SOLUTIONS

1 Gradient et hessien

1. • Soit $h \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}(x+h)^\mathsf{T} A(x+h) - b^\mathsf{T}(x+h) \\ &= \frac{1}{2}x^\mathsf{T}Ax + \frac{1}{2}x^\mathsf{T}Ah + \frac{1}{2}h^\mathsf{T}Ax + \frac{1}{2}h^\mathsf{T}Ah - b^\mathsf{T}x - b^\mathsf{T}h \qquad (1.4) \\ &= f(x) + \left(\frac{1}{2}A^\mathsf{T}x + \frac{1}{2}Ax - b\right)^\mathsf{T} h + O(\|h\|^2) \\ &= f(x) + \nabla f(x)^\mathsf{T} h + O(\|h\|^2). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A^\mathsf{T} + A)x - b. \qquad (1.5)$$

Alors,

$$\nabla f(x+h) = \nabla f(x) + \frac{1}{2}(A^\mathsf{T} + A)h,$$

donc le hessien est

$$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{2}(A^\mathsf{T} + A). \qquad (1.6)$$

• On peut aussi partir du développement (1.4), c'est-à-dire

$$f(x+h) = f(x) + \left(\frac{1}{2}A^\mathsf{T}x + \frac{1}{2}Ax - b\right)^\mathsf{T} h + \frac{1}{2}h^\mathsf{T}Ah,$$

pour en déduire que

$$\nabla f(x)^\mathsf{T} h = f'(x) \cdot h = \left(\frac{1}{2}A^\mathsf{T}x + \frac{1}{2}Ax - b\right)^\mathsf{T} h, \qquad (1.7)$$

parce que c'est la partie linéaire en h de $f(x+h)$, et

$$h^\mathsf{T}\nabla^2 f(x) h = f''(x) \cdot h^2 = h^\mathsf{T}Ah, \qquad (1.8)$$

parce que c'est deux fois la partie quadratique en h de $f(x+h)$.

– De (1.7), on déduit (1.5).

– Pour le calcul du hessien, observons d'abord que pour une matrice carrée $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$(h^\mathsf{T}Mh = 0,\ \forall\, h) \qquad \not\Longrightarrow \qquad M = 0.$$

Par exemple, une matrice antisymétrique non nulle vérifie la condition à gauche de l'implication, mais pas celle à droite. En réalité, pour une matrice M réelle carrée, on a les équivalences suivantes.

$$\boxed{(h^\mathsf{T}Mh = 0,\ \forall\, h) \quad \Longleftrightarrow \quad M + M^\mathsf{T} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ est antisymétrique.}}$$

Démonstration. $[(h^\top Mh = 0,\ \forall\, h) \Rightarrow M + M^\top = 0]$ Quels que soient les vecteurs h et k, on a successivement

$$\begin{aligned} 0 &= (h+k)^\top M(h+k) \\ &= h^\top Mh + h^\top (M+M^\top)k + k^\top Mk \\ &= h^\top (M+M^\top)k. \end{aligned}$$

Comme h et k sont arbitraires, on a $M + M^\top = 0$.

$[M + M^\top = 0 \Rightarrow M$ est antisymétrique$]$ En effet, on a alors $M^\top = -M$, qui est la marque de l'antisymétrie de M.

$[M$ est antisymétrique $\Rightarrow (h^\top Mh = 0,\ \forall\, h)]$ Si M est antysymétrique, on a $h^\top Mh = (h^\top Mh)^\top = -h^\top Mh$ et donc $h^\top Mh = 0$. □

On peut maintenant trouver le hessien à partir de (1.8). Puisque pour tout h, on a

$$h^\top \nabla^2 f(x) h = h^\top \frac{A + A^\top}{2} h,$$

et que $\nabla^2 f(x)$ et $(A + A^\top)/2$ sont symétriques, on retrouve (1.6).

2. Un produit scalaire quelconque peut être représenté au moyen d'une matrice Q symétrique définie positive par :

$$\langle x, y\rangle = x^\top Q y.$$

Alors

$$\langle \nabla_Q f(x), y\rangle = f'(x) \cdot y = \nabla f(x)^\top y.$$

On en déduit

$$\boxed{\nabla_Q f(x) = Q^{-1} \nabla f(x).}$$

De même

$$\langle \nabla^2_Q f(x) y, z\rangle = f''(x) \cdot (y, z) = y^\top \nabla^2 f(x) z.$$

On en déduit

$$\boxed{\nabla^2_Q f(x) = Q^{-1} \nabla^2 f(x).}$$

On remarquera que $\nabla^2 f(x)^\top = \nabla^2 f(x)$ et que $\nabla^2_Q f(x)^\top \neq \nabla^2_Q f(x) = \nabla^2_Q f(x)^*$ (adjoint de $\nabla^2_Q f(x)$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $A^* = Q^{-1} A^\top Q$). Si A est symétrique définie positive et si $Q = A$, on obtient $\nabla^2_A f(x) = I$.

