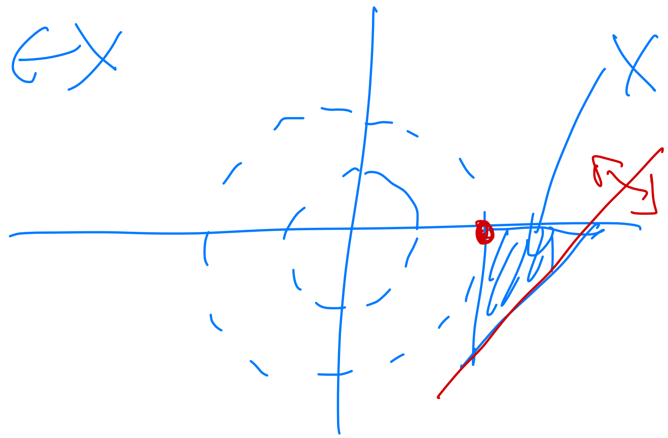
ex 2

$$\begin{cases} \min \ \|x\|^2 \\ x \in X \end{cases}$$

$X = \{x : x_1 \geq 1$

$x_2 \leq 0$

$x_2 \geq x_1 - 2\}$

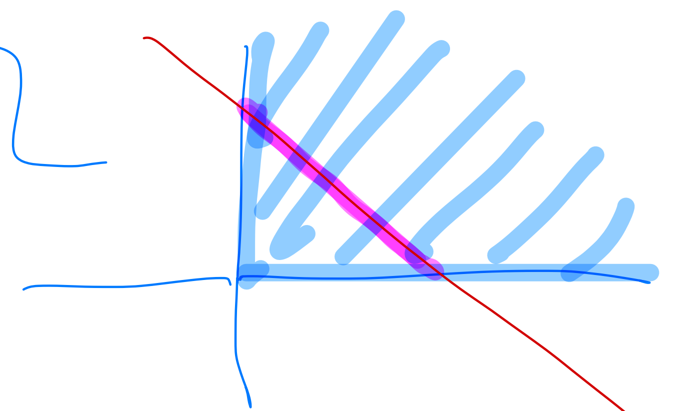


$\rightsquigarrow \lambda_3 = 0$ ($v'(0)$ ou v correspond à la perturbation de la 3e contrainte)

$\boxed{\text{Ex 1}}$

Dualisation d'un pbe d'OL

$$(PL)\ \begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad x, c \in \mathbb{R}^n \qquad A : m \times n, \ b \in \mathbb{R}^m$$



$\{x : Ax = b\}$

Dualisation des contraintes

multiplicateurs

$$(PL) \overset{?}{\equiv} \inf_x \left(\sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^m \\ s \geq 0}} \underbrace{c^T x - y^T(Ax - b) - s^T x}_{\ell(x, y, s)} \right)$$

$$= c^T x + I_X(x) \qquad X = \{x : Ax = b, \ x \geq 0\}$$

$$f = \begin{cases} c^T x & \text{si } Ax = b \text{ et } x \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\underline{Ax = b \text{ et } x \geq 0}$

$$= \sup_{s \geq 0} \; c^T x - \underbrace{\underbrace{\underbrace{s^T}_{\geq 0} \; \underbrace{x}_{\geq 0}}_{\geq 0}}_{\leq 0} = c^T x \quad \Uparrow \; s = 0$$

- $\underline{Ax \neq b}$

$$\geq \sup_{\substack{y = t(Ax - b) \\ s = 0}} \; c^T x - t \|Ax - b\|^2$$

$$= \sup_t \; c^T x - t \underbrace{\|Ax - b\|^2}_{\neq 0}$$

$$= +\infty$$

- $x \not\geq 0$

$$\geq \sup_{y \geq 0} c^T x + t(x^-)^T x$$

$$\overbrace{}^{\|x^-\|_2^2}$$

$s = t x^- = t \max(-x, 0)$, $t \geq 0$

$(x = x^+ - x^- \mid x^-$ ou $x^+ = \max(0, x))$

$((x^+)^T x^- = 0)$

$x^- \neq 0$ (car $x \not\geq 0$)

