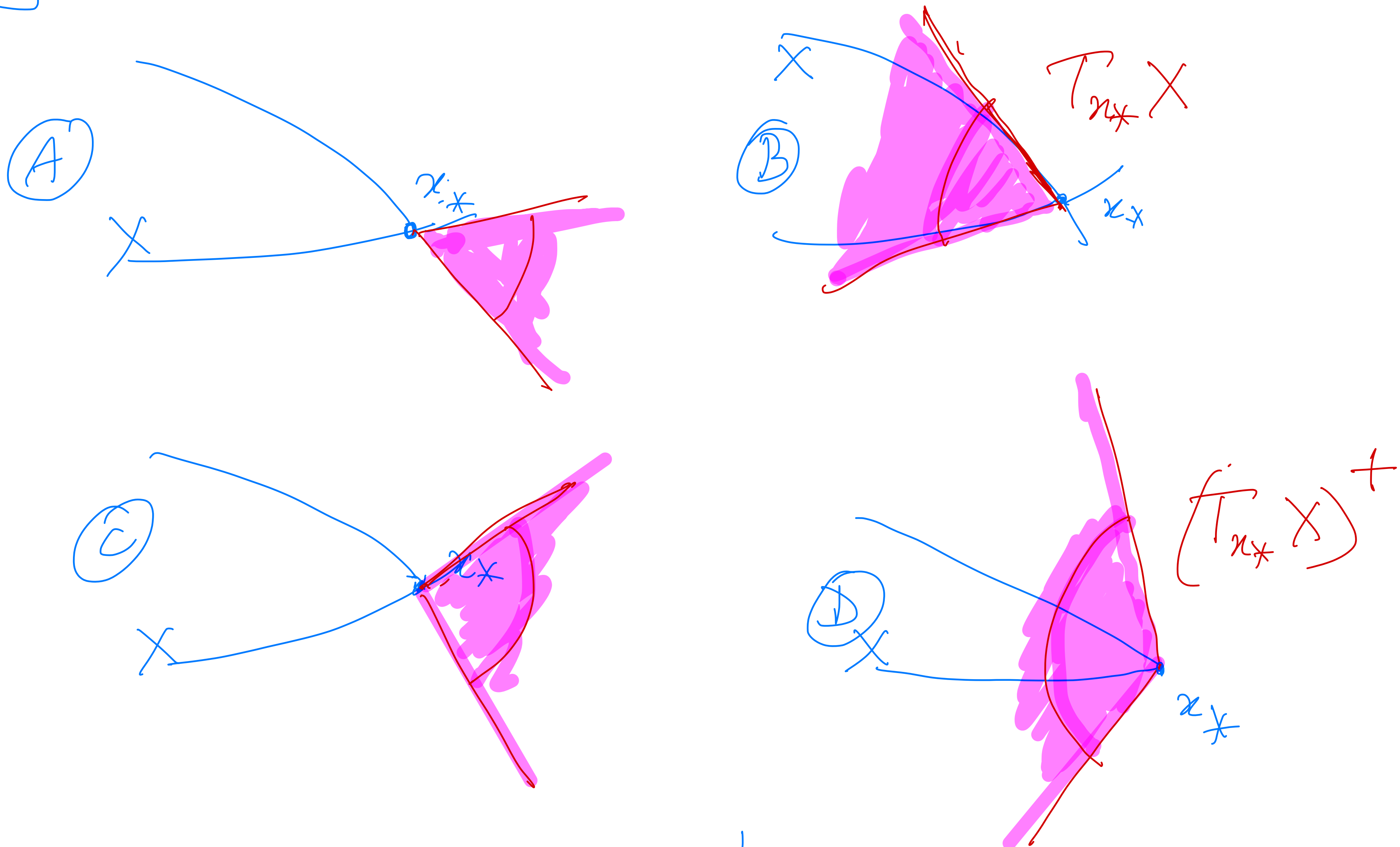
$\boxed{\text{III. 6}}$



- $\nabla f(x_*) \in \underbrace{(T_{x_*}X)^+}_{= \{h : \ h^T d \geq 0, \ \forall d \in T_{x_*}X\}}$

