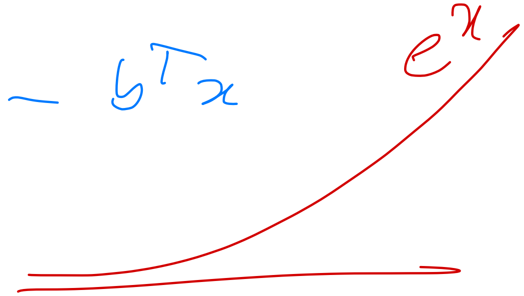
$\boxed{I.9}$ $A \in S^n$, $b \in \mathbb{R}$

$$f : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$$



Les propriétés suivantes sont équivalentes

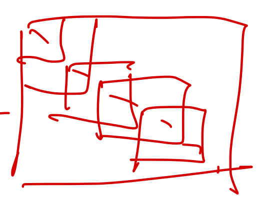
(i) $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ a une solution

(ii) f est bornée inférieurement

(iii) $A \succeq 0$, $b \in \mathcal{R}(A)$

$\Longleftrightarrow v^T A v \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow \lambda_i(A) \geq 0$ (les valeurs propres)

$\Longleftrightarrow$ $A =$  $\det A_{I,I} \geq 0$

$\forall I \in [1:n]$

(Convention $A_{\emptyset\emptyset} = 1$)

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si $\bar{x}$ minimise f sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\underbrace{f(x) \geq f(\bar{x})}_{\text{borne inférieurement}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ ($A \succeq 0$ par l'absurde)

Soit v : $Av = \lambda v$, $\lambda < 0$, $\|v\|_2 = 1$

$t > 0$

$$f(tv) = \frac{t^2}{2} \underbrace{\lambda}_{< 0} - t b^T v \longrightarrow -\infty \text{ si } t \to \pm\infty$$

$(b \in R(A)) \Leftarrow (i)$

si $\bar{x} \in \operatorname{Argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$

$\Rightarrow A\bar{x} - b = 0$

$\Rightarrow b \in R(A)$

$b \notin R(A)$

$f \downarrow -\infty$

b_0

$b \in R(A)$?

(par l'absurde) Si $b \notin R(A)$

$$\mathbb{R}^n = R(A) + R(A)^\perp$$
$$= R(A) + N(A)$$

$$b = \underbrace{b_0}_{\in N(A)} + Av$$ ($b_0 \neq 0$ dans notre cas)

$$f(tb_0) = \frac{t^2}{2} b_0^T \underbrace{A b_0}_{=0} - t\, b^T b_0$$ ($b_0 \in N(A)$)

$$= -t \underbrace{\|b_0\|^2}_{\neq 0} \longrightarrow -\infty \text{ si } t \to +\infty$$

ce qui est contraire à l'hypothèse

(iii) $\Rightarrow$ (i) $A \succeq 0 \Rightarrow f$ convexe

[CS 1 (f convexe) $\nabla f(\bar{x}) = 0$
$A\bar{x} = b$]

$$b \in R(A) \Rightarrow \exists\, \bar{x} : A\bar{x} = b$$

$$\Rightarrow \bar{x} \in \operatorname*{Argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

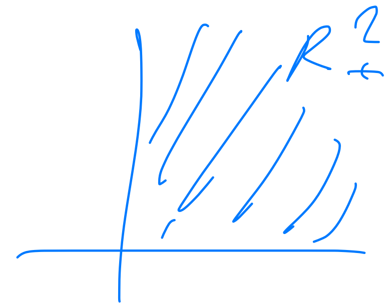
(f convexe)

$\square$

$\boxed{\text{Ex } 2.2}$

$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$

orthant positif



$$\boxed{(\mathbb{R}^n_+)^+ \overset{?}{=} \mathbb{R}^n_+}$$

($\mathbb{R}^n_+$ est auto-dual pour le produit scalaire euclidien $(x,y) \mapsto x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$)

$\boxed{\supset}$

Soit $x \in \mathbb{R}^n_+$ (donc $x_i \geq 0$, $\forall i$)

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $x^T d \geq 0$, $\forall d \in \mathbb{R}^n_+$

$$x^T d = \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{\geq 0} \underbrace{d_i}_{\geq 0} \geq 0$$