$$= \sup_{t \geq 0} c^T x + t \underbrace{\|x^-\|_2^2}_{\neq 0} = +\infty$$

Le pb dual Lagrangien s'écrit

$$(D_L) \quad \sup_{\substack{y \\ s \geq 0}} \left(\inf_x \; c^T x - y^T (Ax - b) - s^T x \right)$$

$$\inf_{x} \; (c - A^T y - s)^T x + b^T y$$

$$= \begin{cases} b^T y & \text{si} \quad A^T y + s = c \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \sup_{\substack{y \\ s \geq 0}} \; b^T y - I_{\{(y,s) : A^T y + s = c\}}(y, s)$$

$$= - \inf_{\substack{y \\ s \geq 0}} \; -b^T y + I_{(\quad)}(y, s)$$

$$= - \inf_{\substack{y \\ s \geq 0, \; A^T y + s = c}} \; -b^T y$$

$$= \sup_{\substack{y \\ s \geq 0 \\ A^T y + s = c}} b^T y$$

$$\boxed{(D_c) \quad \begin{cases} \sup_{(y,s)} b^T y \\ A^T y + s = c \\ s \geq 0 \end{cases}}$$

Dualité faible

$$\boxed{\mathrm{val}(D_c) \leq \mathrm{val}(P_c)}$$

Dualité forte en OL

Existence de solutions en OL.

$$\boxed{(PL) \text{ a 1 solution } \iff \text{val}(PL) \in \mathbb{R}}$$

$\iff \begin{cases} (PL) \text{ est } \underline{\text{réalisable}} \\ \quad (\exists x : Ax = b,\ x \geq 0) \\ (PL) \text{ est } \underline{\text{borné}} \\ \quad (\inf(c^T x : Ax = b,\ x \geq 0) > -\infty) \end{cases}$

<u>Démo</u> (On utilise le fait que l'ensemble des minimiseurs T d'un polyèdre convexe est un polyèdre convexe ; donc un fermé)

$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$ est un polyèdre convexe

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto c^T x$

$T(P)$ est 1 polyèdre convexe de $\mathbb{R}$,
donc 1 intervalle fermé

Soit (x_k) une suite minimisante de (P_L) :

$(x_k) \subset P$ $\quad$ ($\neq \emptyset$ car $val(P_L) < +\infty$)

$T(x_k) = c^T x_k \to val(P_L)$

⚠ $\Rightarrow$ $val(P_L) \in T(P)$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in P : \underbrace{val(P_L)}_{\in \mathbb{R}} = T(\bar{x}) = c^T \bar{x}$

$\Rightarrow \bar{x} \in Sol(P_L)$

$\square$

Dualité forte

Les props suivantes sont équivalentes

(i) (P_c) et (D_c) sont réalisables

(ii) (P_c) a 1 solution

(iii) (D_c) a 1 solution

et dans ce cas, il n'y a pas de saut de dualité

$$(P)\begin{cases} \inf_x \; c^T x \\ 0\,x = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sup_{(y,s)} \; y \in \mathbb{R} \\ 0\,y + s = -1 \\ s \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $val(P) = +\infty$ $\qquad$ $val(D) = -\infty$

$\Rightarrow$ saut de dualité infini

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\iff$ (i) $\overset{?}{\Rightarrow}$ $val(P_L) \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ $val(P_L) < +\infty$

(car (P_L) est réalisable c-à-d son ensemble admissible est non vide)

$$-\infty < val(D_L) \leq val(P_L)$$

$\uparrow$ car (D_L) est réalisable

(ii) $\Rightarrow$ (i) (P_L) a des solutions $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\left\{ \begin{array}{l} (P_L) \text{ réalisable} \\ (D_L) \text{ réalisable} \end{array} \right.$