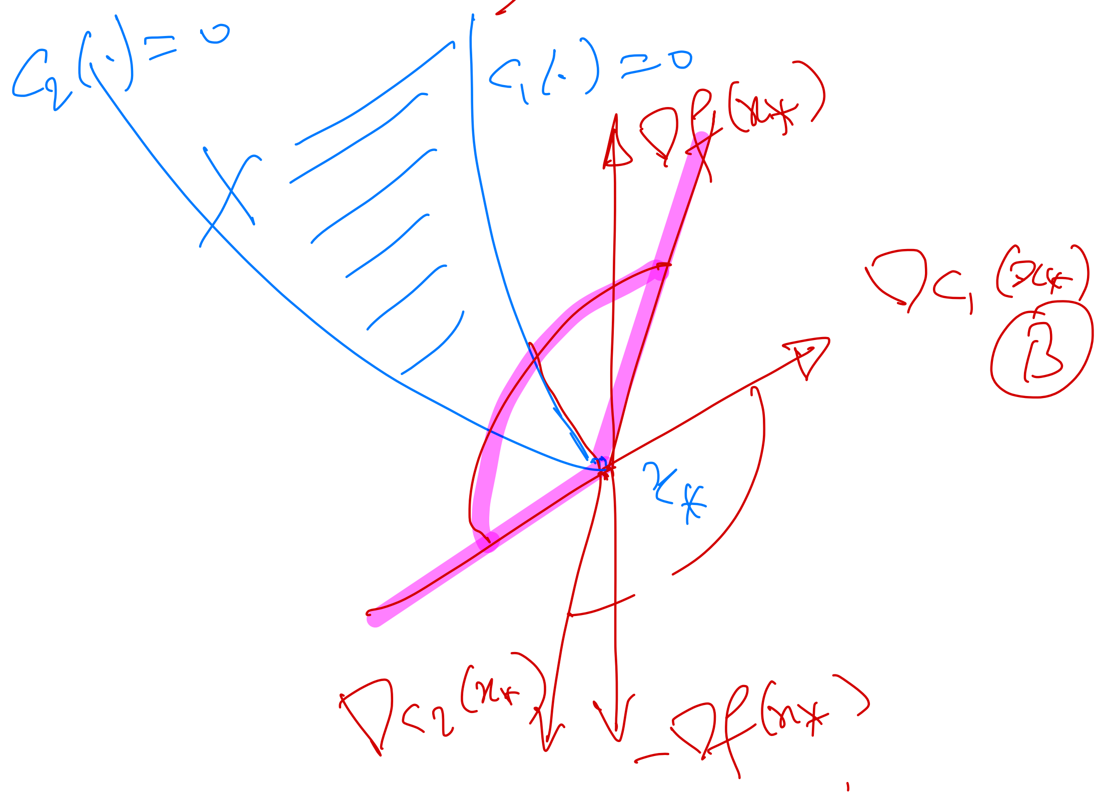
$$\begin{cases} \min f(x) \\ c(x) \le 0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

- $\nabla_x \ell(x_*, \lambda_*) = 0$

$$\ell(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i(x)$$

$$0 = \nabla_x \ell(x_*, \lambda_*) = \nabla f(x_*) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_*)_i \nabla c_i(x_*)$$

