SOLUTIONS

1 Propriétés de convexité

1. Soit $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$. Le point x_1 est combinaison convexe de x_t et x_0 : $x_1 = (1/t)x_t + ((t-1)/t)x_0$. Dès lors $f(x_1) \leqslant (1/t)f(x_t) + ((t-1)/t)f(x_0)$, qui est le résultat attendu.

2. La condition est clairement suffisante (on retrouve la définition en prenant $m = 2$). Le fait que la condition est nécessaire peut se montrer par récurrence sur m. Elle est vraie pour $m = 2$. Soit alors $t = \sum_{i=2}^{m} t_i$. Si $t = 0$ la condition est triviale. Traitons le cas où $t \in \left]0, 1\right]$. Par convexité de $\operatorname{dom} f$, $y := \sum_{i=1}^{m}(t_i/t)x_i \in \operatorname{dom} f$. D'autre part, comme $t_1 + t = 1$, $f(\sum_{i=1}^{m} t_i x_i) = f(t_1 x_1 + ty) \leqslant t_1 f(x_1) + tf(y)$ [par convexité de f] $\leqslant \sum_{i=1}^{m} t_i f(x_i)$ [par l'hypothèse de récurrence].

3. Comme le logarithme est croissant, il revient au même de montrer que
$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \log a_i\right) \leqslant \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right),$$
ce qui se déduit de la concavité du logarithme.

2 Cônes duaux

1. - Soit $d \in P^+$. En prenant $x \in P$ tel que $x_1 = \cdots = x_j < 0$ et $x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$ ($j < n$) on trouve que $\sum_{i=1}^{j} d_i \leqslant 0$. En prenant $x \in P$ tel que $x_1 = \cdots = x_n$ quelconque dans $\mathbb{R}$ on trouve que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$.
   - La réciproque est astucieuse. Soient $x \in P$ et $d \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\sum_{i=1}^{j} d_i \leqslant 0$, pour $j = 1, \ldots, n-1$, et $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$. En sommant les inégalités
   $$\left(\sum_{i=1}^{j} d_i\right) x_j \geqslant \left(\sum_{i=1}^{j} d_i\right) x_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$
   on obtient
   $$\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i\right) x_n = -d_n x_n,$$
   où la dernière égalité vient du fait que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$. Donc $d^{\mathsf{T}} x \geqslant 0$.

2. Clair en testant les éléments de $(\mathbb{R}^n_+)^+$ sur les vecteurs de base de $\mathbb{R}^n$.

3. Soient $K := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant x_n^2,\ x_n \geqslant 0\}$ et $d \in K^+$. En testant d sur $(0, \ldots, 0, 1) \in K$, on obtient que $d_n \geqslant 0$. En testant d sur $(-d_1, \ldots, -d_{n-1}, (d_1^2 + \cdots + d_{n-1}^2)^{1/2}) \in K$, on obtient $(d_1^2 + \cdots + d_{n-1}^2)^{1/2} d_n \geqslant d_1^2 + \cdots + d_{n-1}^2$. On en déduit que $d \in K$ et donc $K^+ \subset K$. Inversement, soient d et $x \in K$. Par Cauchy-Schwarz, $-\sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i \leqslant \|(d_1, \ldots, d_{n-1})\| \, \|(x_1, \ldots, x_{n-1})\| \leqslant d_n x_n$. Donc $d^{\mathsf{T}} x \geqslant 0$ et $K \subset K^+$.

4. Soit $D \in (\mathcal{S}_+^n)^+$. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $vv^\mathsf{T} \in \mathcal{S}_+^n$, si bien que $0 \leqslant \langle D, vv^\mathsf{T}\rangle = v^\mathsf{T} D v$. Comme v est arbitraire, on en déduit que $D \in \mathcal{S}_+^n$; donc $(\mathcal{S}_+^n)^+ \subset \mathcal{S}_+^n$. Inversement, si $D \in \mathcal{S}_+^n$ et $A \in \mathcal{S}_+^n$, on a nécessairement $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^\mathsf{T}$ (décomposition spectrale) avec des $\lambda_i \geqslant 0$. Dès lors, $\langle D, A\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^\mathsf{T} D v_i \geqslant 0$, car $D \in \mathcal{S}_+^n$. On en déduit que $\mathcal{S}_+^n \subset (\mathcal{S}_+^n)^+$.

3 Autour du lemme de Farkas

1. Conséquence immédiate du fait que l'image de l'orthant positif par une application linéaire est fermée (algébriquement, si A est une matrice, l'image $\{Ax : x \geqslant 0\}$ est fermée).

2. Observons que $A(K) = \cup_{r \geqslant 0} A\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2,\ x_3 = r\}$, si bien que $A(K)$ est une réunion de disques de $\mathbb{R}^2$, de centre $(0, r)$ et de rayon r. On en déduit que $A(K) = \{0\} \cup \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 > 0\}$.