- (P_L) réalisable car $\exists$ sol $\bar{x}$ pour (P_L) et ce $\bar{x}$ réalise les contraintes
- (D_L) réalisable :

$$(PL)\begin{cases}\inf c^T x\\ Ax=b\\ x\geq 0\end{cases}$$

(PL) a 1 solution

les contraintes sont qualifiées (car affines)

$$\Rightarrow \exists (y,s) : \begin{cases}\nabla_x \ell(x,(y,s)) = 0\\ Ax=b\\ 0\leq s \perp x\geq 0\end{cases}$$

$$(D)\begin{cases}\sup b^T y\\ A^T y + s = c\\ s\geq 0\end{cases}$$

$$\ell(x,(y,s)) = c^T x - y^T(Ax-b) - s^T x$$

$$\nabla_x \ell(x,y,s) = c - A^T y - s = 0$$

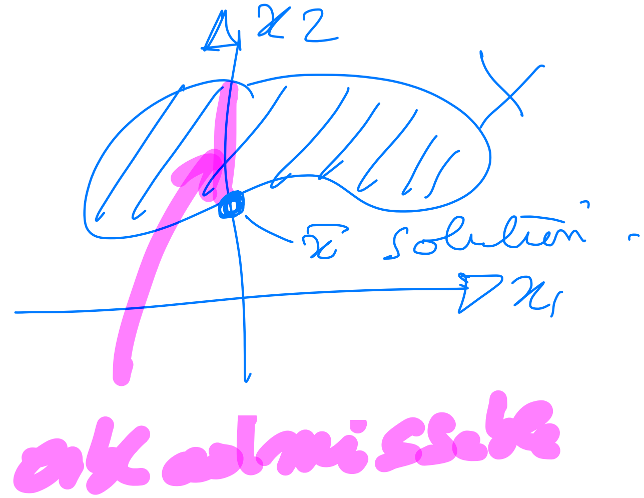
$$(PL)\begin{cases}\inf c^T x\\ Ax=b\\ x\geq 0\end{cases}$$

dualiser "$Ax=b$" c'est écrire $(PL) = \inf_{x\geq 0} \sup_{y} c^T x - y^T(Ax-b)$

dualiser "$s\geq 0$" c'est écrire $(PL) = \inf_{\substack{x\\ Ax=b}} \sup_{s\geq 0} c^T x - s^T x$

$\boxed{\text{Ex 4}}$

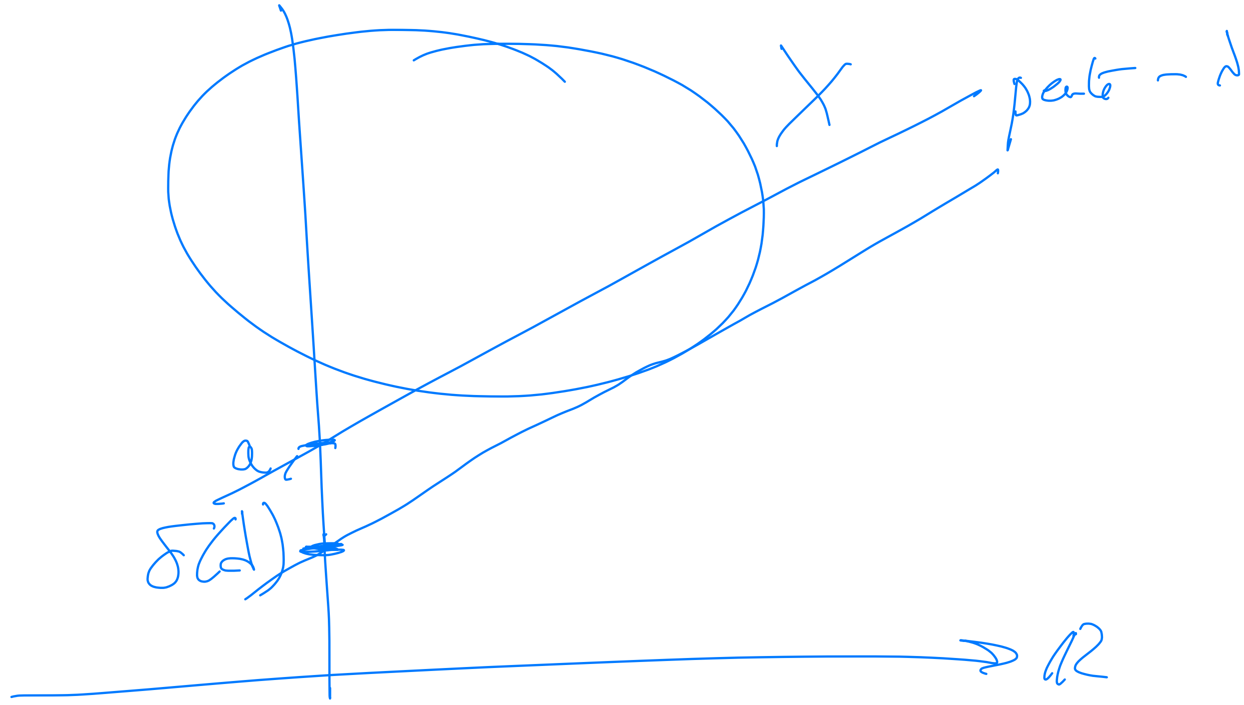
$$(P)\left\{\begin{array}{l}\inf x_2 \\ x \in X \\ x_1 = 0\end{array}\right.$$