$\boxed{\subset}$ Soit $d \in \mathbb{R}^n$: $d^T x \geq 0$, $\forall x \geq 0$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $d \geq 0$

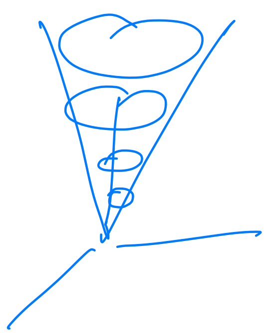
il suffit de prend les $x = e^i$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$e^i \geq 0$

$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ d_i}}{d^T e^i} \geq 0, \forall i \Rightarrow d \geq 0$

$\square$

$$(S^n_+)^+ = S^n_+$$

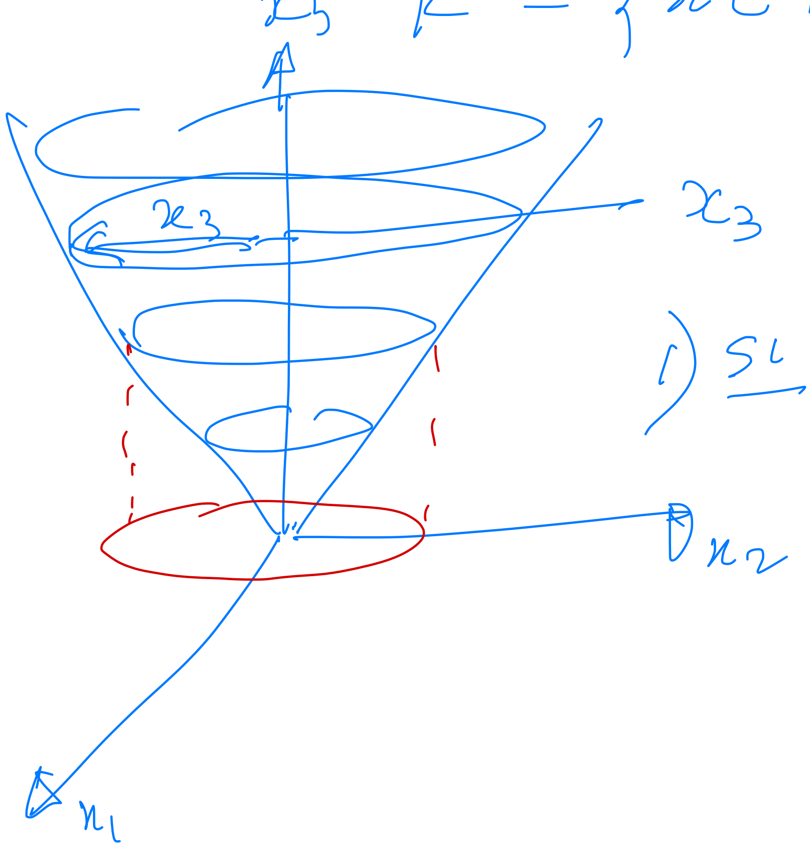


Ex 3.2

$\boxed{K \text{ cône convexe fermé} \not\Rightarrow A(K) \text{ est fermé, } A \text{ linéaire}}$