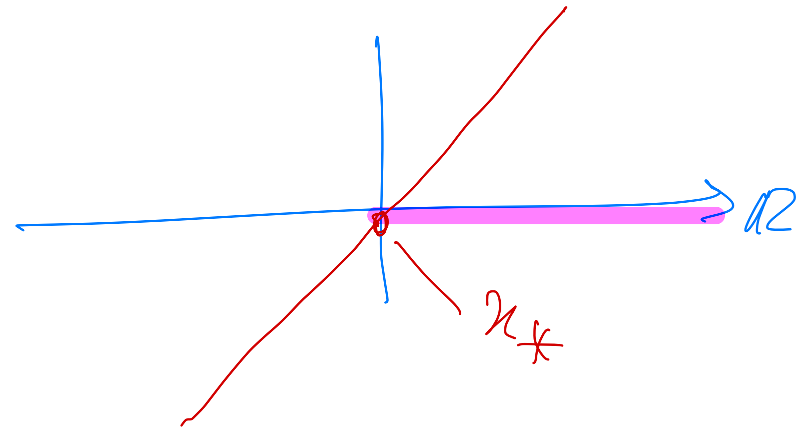
$$-\nabla f(x_*) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(\lambda_*)_i}_{\ge 0} \nabla c_i(x_*)$$



- $\begin{cases} \min f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x_* = 0$

$\nabla f(x_*)$ n'est pas nul !!

$\begin{cases} \min x = f(x) \\ x \geq 0 \end{cases}$



$\nabla f(x_*) = 1$

Décomposition en valeurs singulières d'une matrice (SVD)

- A : $n \times n$ symétrique

  $\Rightarrow$ n vecteurs propres orthonormaux v_i

  $V = (v_1 \cdots v_n)$ orthogonale

  $A v_i = \lambda_i v_i$

  $AV = V\Lambda$ $\quad \Lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

  $$\boxed{A = V \Lambda V^T}$$

- A : $m \times n$ $\left(m \boxed{\overset{n}{A}} \right)$ de rang $r \leq \min(m, n)$

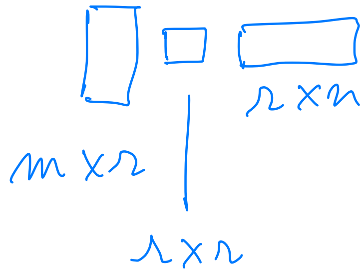
  la DVS (SVD) est

  $\exists\, V$ $\quad m \times r$: $V^T V = I_r$

  $\exists\, U$ $\quad n \times r$: $U^T U = I_r$

  $\exists\, \Sigma$ $\quad r \times r$ diagonale > 0

  t.q. $\boxed{A = V \Sigma U^T}$



$$\hat{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \\ \begin{matrix} n & \quad m \end{matrix} & \end{array}$$

$(m+n) \times (m+n)$

symétrique.

$\Rightarrow$ $(m+n)$ vecteurs propres orthogonaux

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \sigma x$$
$$A x = \sigma y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = -\sigma \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{A A^T}^{m \times m} y = \sigma^2 y$$

$$\underbrace{A^T A}_{\substack{n \times n \\ \text{rang } r}} x = \sigma^2 x$$

σ^2 = valeurs propres de AA^T ou A^TA

$(v A A^T v = \|A^T v\|^2 \geq 0)$

$\exists\, U$ orthogonale $n \times r$:

$$\boxed{A^T A U = U \Sigma^2}$$

$\Sigma = \mathrm{Diag}(\underbrace{\sigma_1, \dots, \sigma_r}_{\text{les } \sigma_i > 0})$

$\exists\, V$ orthogonale $m \times r$:

$$\boxed{A A^T V = V \Sigma^2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \sigma_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

$A^T v_i = \sigma_i u_i$

$A u_i = \sigma_i v_i$

$A A^T v_i = \sigma_i^2 v_i$

$$\boxed{\begin{aligned} A U &= V \Sigma \\ A^T V &= U \Sigma \end{aligned}}$$

$$\underset{m\times n}{A}\ \underbrace{\big(\underset{n\times r}{U}\quad \underset{n\times(n-r)}{\tilde U}\big)}_{\substack{\text{orthogonal}\\ n\times n}} = V(\Sigma\quad 0)$$