On dualise par le Lagrangien la contrainte "$x_1 = 0$"

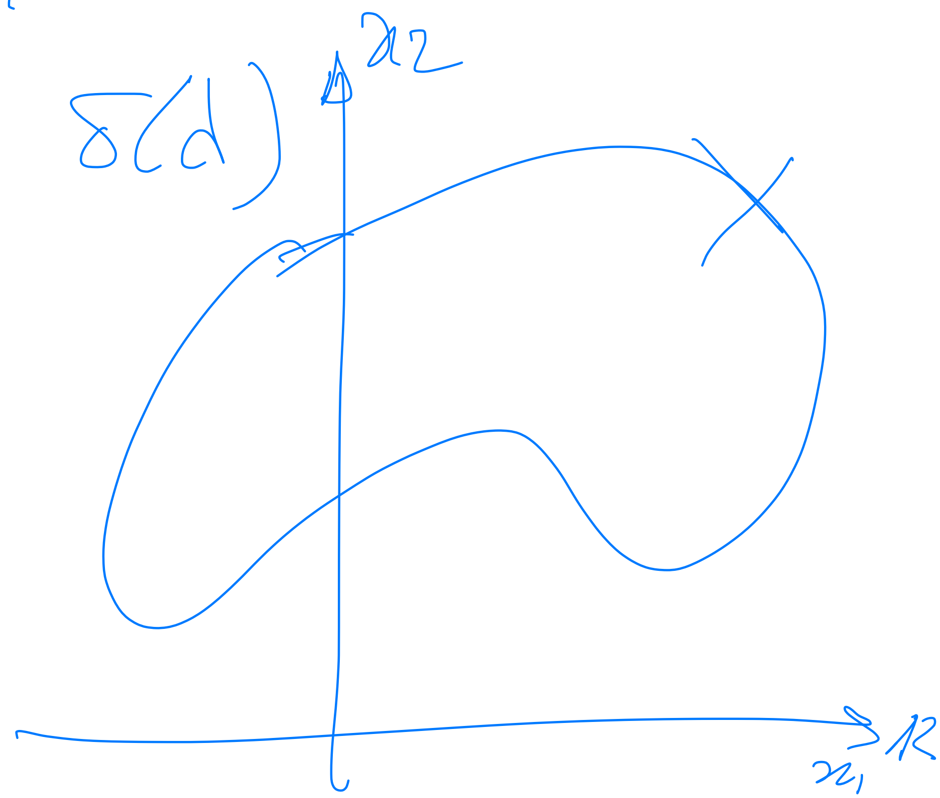
$$\boxed{(P) = \inf_{x \in X} \underbrace{\left(\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} x_2 + \lambda x_1 \right)}_{= \left\{\begin{array}{ll} x_2 & \text{si } x_1 = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{array}\right.}}$$