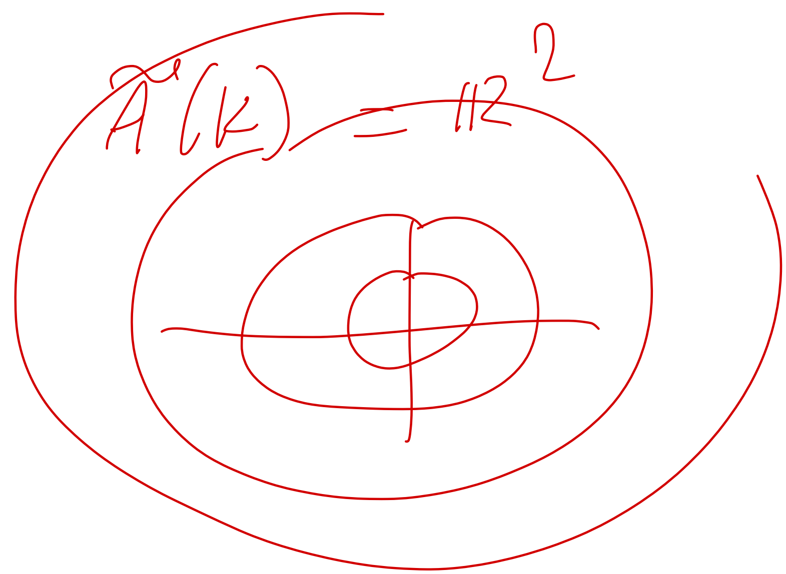
Exemple

$K = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, \ x_3 \geq 0 \}$

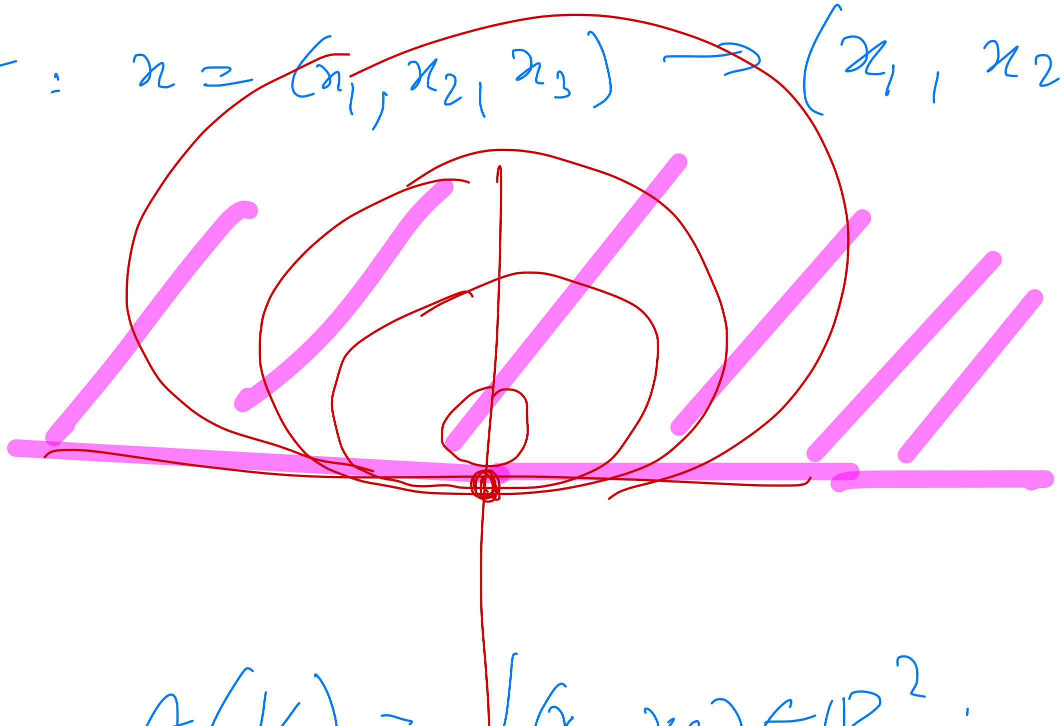


K cône convexe fermé

1) Si $\tilde{A} : x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2)$



2) si $A : x = (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2 + x_3)$



$$A(K) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}$$ n'est pas fermé $\square$

$\boxed{\text{Ex 3.3}}$ (Théo. de l'alternative)

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire

Montrons que $\boxed{\{Ax : x \geq 0\} = \{y : A^T y \geq 0\}^+}$ $(\ast)$

Lemme de Farkas : $\overline{A(K)} = \{ y \in F : A^* y \in K^+ \}^+$

$A : E \to F$ linéaire

K cône convexe de E

Si on prend le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, $A^* = A^T$

$\Rightarrow$ $A = A$

$K^+ = \mathbb{R}^m_+$ orthant positif de $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $K = \mathbb{R}^m_+$

Si on applique Farkas avec $A = Id$

$A^* = Id$, on obtient

$$\overline{K} = K^{++}$$

$$K^{++} = (\mathbb{R}^n_+)^+ = \mathbb{R}^n_+$$

$\Rightarrow \bar{K} = \mathbb{R}^n_+$, on peut prendre $\underbrace{K = \mathbb{R}^n_+}_{\text{fermé}}$