3. (i) revient à dire que $b \in \{Ax : x \geqslant 0\}$. D'après le lemme de Farkas, ce dernier ensemble est $\{y : A^\mathsf{T} y \geqslant 0\}^+$, si bien que (i) revient à dire que $\forall y$ tel que $A^\mathsf{T} y \geqslant 0$ on a $b^\mathsf{T} y \geqslant 0$, ce qui est l'affirmation opposée de (ii).

4. Par homogénéité, le point (i) est équivalent à l'existence de x tel que (e est le vecteur dont toutes les composantes valent 1)

$$Ax = 0, \quad Bx \leqslant 0 \quad \text{et} \quad Cx \leqslant -e$$

et donc à l'existence de x, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$ tels que

$$Ax = 0, \quad Bx + y = 0 \quad \text{et} \quad Cx + z = -e,$$

ce qui s'exprime matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & I & 0 \\ C & 0 & I \end{pmatrix} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{m_B} \times \mathbb{R}_+^{m_C}).$$

Par le lemme de Farkas, cette dernière condition équivaut à dire que le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e \end{pmatrix}^\mathsf{T} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -e^\mathsf{T} \gamma$$

est positif pour tout (α, β, γ) vérifiant

$$\begin{pmatrix} A^\mathsf{T} & B^\mathsf{T} & C^\mathsf{T} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{m_B} \times \mathbb{R}_+^{m_C})^+ = \{0\} \times \mathbb{R}_+^{m_B} \times \mathbb{R}_+^{m_C},$$

c'est-à-dire vérifiant $A^\mathsf{T}\alpha + B^\mathsf{T}\beta + C^\mathsf{T}\gamma = 0$, $\beta \geqslant 0$ et $\gamma \geqslant 0$. On a donc démontré que (i) est équivalent au fait que $A^\mathsf{T}\alpha + B^\mathsf{T}\beta + C^\mathsf{T}\gamma = 0$, $\beta \geqslant 0$ et $\gamma \geqslant 0$ impliquent que $\gamma = 0$, ce qui est bien l'opposé de (ii).

4 Quotient de Rayleigh

1. On a $q(x) = q(\alpha x)$, pour $x \neq 0$ et $\alpha > 0$, si bien que (P_1) revient à minimiser q sur la sphère unité de $\mathbb{E}$. Celle-ci étant compacte ($\dim \mathbb{E} < +\infty$) et q y étant continue, (P_1) a au moins une solution. De même pour (P_2).

2. (i) La contrainte est qualifiée en tout point admissible x, car

$$c'(x)^* : \alpha \in \mathbb{R} \mapsto 2\alpha x \in \mathbb{E}$$

est injective.

(ii) On introduit comme lagrangien du problème (P_1') :

$$(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \langle Ax, x \rangle - \lambda(\|x\|^2 - 1).$$

Alors, le point $\bar{x}$ est un point stationnaire de (P_1') si, et seulement si, il existe un multiplicateur $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tel que les conditions d'optimalité de Lagrange soient vérifiées, à savoir : il existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tel que

$$A\bar{x} = \bar{\lambda}\,\bar{x} \qquad \text{et} \qquad \|\bar{x}\| = 1.$$

Ces conditions reviennent à dire que $\bar{x}$ est un vecteur propre unitaire de A de valeur propre $\bar{\lambda}$. De plus, la valeur critique s'écrit

$$\langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle = \bar{\lambda}.$$

(iii) Soit $\mathrm{val}(P_1')$ la valeur optimale du problème (P_1'). Comme ce problème a une solution (point 1), disons $\bar{x}$, il découle des points (i) et (ii), que $\bar{x}$ est un vecteur propre de A de valeur propre $\bar{\lambda} := \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle = \mathrm{val}(P_1')$.

Montrons maintenant que $\bar{\lambda}$ est la plus petite valeur prore de A. Si (x, λ) est un couple propre de A avec x unitaire (i.e., $\|x\| = 1$), on a

$$\begin{array}{rcll} \lambda & = & \langle Ax, x \rangle & [(x, \lambda) \text{ est propre unitaire}] \\ & \geqslant & \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle & [\text{optimalité de } \bar{x}] \\ & = & \bar{\lambda}. & \end{array}$$

Donc $\bar{\lambda}$ est bien la plus petite valeur propre de A.

Il reste à montrer que si x_1 est un vecteur propre unitaire de valeur propre minimale $\bar{\lambda}$, alors x_1 est solution de (P_1'). C'est bien le cas, car alors la valeur du critère vaut $\langle Ax_1, x_1 \rangle = \bar{\lambda} = \mathrm{val}(P_1')$ (démontré ci-dessus) ; c'est donc la valeur optimale, si bien que x_1 est solution de (P_1').

On raisonne de la même manière pour (P_2').