$A\tilde U = 0$ $\qquad$ $R(\tilde U) = R(U)^{\perp} = N(A)$

$$\underset{m\times n}{\boxed{A}} = V(\Sigma\quad 0)\begin{pmatrix}U^T\\ \tilde U^T\end{pmatrix} = \boxed{V\Sigma U^T}$$

$\boxed{\text{Ex 5}}$

$$(P) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

pbl de moindres-carrés linéaires

$A : m \times n, \quad b \in \mathbb{R}^m$

<u>interprétation</u>

$$x \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow Ax$$

Si on connait la sortie b, on cherche un x tel que Ax est le + proche de b

$$x \longrightarrow F(x)$$

paramètre de l'univers

fond cosmique

$$\min_{x} \| F(x) - \text{fond cosmique observé} \|$$

• (abstract) on essaye de résoudre au mieux $Ax = b$ alors que ce système n'a pas de solution

→ on calcule x tel que Ax soit le + proche possible de b

$$\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

(1) montrer que (P) a 1 solution

$$(P) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 = \frac{1}{2} x^T A^T A x - b^T x + \frac{1}{2}\|b\|_2^2$$

– critère continu, non coercif

$$\Leftrightarrow (\tilde{P}) \quad \min_{y \in R(A)} \frac{1}{2} \|y - b\|_2^2 = \varphi(y)$$

– critère continu, coercif
– $R(A)$ fermé, non vide

$\Rightarrow \exists$ sol y unique

$- \quad D^2\varphi(y) = I \succ 0$

$\Longrightarrow$ (D) a 1 solution

$\bar{y}$ = sol (unique) de $\tilde{D}$

$\bar{y} \in R(A) \Rightarrow \exists \bar{x} : \bar{y} = A\bar{x}$

$\bar{x} \in$ Sol (P)

(ii) (P) a 1 solution unique $\Longleftrightarrow$ A est injective

$\Longrightarrow$ si $\bar{x}$ est solution

alors $\boxed{\bar{x} + N(A)}$ est formé de solution

donc si $N(A) \neq \{0\}$, il y a plus d'1 solution

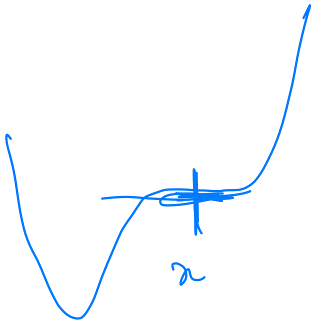
$\Longleftarrow$ $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$

$$\nabla f(x) = A^T(Ax - b)$$

$$\nabla^2 f(x) = A^T A \succ 0 \quad \text{car}$$

$$x^T A^T A x = \|Ax\|^2 > 0$$

car $N(A) = \{0\}$



$$\boxed{x \in Sol(P) \iff A^TAx = A^Tb \iff x \in \bar{x} + N(A)}$$

($\Rightarrow$) car $\nabla f(x) = 0$ et $\nabla f(x) = A^TAx - A^Tx$

($\Leftarrow$) $\left.\begin{array}{l} f \text{ convexe} \\ \nabla f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x$ est un minimiseur global de f

f convexe ici car $\nabla^2 f(x) = \underbrace{A^TA}_{} \succcurlyeq 0$

□

(4) Solution de norme minimale

$$(P_{NM}) \left\{\begin{array}{l} \min \frac{1}{2}\|x\|^2 \\ A^TAx = A^Tb \end{array}\right. \Leftarrow \text{dfn l'ensble des solutions}$$

• (P_{NM}) a 1 solution et une seule, soit $\hat{x}$

$A^TA \succcurlyeq 0$

$$\|A^T b\| = \|A^T A x\| \geq \underbrace{\lambda_1 (A^T A)}_{\text{peut être nul } \dots} \|x\|$$

→ $\exists$ sol. car ensemble admissible non vide ($\exists$ sol) et fermé ($= \bar{x} + N(A)$) et critère coercif