Farkas $\Rightarrow$ $\{y : A^T y \geq 0\}^+ = \overline{A(\mathbb{R}^n_+)}$

$= \overline{\{Ax : x \geq 0\}}$

$\mathbb{R}^n_+$ est 1 polyèdre convexe

$\Rightarrow A(\mathbb{R}^n_+)$ est un polyèdre convexe donc un fermé

$= \{Ax : x \geq 0\}$

1 Théo. de l'alternative

Des deux affirmations suivantes 1 et 1 seule est vraie

(i) $\exists x \geq 0 : \quad Ax = b$

(ii) $\exists y : \quad A^T y \geq 0$ et $b^T y < 0$

- c'est un ou exclusif

(i)	$\vee$	(ii)
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

- $\boxed{(i) \Longleftrightarrow \text{non } (ii)}$

$(i) \Longleftrightarrow b \in \{Ax : x \geq 0\} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} b \in \{y : A^T y \geq 0\}^+$

$\Longleftrightarrow b^T y \geq 0, \ \forall y \text{ t.q. } A^T y \geq 0 \Longleftrightarrow \text{non } (ii)$ $\square$

Ex 9

Trouver une solution (ou un point stationnaire, c-à-d qui vérifie les conditions de KKT) du problème

$$\begin{cases} \min \; x_2^2 - x_1^2 \\ x_2 \geq 2|x_1| - \varepsilon \end{cases}$$

en fonction de $\varepsilon \in \mathbb{R}$

On applique les CN 1 (KKT)

Contrainte non différentiable remplacée par

$$\begin{cases} 2x_1 \leq x_2 + \varepsilon \\ -2x_1 \leq x_2 + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min \; x_2^2 - x_1^2 \\ 2x_1 \leq x_2 + \varepsilon & \leftarrow \lambda_1 \\ -2x_1 \leq x_2 + \varepsilon & \leftarrow \lambda_2 \end{cases}$$

On écrit le Lagrangien du problème

$$\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \lambda) \longmapsto \ell(x, \lambda) = x_2^2 - x_1^2 + \lambda_1 (2x_1 - x_2 - \varepsilon) + \lambda_2 \underbrace{(-2x_1 - x_2 - \varepsilon)}$$

⚠ au signe

$$(KKT) \begin{cases} \nabla_x \ell(x, \lambda) = 0 \\ 0 \leq \lambda \perp c(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 0 \leq \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - \varepsilon \\ -2x_1 - x_2 - \varepsilon \end{pmatrix} \leq 0 \end{cases}$$

$$\underset{(KKT)}{\iff} \begin{cases} -2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - \varepsilon \leq 0 \\ -2x_1 - x_2 - \varepsilon \leq 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 (2x_1 - x_2 - \varepsilon) = 0 \\ \lambda_2 (-2x_1 - x_2 - \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

$\Big)$ il y a 2^2 cas à analyser

Cas 1 $\lambda_1 = 0 \,,\ \lambda_2 = 0$

$(KKT) \Rightarrow$ $x = 0$, OK si $\varepsilon \geq 0$

Cas 2 $\lambda_1 = 0 \,,\quad 2x_1 + x_2 + \varepsilon = 0$

$$(KKT) \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda_2 = -2x_2 \\ -2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} + \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\lambda_2 \geq 0 \qquad \lambda_2 = \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}\varepsilon \qquad x_2 = \frac{\varepsilon}{3} \qquad \varepsilon \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 - \varepsilon \leq 0$$