(iv) $[\Rightarrow]$ *On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a deux vecteurs propres unitaires orthogonaux, disons $\bar{x}$ et $\bar{x}'$, correspondant à la plus petite valeur prore $\bar{\lambda}$.*

On cherche à montrer que

$$\exists\, d \in T_{\bar{x}}X \setminus \{0\} : \qquad \langle \nabla^2_{xx}\ell(\bar{x}, \bar{\lambda})d, d \rangle = 0,$$

ce qui contredira les CS2. Ici, $T_{\bar{x}}X = \{d : \langle \bar{x}, d \rangle = 0\}$ (par la qualification de la contrainte) et $\nabla^2_{xx}\ell(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 2(A - \bar{\lambda}I)$. On voit qu'il suffit de prendre $d = \bar{x}'$.

[$\Leftarrow$] *Si la plus petite valeur propre $\bar\lambda$ de A est simple, les CS2 sont vérifiées au vecteur propre $\bar x$ associé.*

En effet, si $h \neq 0$ est dans l'espace tangent, on a $\langle \bar x, h\rangle = 0$. On peut décomposer h sur une base orthonormale de vecteurs propres $\{\bar x_i\}$ incluant $\bar x = \bar x_1$ et de valeurs propres associées $\bar\lambda_i$:

$$h = \sum_{i>1} \langle h, \bar x_i\rangle \bar x_i.$$

Alors

$$\langle \nabla^2_{xx}\ell(\bar x, \bar\lambda)h, h\rangle = \langle (A - \bar\lambda I)h, h\rangle = \sum_{i>1} \langle h, \bar x_i\rangle^2 (\bar\lambda_i - \bar\lambda) > 0,$$

car $\bar\lambda_i > \bar\lambda$ pour tout $i > 1$ et, h étant non nul, un des $\langle h, \bar x_i\rangle \neq 0$.

3. La matrice A étant auto-adjointe, $\mathbb{E}$ a une base orthonormale $\{\bar x_i\}_i$ (en particulier $\langle \bar x_i, \bar x_j\rangle = \delta_{ij}$), formée de vecteurs propres $\bar x_i$ de A, de valeurs propres associées $\bar\lambda_i$. On peut donc écrire tout vecteur $x \in \mathbb{E}$ sous la forme $x = \sum_i \alpha_i \bar x_i$. Alors

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|^2=1} \|Ax\|^2 = \sup_{\sum_i \alpha_i^2 = 1} \sum_i \alpha_i^2 \bar\lambda_i^2 = \sup_{\|\alpha\|_2=1} \alpha^{\mathsf T} \operatorname{Diag}(\bar\lambda_i^2)\alpha = \max_i \bar\lambda_i^2.$$

On a donc (3.2).

Lorsque $A \succcurlyeq 0$, toutes les valeurs propres $\bar\lambda_i \geqslant 0$, d'où (3.3).

Lorsque $A \succ 0$, les valeurs propres de A sont les inverses de celles de A^{-1}, si bien que $\lambda_{\min}(A) = 1/\lambda_{\max}(A^{-1}) = 1/\|A^{-1}\|$, c'est-à-dire (3.4).

5 Éliminations hasardeuses de variable ou contrainte

Exemple 1

On note $c(x) = \alpha\, x_1^2 - x_2$ la contrainte.

1. (a) La jacobienne de la contrainte

$$\begin{pmatrix} 2\alpha x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

est surjective, donc la contrainte est qualifiée en tout point.

(b) Avec le lagrangien

$$\ell(x, \lambda) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda(\alpha\, x_1^2 - x_2),$$

on obtient les conditions d'optimalité suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} (\lambda\alpha + 1)x_1 = 0 \\ x_2 = 1 + \frac{\lambda}{2} \\ \alpha\, x_1^2 = x_2 \end{array}\right. \tag{3.7}$$

et le hessien du lagrangien est la matrice

$$L := \begin{pmatrix} 2(\lambda\alpha + 1) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La première équation de (3.7) suggère de considérer les deux cas suivants.

- **Cas 1** : $x_1 = 0$. Alors $x_2 = 0$ et $\lambda = -2$. Il faut regarder le hessien du lagrangien pour des $h \in \{h : c'(x)h = 0\} = \{h : h_2 = 0\}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \alpha < 1/2 &\implies \bar{x} = 0 \text{ est un minimum local strict} \\ \alpha > 1/2 &\implies \bar{x} = 0 \text{ est un maximum local strict.} \end{aligned}$$

- **Cas 2** : $\lambda = -1/\alpha$. Alors

$$\bar{x} = \left(\pm \frac{\sqrt{\alpha - 1/2}}{\alpha}, 1 - \frac{1}{2\alpha} \right),$$

  ce qui n'est acceptable que si $\alpha \geqslant 1/2$. Si $\alpha > 1/2$, $h^{\mathsf{T}} L h = 2h_2^2 > 0$ pour tout $h \in \mathcal{N}(c'(x)) \setminus \{0\} = \{h \neq 0 : 2\alpha x_1 h_1 = h_2\}$ (car alors $h_2 \neq 0$) et donc les points stationnaires trouvés sont bien des minima locaux stricts.