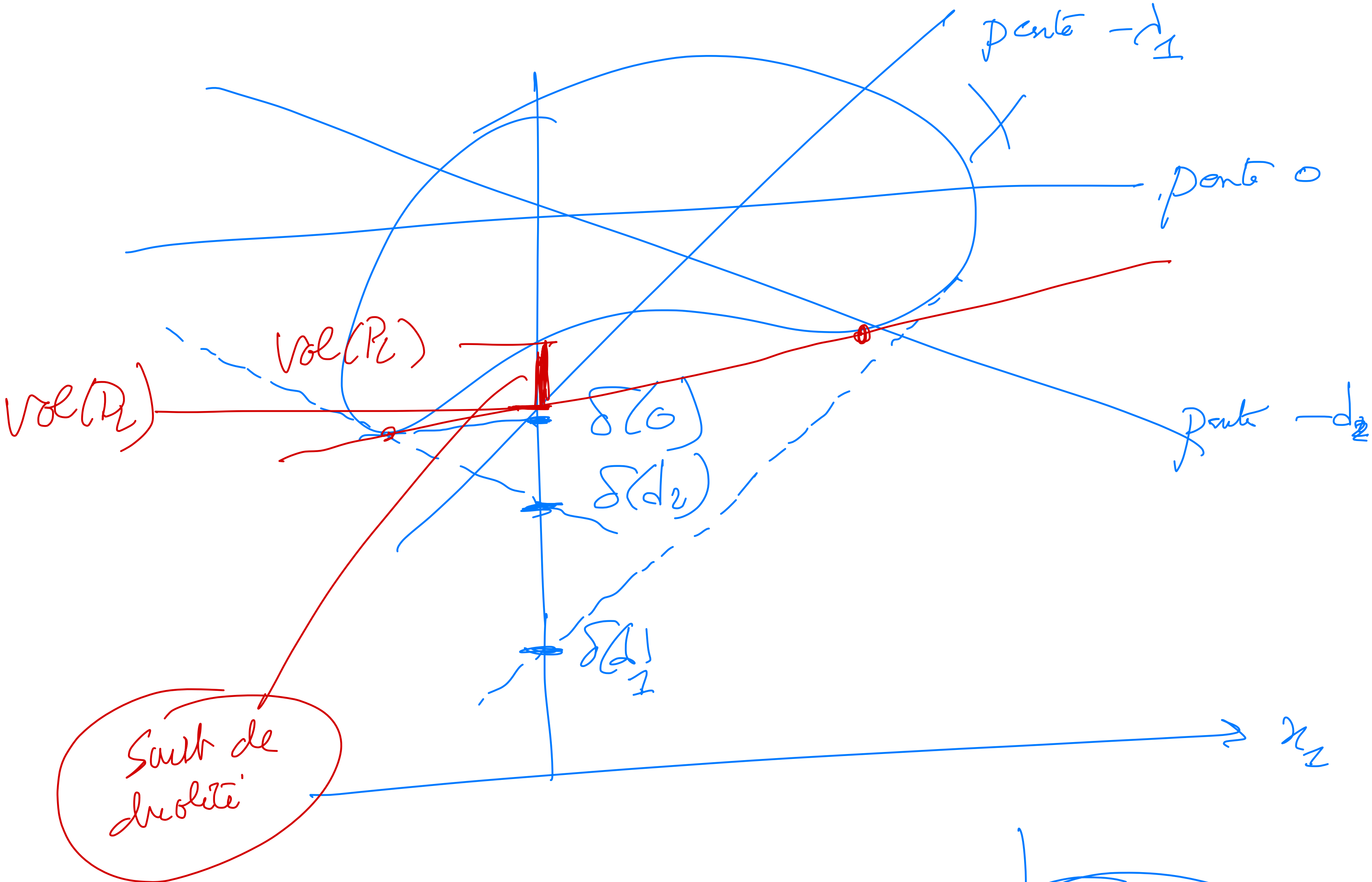
$$\boxed{(D) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \underbrace{\left(\inf_{x \in X} x_2 + \lambda x_1 \right)}_{\delta(\lambda)}}$$