$$-\frac{4}{3}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon \leq 0$$

$$-\frac{2}{3}\varepsilon \leq 0 \implies \varepsilon \geq 0 \text{ OK}$$

Cas 3 $\quad 2x_1 - x_2 - \varepsilon = 0 \,,\ \lambda_2 = 0$

$$\lambda = \left(\frac{2\varepsilon}{3}, 0\right)$$

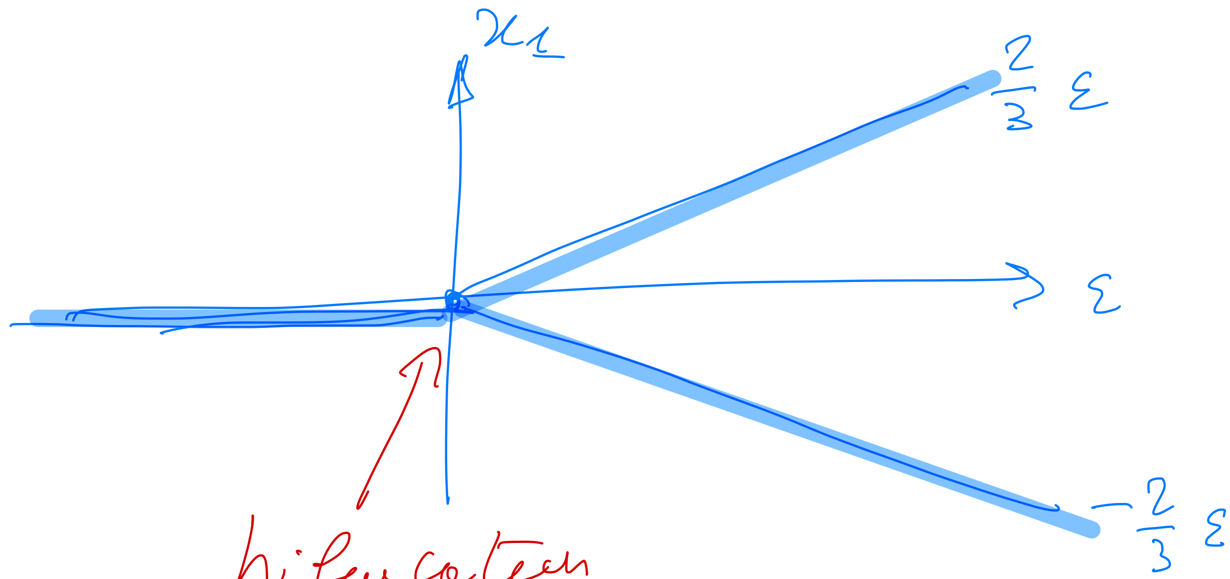
$$x = \left(\frac{2\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

OK si $\varepsilon \geq 0$

Cas 4 $\quad 2x_1 - x_2 - \varepsilon = 0 \,,\ 2x_1 + x_2 + \varepsilon = 0$

$$\lambda = (-\varepsilon, -\varepsilon) \rightarrow \text{OK si } \varepsilon \leq 0$$

$$x = (0, -\varepsilon)$$



bifurcation
des points stationnaires

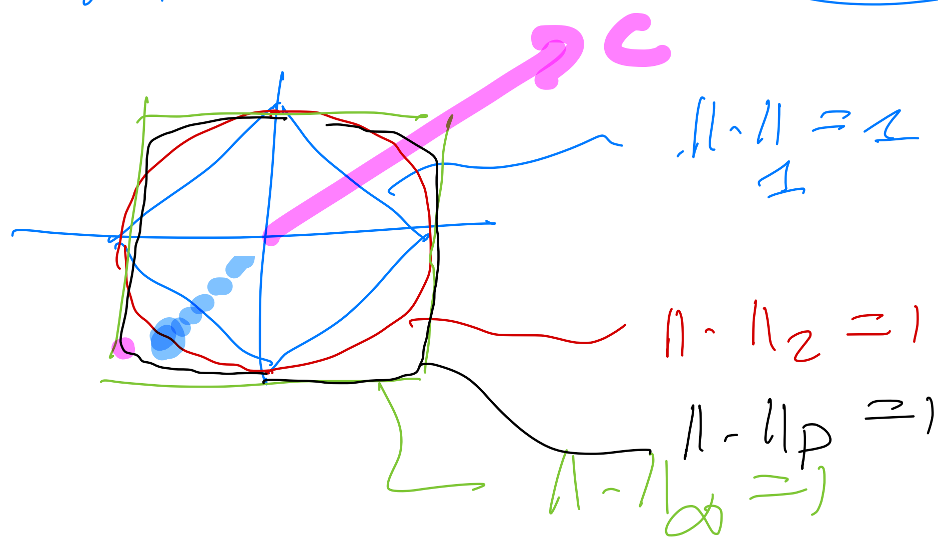
$\boxed{\text{Ex } 8.2}$

$$\begin{cases} \min \; c^T x \\ \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