En résumé, on a les cas suivants :

- si $0 < \alpha \leqslant 1/2$, il y a un unique minimum $\bar{x} = 0$.
- si $\alpha > 1/2$, il y a un unique maximum local strict en $\bar{x} = 0$ et deux minima locaux (en réalité globaux) stricts en $\bar{x} = (\pm(\sqrt{\alpha - 1/2})/\alpha, 1 - 1/(2\alpha))$.

2. L'unique solution de (3.6) est

$$\bar{x}_2 = 1 - \frac{1}{2\alpha}.$$

- Si $\alpha \geqslant 1/2$, on retrouve bien la solution $\bar{x}_2$ trouvée ci-dessus.
- Si $0 < \alpha < 1/2$, alors $\bar{x}_2 < 0$ qui ne vérifie pas la contrainte de (3.5) et n'est donc pas solution de (3.5).

Première explication (difficilement généralisable). Il y a dans (3.5), une contrainte implicite $x_2 \geqslant 0$ qui n'est plus nécessairement satisfaite après élimination de x_1^2, puisque l'on a minimisé le critère résultant sur $\mathbb{R}$.

Si l'on ajoutait la contrainte $x_2 \geqslant 0$ au problème (3.6), on trouverait alors $\bar{x}_2 = 0$, c'est-à-dire la solution trouvée ci-dessus.

Deuxième explication (plus convaincante). Puisque l'on a écrit x_1 comme une fonction de x_2, on peut voir l'opération réalisée comme une paramétrisation de la variété des contraintes X par $x_2 \in \mathbb{R} \mapsto (\pm\sqrt{x_2/\alpha}, x2) \in X$. Mais cette paramétrisation est illicite : elle a deux branches et n'est pas définie pour des $x_2 < 0$.

Par ailleurs, il n'y a pas de problème si l'on paramétrise X par $x_1 \in \mathbb{R} \mapsto (x_1, \alpha x_1^2) \in X$. Ceci conduit au problème quartique

$$\min_{x_1} x_1^2 + \left(\alpha x_1^2 - 1\right)^2,$$

dont les points stationnaires sont

- $x_1 = 0$, qui est un minimum global strict si $\alpha \leqslant 1/2$ (le critère est alors convexe) et un maximum local strict si $\alpha > 1/2$,
- $x_1 = \pm(\sqrt{\alpha - 1/2})/\alpha$, qui requiert d'avoir $\alpha \geqslant 1/2$ et qui sont des minima globaux stricts.

Conclusion : se méfier de l'élimination de contrainte, qui peut conduire à de fausse solution.

Exemple 2

1. Calculons la solution par les conditions d'optimalité et le lagrangien $\ell(x,y,\lambda) = e_1^\mathsf{T} Ay + \frac{1}{2}\|x\|_2^2 + \lambda^\mathsf{T}(x - Ay)$. On obtient le système
$$\begin{cases} x + \lambda = 0 \\ A^\mathsf{T} e_1 = A^\mathsf{T}\lambda \\ x = Ay. \end{cases}$$
On en déduit que
$$x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad y = -1/2 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$
2. Le problème en $y \in \mathbb{R}$ s'écrit
$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \; y + y^2,$$
dont l'unique solution est $y = -1/2$ comme dans la version sans élimination.
3. La condition d'optimalité conduit directement à
$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
L'élimination a fait perdre l'information disant que x doit être dans l'image de A.

De manière générale, il est tout à fait licite de remplacer dans l'objectif une variable par sa valeur donnée *explitement* par les contraintes. Plus précisément, on a
$$\boxed{\inf_{\substack{(x,y,z)\in\mathcal{A}\\ x=\varphi(y)}} f(x,y,z) = \inf_{\substack{(y,z)\\ (\varphi(y),y,z)\in\mathcal{A}}} f(\varphi(y),y,z).} \tag{3.8}$$
En effet, supposons que les problèmes aient une solution (si les problèmes n'ont pas de solution, on pourra raisonner à $\varepsilon > 0$ de leur valeur optimale). Par définition, (x_*, y_*, z_*) est solution du problème à gauche dans (3.8) si, et seulement si,
$$\begin{cases} (x_*, y_*, z_*) \in \mathcal{A} \\ x_* = \varphi(y_*) \\ f(x_*, y_*, z_*) \leqslant f(x,y,z), \quad \text{pour tout } (x,y,z) \in \mathcal{A} \text{ vérifiant } x = \varphi(y). \end{cases} \tag{3.9}$$
Avec cette formulation de l'optimalité, on comprend mieux que l'on peut remplacer x_* par sa valeur $\varphi(y_*)$ et x par sa valeur $x = \varphi(y)$, ce qui conduit à
$$\begin{cases} (\varphi(y_*), y_*, z_*) \in \mathcal{A} \\ f(\varphi(y_*), y_*, z_*) \leqslant f(\varphi(y), y, z), \quad \text{pour tout } (y,z) \text{ vérifiant } (\varphi(y), y, z) \in \mathcal{A}. \end{cases} \tag{3.10}$$
Par définition, cette formulation veut dire que (y_*, z_*) est solution du problème à droite dans (3.8) ; par ailleurs il est clair que les valeurs optimales sont identiques. De même, si (y_*, z_*) est solution du problème à droite dans (3.8), on a (3.10). Puis en posant $x_* = \varphi(y_*)$ et $x = \varphi(y)$, on trouve (3.9) et donc (x_*, y_*, z_*) est solution du problème à gauche dans (3.8).