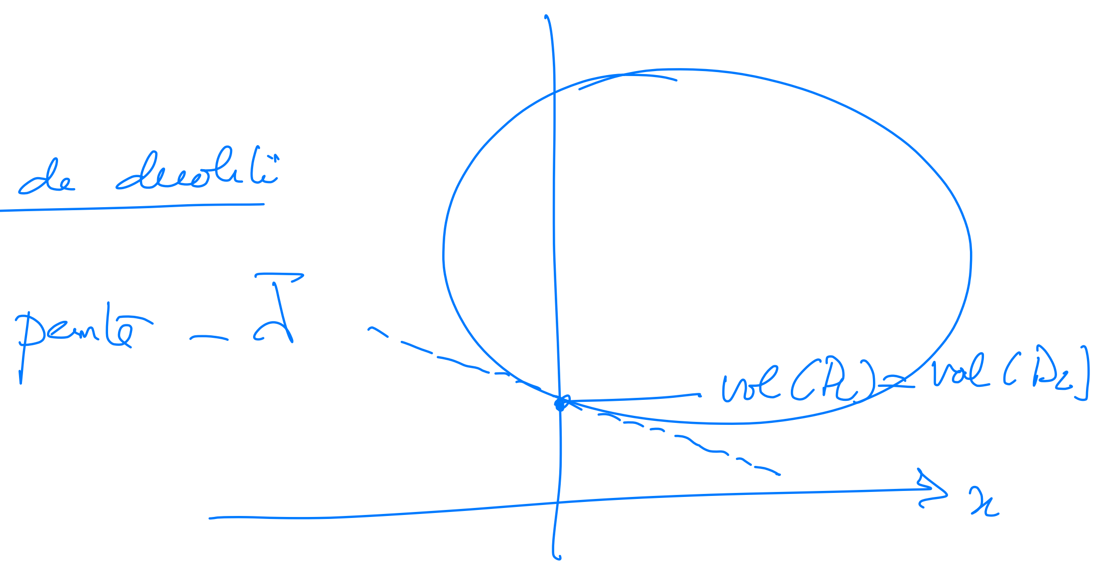
$$x_2 + d\, x_1 = a$$

(D) $\sup_{d \in \mathbb{R}} \delta(d)$





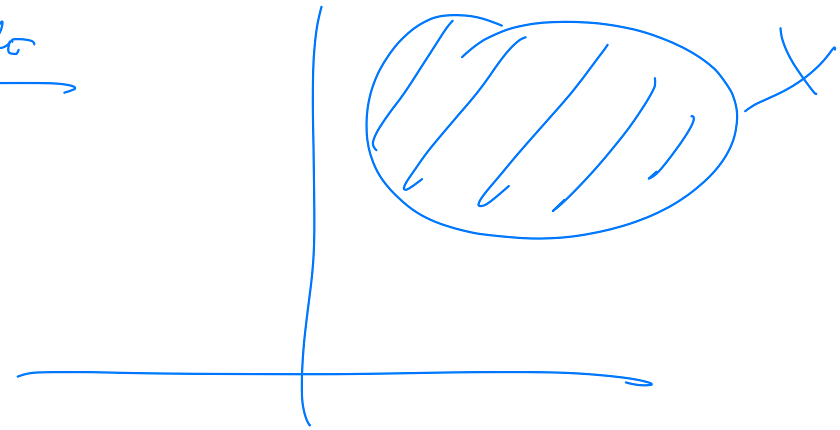
exemple sans saut de dualité



pbl sans solution

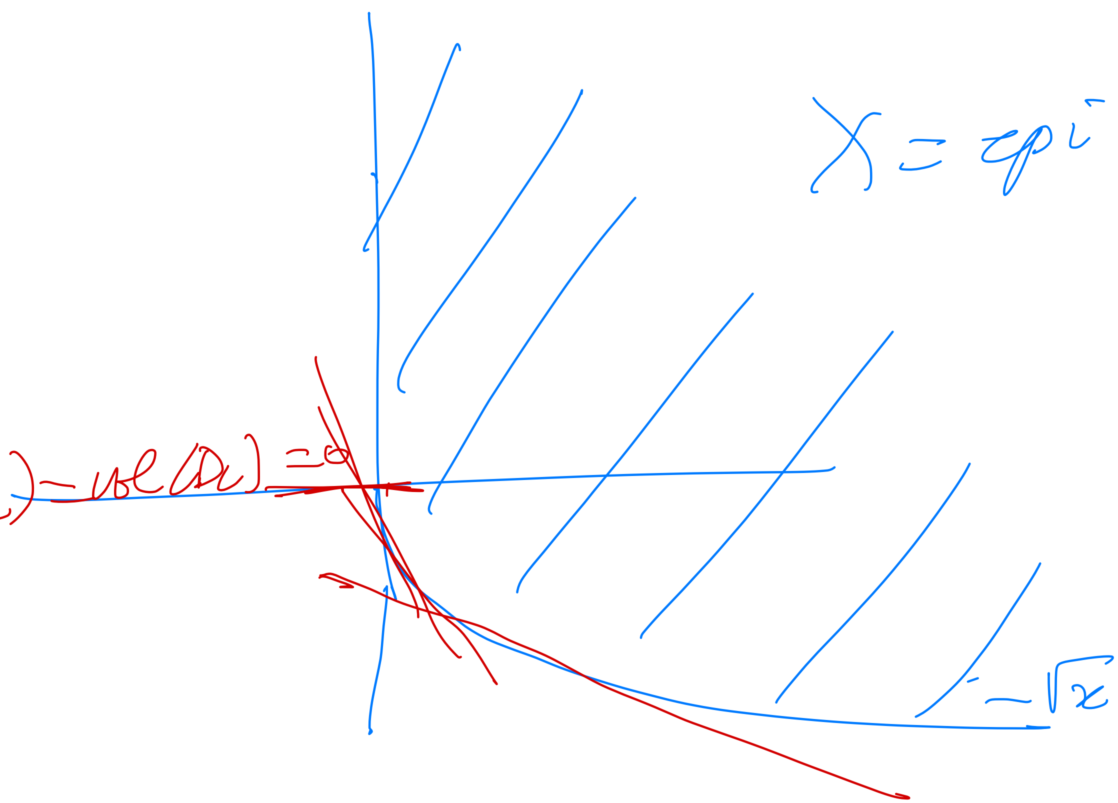