$c, x \in \mathbb{R}^n$

$c \neq 0$

$\|\cdot\|_1$



Considérons le cas des normes ℓ_p, $1 < p < \infty$

$$\begin{cases} \min \; c^T x \\ \|x\|_p \leq 1 \end{cases}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \leq 1 \iff \underbrace{\frac{1}{p}\left(\sum |x_i|^p - 1\right)}_{\leq 0}$$

$$\ell(\underbrace{x}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{\lambda}_{\mathbb{R}}) = c^T x + \frac{\lambda}{p}\left(\sum \underbrace{|x_i|^p}_{} - 1\right)$$

$$(|x_i|^2)^{p/2}$$

$$(KKT)\quad \begin{cases} \nabla_x \ell(x, \lambda) = 0 \\ 0 \le \lambda \perp (\|x\|_p - 1) \le 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \\ \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \end{array}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\ell(x, \lambda) = c_i + \frac{\lambda}{\cancel{p}} \frac{\cancel{p}}{\cancel{2}} (|x_i|^2)^{\frac{p}{2}-1} \cancel{2} x_i$$

$$= c_i + \lambda x_i |x_i|^{p-2}$$

$$\begin{cases} c_i + \lambda x_i |x_i|^{p-2} = 0, \\ \lambda \ge 0, \quad \|x\|_p \le 1 \\ \lambda(\|x\|_p - 1) = 0 \end{cases} \quad \forall i$$

$\Rightarrow \quad \lambda \neq 0 \qquad (\text{car } c \neq 0)$

exposant conjugué

$$\frac{1}{p'} := \frac{p-1}{p}$$

$\Rightarrow \quad \|x\|_p = 1$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sgn} x_i = -\operatorname{sgn} c_i$

$\Rightarrow \quad |c_i| = \lambda\, |x_i|^{p-1} \qquad \Big|\ \left(\ \right)^{\frac{p}{p-1}} = p'$

$$|c_i|^{p'} = \lambda^{p'}\, |x_i|^{p}$$

$$\|c\|_{p'}^{p'} = \lambda^{p'}\, \|x\|_p^p = \lambda^{p'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \|c\|_{p'}}$$

$$\Rightarrow \quad x_i = -(\operatorname{sgn} c_i)\,|x_i|$$

$$= -(\operatorname{sgn} c_i)\left(\frac{|c_i|}{\|c\|_{p'}}\right) \qquad \frac{1}{p-1} = \frac{p'}{p}$$

$$\boxed{x_i = -(\operatorname{sgn} c_i)\left(\frac{|c_i|}{\|c\|_{p'}}\right)^{p'/p}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$p = 2 \Rightarrow p' = 2$$

$$x_i = -\operatorname{sgn} c_i \frac{|c_i|}{\|c\|_2} = \frac{-c_i}{\|c\|_2}$$

$$x = \frac{-c}{\|c\|_2}$$

Inégalité de Hölder

$\underline{\forall \|x\|_p \leq 1}$ on a $\quad c^T x \geq c^T \bar{x}$ par optimalité de $\bar{x}$

$$c^T x \geq -\sum_i |c_i| \frac{|c_i|^{p'/p}}{\|c\|_{p'}^{p'/p}} \qquad \frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$$

$$= -\sum_i \frac{|c_i|^{\frac{p'}{p}+1}}{\|c\|_{p'}^{p'/p}} \qquad = \frac{1}{p-1}+1 = \frac{p}{p-1} = p'$$

$$= -\sum_i \frac{|c_i|^{p'}}{\|c\|_{p'}^{p'/p}}$$

$$= -\frac{\|c\|_{p'}^{p'}}{\|c\|_{p'}^{p'/p}} = -\|c\|_{p'}^{p'-\frac{p'}{p}} \qquad p'-\frac{p'}{p} = p'\left(1-\frac{1}{p}\right) = p'\,\frac{p-1}{p} = 1$$

$= -\|c\|_{p'}$

$\underline{\forall \|x\|_p \leq 1}$ on a $c^T x \geq -\|c\|_{p'}$

$-c^T x \leq \|c\|_{p'}$

$x \to -x$ $\quad |c^T x| \leq \|c\|_{p'}$

$\forall x \neq 0, \quad \left| c^T \frac{x}{\|x\|_p} \right| \leq \|c\|_{p'}$

$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \boxed{|c^T x| \leq \|x\|_p \|c\|_{p'}}$

inégalité de Hölder