À l'inverse, par exemple, on n'a que
$$\inf_{y=\varphi(x)} f(\varphi(x), y) \geqslant \inf_y f(y,y).$$
car dans le problème de droite on explore le domaine de f en des valeurs qui ne sont peut-être pas dans l'image de φ. Et si le problème de droite a une solution, elle peut être en dehors de l'image de φ.

6 Interprétation géométrique des conditions d'optimalité de KKT

D'après les conditions du premier ordre, $-\nabla f(x_*)$ est dans le cône engendré par les gradients des contraintes actives en x_* (le cône du dessin C, puisque $c_i(\cdot) \leqslant 0$ dans X et que le gradient de c_i est dirigé vers les valeurs croissantes de c_i). Donc $\nabla f(x_*)$ est dans le cône du dessin D.

Le cône du dessin B est le cône tangent à X en x_*.

7 Signification des multiplicateurs

1. Par admissibilité et complémentarité sur le problème (P_p), on a

$$\bar{\lambda}_E(p)^\mathsf{T}\,(c_E(\bar{x}(p)) + p_E) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_I(p)^\mathsf{T}\,(c_I(\bar{x}(p)) + p_I) = 0.$$

   On en déduit que

$$\ell(\bar{x}(p), \bar{\lambda}(p)) + \bar{\lambda}(p)^\mathsf{T} p = f(\bar{x}(p)).$$

2. On a alors en dérivant :

$$(f \circ \bar{x})'(p) \cdot q = \ell'_x(\bar{x}(p), \bar{\lambda}(p)) \cdot \bar{x}'(p) \cdot q + c(\bar{x}(p))^\mathsf{T} \bar{\lambda}'(p) \cdot q + \big(\bar{\lambda}'(p) \cdot q\big)^\mathsf{T} p + \bar{\lambda}(p)^\mathsf{T} q.$$

   En $p = 0$, l'identité devient :

$$(f \circ \bar{x})'(0) \cdot q = \ell'_x(\bar{x}, \bar{\lambda}) \cdot \bar{x}'(0) \cdot q + c(\bar{x})^\mathsf{T} \bar{\lambda}'(0) \cdot q + \bar{\lambda}^\mathsf{T} q.$$

   Par ailleurs

   - $\nabla_x \ell(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$, ce qui permet d'éviter le calcul de $\bar{x}'(0)$ (c'est la raison même de l'utilisation du lagrangien dans cette approche),
   - $c_{E \cup I_*^0}(\bar{x}) = 0$,
   - $\bar{\lambda}'_{I \setminus I_*^0}(0) = 0$ car pour $i \in I \setminus I_*^0$ et p petit, $c_i(\bar{x}(p)) + p_i < 0$ et donc $\bar{\lambda}_{I \setminus I_*^0}(p) = 0$ (on peut aussi dériver en $p = 0$ l'une des fonctions $p \in \mathbb{R}^m \mapsto c_i(\bar{x}(p))\bar{\lambda}_i(p) \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}^m \mapsto [c_i(\bar{x}(p)) + p_i]\bar{\lambda}_i(p) \in \mathbb{R}$, qui sont nulles pour $i \in I \setminus I_*^0$ et p voisin de zéro).

   On en déduit

$$\nabla_p (f \circ \bar{x})(0) = \bar{\lambda}.$$

   Interprétation : $\bar{\lambda}_i$ donne la variation de $\min(P_0)$ lorsqu'on perturbe la contrainte i comme dans (P_p). En particulier, si $\bar{\lambda}_i$ est grand, $\min f$ est très sensible à une erreur/modification sur/de la i-ième contrainte. La figure 4 permet d'interpréter géométriquement la condition $\lambda_i \geqslant 0$ pour $i \in I$.

3. Figure A. On voit facilement que $v(p) := \inf\{\|x\|_2^2 : x_1 \geqslant p\} = (p^+)^2$, si bien que $\bar{\lambda} = v'(0) = 0$.