$$\mathrm{val}(P_L) = +\infty$$

$$\mathrm{val}(D_L) = +\infty$$



exemple avec 1 sol primal, pas de saut de dualité, pas de sol duale

$$X = \mathrm{epi}(-\sqrt{\cdot}\,)$$



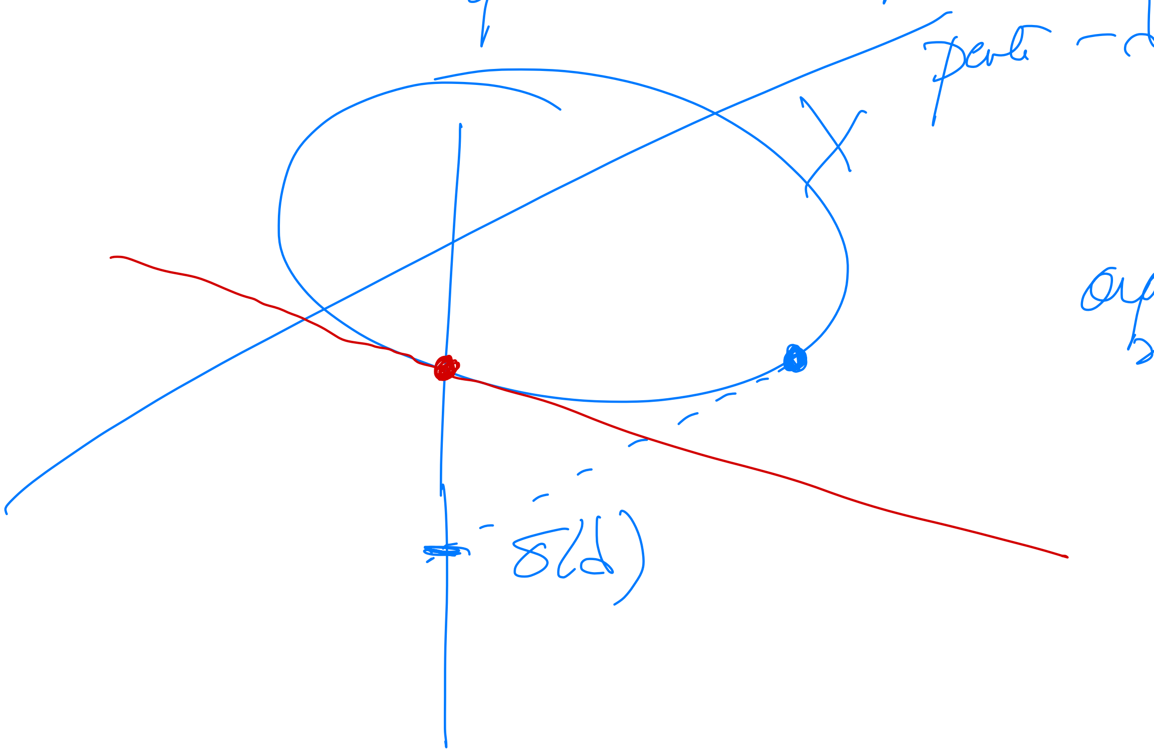
$$\mathrm{val}(P_L) = \mathrm{val}(D_L) = 0$$