→ Sol unique $\quad x \longmapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$ est strict. convexe ($D^2 = Id$)

- Mq $\quad A^T b \in R(A^T A)$

car $\quad \boxed{R(A^T A) = R(A^T)}$

$\boxed{\subset}$ $\quad b \in R(A^T A) \Rightarrow \exists x : b = A^T A x \in R(A^T)$

$\boxed{\supset}$ $\quad$ il suffit de montrer que $R(A^T A)^\perp = R(A^T)^\perp$

c-à-d $\quad \boxed{N(A^T A) = N(A)}$

C

$$x^T \,\Big|\, A^T A x = 0 \;\not\Rightarrow\; Ax = 0$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

(b) <u>la solution unique $\bar{x}$ est une fonction linéaire de b</u>

écrivons les CO

$$\ell(x, \lambda) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \underbrace{\lambda^T (A^T A x - A^T b)}_{v^T x}$$

$$\begin{cases} \nabla_x \ell(x, \lambda) = 0 \\ A^T A x = A^T b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + A^T A \lambda = 0 \\ A^T A x = A^T b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} I & A^T A \\ A^T A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^T b \end{pmatrix}$$

On en déduit (avec l'unicité de x) que $\hat{x}$ est 1 fct linéaire de b

$$\boxed{\hat{x} = A^+ b}$$

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|x\|^2 \\ A^T A x = A^T b \end{cases}$$

(d) $A^+ = ?$

- $A = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0 \Rightarrow A^+ = 0$
- $A = V \Sigma U^T$ (décomposition en valeurs singulières)

$$\begin{cases} x + A^T A \lambda = 0 \\ A^T A \bar{x} = A^T b \end{cases}$$

$$\cancel{U}\,\cancel{\Sigma}\,\overbrace{V^T V}^{I}\,\Sigma U^T \hat{x} = \cancel{U}\,\cancel{\Sigma}\, V^T b$$

I

$U^T U = I_n$

$U U^T =$ projection

$$\Sigma U^T \hat{x} = V^T b$$

$$U^T \hat{x} = \Sigma^{-1} V^T b$$

$$\hat{x} \in R(U)$$

$$x \in R(A^T) = R(U \Sigma V^T) \subset R(U)$$

$$\Rightarrow \hat{x} = U z \quad \leftarrow$$

$$\underbrace{U^T U}_{I} z = \Sigma^{-1} V^T b \Rightarrow z = \Sigma^{-1} V^T b$$

$$\hat{x} = U \Sigma^{-1} V^T b = A^+ b$$

$$\underbrace{\boxed{A^+ = U \Sigma^{-1} V^T}}_{n \times m}$$

Pseudo-inverse de PENROSE

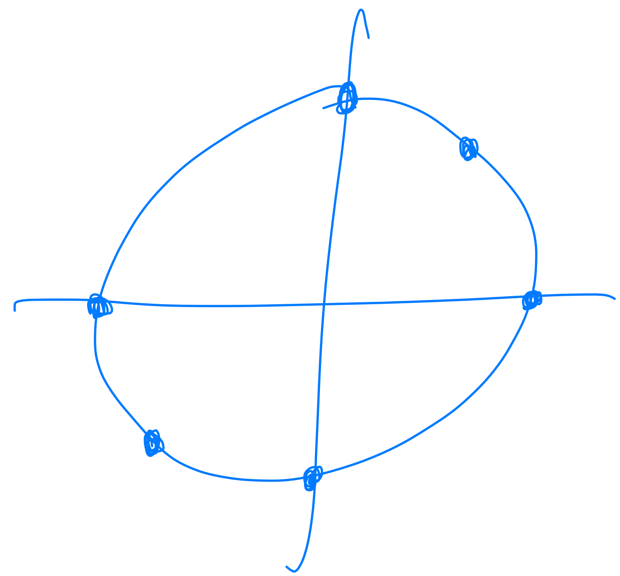
$\square$

A^+ est déterminée

$$\begin{cases} A A^+ A = A \\ A^+ A A^+ = A^+ \\ A^+ A \text{ est symétrique} \\ A A^+ \text{ ——————} \end{cases}$$