   Figure B. La solution est $\bar{x} = (1, 0)$. Lorsqu'on perturbe la contrainte en $x_1 \geqslant 1 + p$, la solution devient $(1 + p, 0)$ et la valeur optimale $v(p) = (1 + p)^2$. Le multiplicateur optimal vaut donc $\bar{\lambda} = v'(0) = 2$.

   Figure C. La solution est toujours $\bar{x} = (1, 0)$.

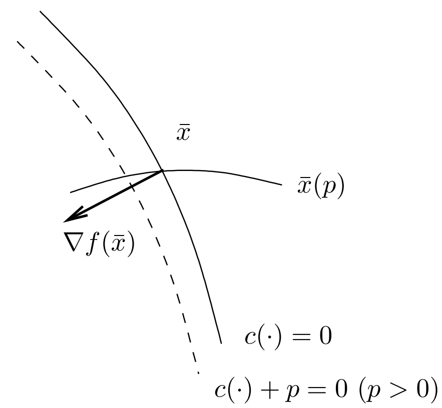

Fig. 4: Signification des multiplicateurs

- Comme à la figure B, on obtient $\bar{\lambda}_1 = 2$.
- Le problème perturbé $\inf\{\|x\|_2^2 : x_1 \geqslant 1,\ x_2 + p \leqslant 0,\ x_2 \geqslant x_1 - 2\}$ a pour solution $(1, -p)$ si $p \geqslant 0$ et $(1, 0)$ si $p < 0$. On a donc $v(p) = 1 + (p^+)^2$, si bien que $\bar{\lambda}_2 = v'(0) = 0$.
- Comme la troisième contrainte est inactive, la solution et le coût optimal ne changent pas lorsque l'on perturbe la contrainte : $v(p) := \inf\{\|x\|_2^2 : x_1 \geqslant 1,\ x_2 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant x_1 - 2 + p\} = 1$ pour $|p|$ petit, donc $\bar{\lambda}_3 = v'(0) = 0$.

8 Minimisation d'une fonction linéaire sur une boule

1. Le première étape consiste à récrire la contrainte $\|x\|_1 \leqslant 1$ de manière différentiable. On a
$$\|x\|_1 \leqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, v \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant v \text{ et } \textstyle\sum_{i=1}^n v_i = 1,$$
où $|x|$ est le vecteur dont la i-ième composante est $|x_i|$. On préfère l'inégalité $|x| \leqslant v$ à l'égalité pour éviter les contraintes combinatoires (non convexes) $x_i = v_i$ ou $x_i = -v_i$. On récrit ensuite $|x| \leqslant v$ sous forme différentiable :
$$\|x\|_1 \leqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, v \in \mathbb{R}^n : -v \leqslant x \leqslant v \text{ et } \textstyle\sum_{i=1}^n v_i = 1.$$
Le problème est donc équivalent au suivant
$$\begin{cases} \min_{(x,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} c^\mathsf{T} x \\ \sum_{i=1}^n v_i = 1 \\ -v \leqslant x \leqslant v. \end{cases}$$
En utilisant le lagrangien
$$\ell(x, v, \lambda, \alpha, \beta) = c^\mathsf{T} x + \lambda \left(\sum_{i=1}^n v_i - 1 \right) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - v_i) - \sum_{i=1}^n \beta_i (x_i + v_i),$$

on obtient les conditions d'optimalité suivantes

$$\begin{cases} (a) & c+\alpha-\beta=0 \\ (b) & \lambda e-\alpha-\beta=0 \\ (c) & \sum_{i=1}^n\, v_i=1 \\ (d) & -v\leqslant x\leqslant v \\ (e) & \alpha\geqslant 0, \quad \beta\geqslant 0 \\ (f) & \alpha_i(x_i-v_i)=0, \quad \beta_i(x_i+v_i)=0, \quad \forall i, \end{cases}$$

où $e=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$. Les équations (a) et (b) sont équivalentes à

$$\alpha=\frac{1}{2}(\lambda e-c) \qquad \text{et} \qquad \beta=\frac{1}{2}(\lambda e+c). \tag{3.11}$$

Par (3.11) et (e), on voit que $\lambda\geqslant\|c\|_\infty$. Si $\lambda>\|c\|_\infty$, on voit sur (3.11) que $\alpha>0$ et $\beta>0$; on déduirait alors de (f) que, pour tout i : $x_i=v_i=-v_i$, donc $x_i=v_i=0$, ce qui contredirait (c). On a donc démontré que

$$\lambda=\|c\|_\infty.$$

On distinguent les cas suivants.

- Si $|c_i|<\|c\|_\infty$, alors $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$, puis $x_i=v_i=-v_i$ par (e), donc $x_i=v_i=0$.
- Si $c_i=\|c\|_\infty>0$, alors $\alpha_i=0$, $\beta_i>0$, donc $x_i=-v_i\leqslant 0$.
- Si $c_i=-\|c\|_\infty<0$, alors $\alpha_i>0$, $\beta_i=0$, donc $x_i=v_i\geqslant 0$.