exemple avec $\exists$ sol. primale
$\exists$ sol. duale
pas de saut de dualité
$\Rightarrow \exists$ PS

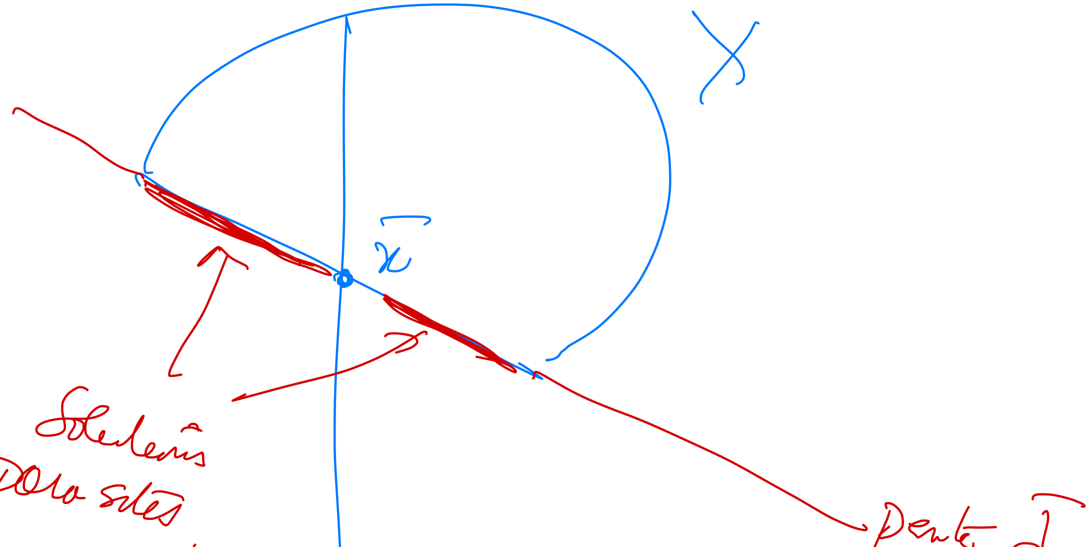
mais il y a des solutions de

$\inf_{x \in X} x_2 + \bar{d} x_1$

qui ne sont pas solution de (P)



argmin $x_2 + d x_1$
$x \in X$



Solutions possibles (sont solutions de $\inf_{x \in X} x_2 + \bar{\lambda} x_1$)

mais ne sont pas solutions de P car non admissibles)

$\boxed{\text{Ex 5}}$

$$\Delta_p = \{ x \in \mathbb{R}^p_+ : e^T x = 1 \}$$

où $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^p : x \geq 0, \sum x_i = 1 \}$$

$A : m \times n$

$$\boxed{\max_{y \in \Delta_m} \min_{x \in \Delta_n} y^T A x = \min_{x \in \Delta_n} \max_{y \in \Delta_m} y^T A x}$$

Von Neumann

(1) Montrez que

$$\sup_{y \in \Delta_m} y^T A x$$ a 1 solution

$\boxed{1}$ car c'est une sup d'applications linéaires réalisable

----- (il manque un argument)

$\boxed{2}$ Δ_m compact, fonction linéaire donc continue

+ Weierstrass

② $\inf\limits_{x \in \Delta_n} \underbrace{\max\limits_{y \in \Delta_m} y^T A x}$ a une solution

enveloppe supérieure de fct linéaires

$\Rightarrow$ s.c.i

$\Rightarrow$ on minimise une fct s.c.i sur un compact

$\Rightarrow$ $\exists$ une solution par Weierstrass.

$\square$