Ex 11

$$\begin{cases} \inf \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) \\ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \end{cases}$$



les pts stationnaires sont

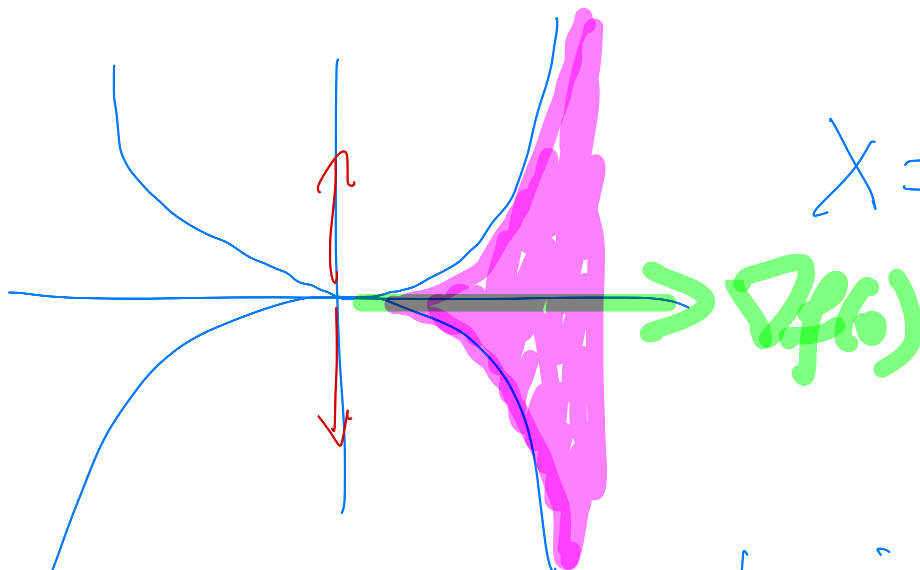
$$\begin{cases} x = \pm(0,1) \\ x = \pm(1,0) \\ x = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Parmi ces points stationnaires se trouve toutes les solutions du problème

Oui car toute solution vérifie les conditions d'optimalité du 1er ordre car les fct du pb sont différentiables et la contrainte est qualifiée

↳ en effet avec $c(x) = \frac{1}{2}\left(\|x\|_2^2 - 1\right)$

$\Rightarrow \nabla c(x) = x \neq 0$ sur la contrainte



$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq x_2^3,\ x_2 \geq -x_1^3\}$

$$\begin{cases} \min x_1 \\ x \in X \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad \bar{x} = 0$

les contraintes ne sont pas qualifiées en $x = 0$

car $DC_1(x) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 \\ 1 \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$DC_2(x) = \begin{pmatrix} -3x_1^3 \\ -1 \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ (QC-IL) n'a pas lieu

(QC-MF) ⟶

car les contraintes ne sont pas qualifiées

car $\left.\begin{array}{l} T_0 X = \mathbb{R}_+ e^1 \\ T_0' X = \mathbb{R} e^2 \end{array}\right) \neq 0$

$\Longrightarrow$ pas de conditions de (KKT)

(QC-IL) $\quad \sum_{i\in E\cup I^0(x)} \alpha_i \nabla c_i(x) = 0 \Rightarrow \alpha_{E\cup I^0(x)} = 0$

(QC-MF) $\quad \left.\begin{array}{l} \sum_{i\in E\cup I^0(x)} \alpha_i \nabla c_i(x) = 0 \\ \alpha_{I^0(x)} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_{E\cup I^0(x)} = 0$

(QC-MF) est vérifiée mais pas (QC-IL)