Si on note $I:=\{i:|c_i|=\|c\|_\infty\}$, les solutions x vérifient

$$\boxed{\|x\|_1=1, \quad x_{I^c}=0 \quad \text{et} \quad x_I\cdot c_I\leqslant 0,}$$

où $u\cdot v$ désigne le *produit de Hadamard* : $(u\cdot v)_i=u_iv_i$, pour tout i.

Réciproquement les x vérifiant ces conditions sont solutions du problème, car ils vérifient les conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes (a)-(f), avec α et β donnés par (3.11), $\lambda:=\|c\|_\infty$ et $v:=|x|$. En effet, les conditions (a)-(e) sont claires ; par ailleurs, si $x_i<v_i$, alors $x_i<0$, donc $i\in I$, $c_i>0$, $c_i=\|c\|_\infty$ et $\alpha_i=0$ si bien que la première condition de (f) a lieu ; de même, si $x_i>-v_i$, alors $x_i>0$, $i\in I$, $c_i<0$, $-c_i=\|c\|_\infty$ et $\beta_i=0$ si bien que la seconde condition de (f) a lieu.

Quels que soient c et $x\in\mathbb{R}^n$ de norme $\|x\|_1\leqslant 1$, on a avec $\bar{x}$ solution du problème :

$$c^\mathsf{T}x\geqslant c^\mathsf{T}\bar{x}=-\sum_{i\in I}c_i\,\mathrm{sgn}(c_i)|\bar{x}_i|=-\sum_{i\in I}|c_i||\bar{x}_i|=-\|c\|_\infty\sum_{i\in I}|\bar{x}_i|=-\|c\|_\infty.$$

On en déduit l'inégalité de Hölder : quels que soient c et $x\in\mathbb{R}^n$ on a $|c^\mathsf{T}x|\leqslant\|c\|_\infty\|x\|_1$.

2. Le lagrangien du problème s'écrit (on prend la contrainte équivalente $\frac{1}{p}\|x\|_p^p\leqslant\frac{1}{p}$ pour des questions de différentiabilité et pour éviter le facteur p après différentiation) :

$$\ell(x,\lambda)=c^\mathsf{T}x+\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p-1\right).$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent

$$\begin{cases} c_i + \lambda x_i |x_i|^{p-2} = 0 \\ 0 \leqslant \lambda \perp (\|x\|_p - 1) \leqslant 0. \end{cases}$$

Nécessairement $\lambda \neq 0$ (sinon $c = 0$ par la première équation, ce qui est contraire à l'hypothèse), donc $\|x\|_p = 1$ (complémentarité), $\lambda = \|c\|_{p'}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (première équation en valeur absolue et troisième équations) et finalement

$$\boxed{x_i = -\operatorname{sgn}(c_i) \left(\frac{|c_i|}{\|c\|_{p'}} \right)^{\frac{p'}{p}}.}$$

Dans le cas où $p = 2$, on obtient simplement

$$x = -\frac{c}{\|c\|_2}.$$

Quels que soient c et $x \in \mathbb{R}^n$ de norme $\|x\|_p \leqslant 1$, on a donc

$$c^{\mathsf{T}} x \geqslant -\sum_{i=1}^{n} c_i \operatorname{sgn}(c_i) \left(\frac{|c_i|}{\|c\|_{p'}} \right)^{\frac{p'}{p}} = -\left(\frac{1}{\|c\|_{p'}} \right)^{\frac{p'}{p}} \sum_{i=1}^{n} |c_i|^{\frac{p'}{p}+1} = -\frac{\|c\|_{p'}^{p'}}{\|c\|_{p'}^{p'/p}} = -\|c\|_{p'},$$

car $p' - p'/p = 1$. On en déduit l'inégalité de Hölder : quels que soient c et $x \in \mathbb{R}^n$ on a $|c^{\mathsf{T}} x| \leqslant \|c\|_{p'} \|x\|_p$. L'unicité de la solution du problème (c'est le calcul qui a conduit à une unique solution) implique que l'on a égalité dans l'inégalité de Hölder si, et seulement si, x est parallèle au vecteur de composante $\operatorname{sgn}(c_i)|c_i|^{p'/p}$ (qui est c si $p = 2$).

3. Il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} \min_x \sum_i c_i x_i \\ -1 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad \forall i. \end{cases}$$

Il s'agit des n problèmes indépendants :

$$\begin{cases} \min_{x_i} c_i x_i \\ -1 \leqslant x_i \leqslant 1, \end{cases}$$

dont les solutions sont

$$\boxed{x_i \begin{cases} = -1 & \text{si } c_i > 0 \\ \in [-1, 1] & \text{si } c_i = 0 \\ = 1 & \text{si } c_i < 0. \end{cases}}$$

Quels que soient c et $x \in \mathbb{R}^n$ de norme $\|x\|_\infty \leqslant 1$, on a donc

$$c^{\mathsf{T}} x \geqslant -\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} c_i c_i = -\|c\|_1.$$

On en déduit l'inégalité de Hölder : quels que soient c et $x \in \mathbb{R}^n$ on a $|c^{\mathsf{T}} x| \leqslant \|c\|_1 \|x\|_\infty$.

9 Bifurcation de solutions

1. La contrainte non différentiable peut être remplacée par les 2 contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x_2 + \varepsilon \geqslant 2x_1 \\ x_2 + \varepsilon \geqslant -2x_1. \end{cases}$$

2. La fonction f est continue, l'ensemble admissible est non vide et fermé, mais il est non borné. Montrons que f est coercive sur l'ensemble admissible (elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}^2$), ce qui suffira pour monter l'existence d'une solution. Pour des x tendant vers l'infini dans l'ensemble admissible, $x_2 \to \infty$ (mais x_1 peut rester borné). Cherchons donc une minoration de $f(x)$ en fonction de x_2. En élevant au carré $x_1 + \varepsilon \geqslant 2|x_1| \geqslant 0$, on obtient $x_2^2 + 2\varepsilon x_2 + \varepsilon^2 \geqslant 4x_1^2$ et donc

$$f(x) \geqslant \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}x_2 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Par conséquent $f(x) \to \infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$ dans l'ensemble admissible. On en déduit l'existence d'une solution.

3. Le lagrangien du problème s'écrit

$$\ell(x, \lambda) = x_2^2 - x_1^2 + \lambda_1(2x_1 - x_2 - \varepsilon) + \lambda_2(-2x_1 - x_2 - \varepsilon).$$

On en déduit les conditions d'optimalité :

$$\begin{cases} -2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0 \\ \lambda_1(2x_1 - x_2 - \varepsilon) = 0 \\ \lambda_2(-2x_1 - x_2 - \varepsilon) = 0 \\ 2x_1 - x_2 \leqslant \varepsilon \\ -2x_1 - x_2 \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Cas 1: $2x_1 - x_2 - \varepsilon = 0$ et $2x_1 + x_2 + \varepsilon > 0$. On en déduit que $\lambda_1 = \frac{2\varepsilon}{3}$, $\lambda_2 = 0$, $x_1 = \frac{2\varepsilon}{3}$ et $x_2 = \frac{\varepsilon}{3}$. C'est un point stationnaire si $\varepsilon > 0$.

Cas 2: $2x_1 - x_2 - \varepsilon < 0$ et $2x_1 + x_2 + \varepsilon = 0$. On en déduit que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{2\varepsilon}{3}$, $x_1 = -\frac{2\varepsilon}{3}$ et $x_2 = \frac{\varepsilon}{3}$. C'est un point stationnaire si $\varepsilon > 0$.

Cas 3: $2x_1 - x_2 - \varepsilon = 0$ et $2x_1 + x_2 + \varepsilon = 0$. On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = -\varepsilon$, $x_1 = 0$ et $x_2 = -\varepsilon$. C'est un point stationnaire si $\varepsilon \leqslant 0$.

Cas 4: $2x_1 - x_2 - \varepsilon < 0$ et $2x_1 + x_2 + \varepsilon > 0$. On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$. C'est un point stationnaire si $\varepsilon > 0$. C'est en fait un point-selle. En effet, le point est intérieur à l'ensemble admissible et le hessien de f y vaut

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & +2 \end{pmatrix}.$$

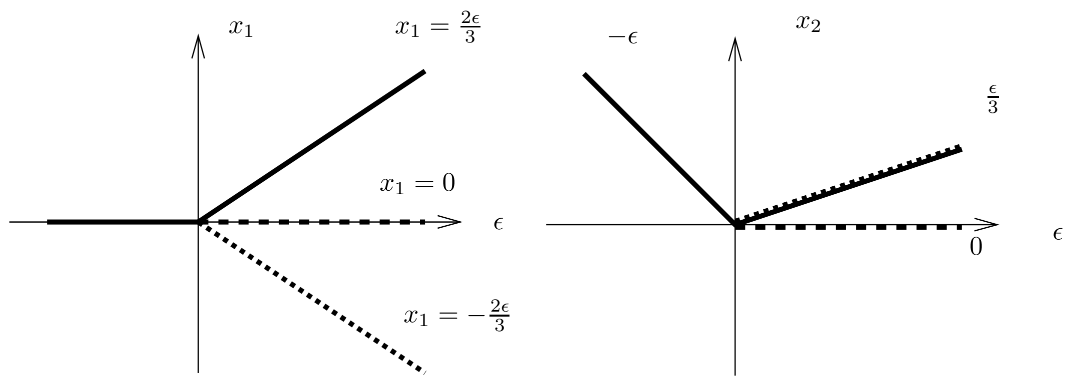

Fig. 5: Bifurcation des solutions