3. Une fonction est convexe si, et seulement si, son hessien $\nabla^2 f(x)$ est semi-défini positif pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ici $\nabla^2 f(x) = A$, ce qui permet de répondre à la première partie de la question.

   Pour la seconde partie, on rappelle qu'une fonction est strictement convexe si son hessien $\nabla^2 f(x)$ est défini positif pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Dès lors, f est strictement convexe si A est définie positive. Inversement, si f est strictement convexe, on a pour tout $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\nabla f(y) - \nabla f(x)\right)^\top (y - x) > 0.$$

   Comme $\nabla f(x) = Ax + b$, cette condition s'écrit $(y-x)^\top A(y-x) > 0$, ce qui revient à la définie positivité de A.

4. On a pour $\tilde{h} \in \mathbb{R}^n$ et en notant de la même manière l'opérateur linéaire $\varphi'(\tilde{x})$ et la matrice des dérivées partielles de φ en $\tilde{x}$:

$$\tilde{f}'(\tilde{x}) \cdot \tilde{h} = f'(\varphi(\tilde{x})) \cdot \left(\varphi'(\tilde{x}) \cdot \tilde{h}\right) = \left(\varphi'(\tilde{x})^{\mathsf{T}} \nabla f(x)\right)^{\mathsf{T}} \tilde{h}.$$

On en déduit que

$$\nabla \tilde{f}(\tilde{x}) = \varphi'(\tilde{x})^{\mathsf{T}} \nabla f(x).$$

De même pour $(\tilde{h}, \tilde{k}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\tilde{f}''(\tilde{x}) \cdot (\tilde{h}, \tilde{k}) = f''(x) \cdot \left(\varphi'(\tilde{x}) \cdot \tilde{h}, \varphi'(\tilde{x}) \cdot \tilde{k}\right) + f'(x) \cdot \left(\varphi''(\tilde{x}) \cdot (\tilde{h}, \tilde{k})\right).$$

On en déduit

$$\nabla^2 \tilde{f}(\tilde{x}) = \varphi'(\tilde{x})^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(x) \varphi'(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \nabla^2 \varphi_i(\tilde{x}). \tag{1.9}$$

5. Comme $\varphi'(\tilde{x})$ est inversible quel que soit $\tilde{x}$, on voit que $\nabla f(x) = 0$ si, et seulement si, $\nabla \tilde{f}(\tilde{x}) = 0$, si bien que les points stationnaires se correspondent.

   En ce qui concerne les minima locaux, on observe que les CN2 et CS2 sont vérifiées également en des points correspondant par φ (on note en effet que la somme à droite dans (1.9) s'annule, car $\nabla f(x) = 0$), mais le saut entre CN2 et CS2 ne permet pas de conclure. On peut toutefois donner une démonstration directe. Si x est un minimum local de f, il existe un voisinage U de x tel que

$$f(x) \leqslant f(x'), \quad \text{pour tout } x' \in U.$$

   Dès lors, avec $\tilde{x} = \varphi^{-1}(x)$ et $\tilde{x}' = \varphi^{-1}(x')$, on a

$$\tilde{f}(\tilde{x}) \leqslant \tilde{f}(\tilde{x}'), \quad \text{pour tout } \tilde{x}' \in \varphi^{-1}(U).$$

   Comme φ est un difféomorphisme, $\varphi^{-1}(U)$ est un voisinage de $\tilde{x}$; donc $\tilde{x}$ est un minimum local de $\tilde{f}$. La réciproque est vraie par raisonnement symétrique.

   Pour les minima globaux, on prend $U = \mathbb{R}^n$ dans le raisonnement ci-dessus.

2 Autres exemples de dérivation

1. Par la bilinéarité de b, on a

$$\begin{aligned} b(x_1 + h_1, x_2 + h_2) &= b(x_1, x_2 + h_2) + b(h_1, x_2 + h_2) \\ &= b(x_1, x_2) + b(h_1, x_2) + b(x_1, h_2) + b(h_1, h_2). \end{aligned}$$

   Par continuité de b, dont on note $\|b\|$ la norme, le dernier terme peut être majoré en norme comme suit[2] :

$$\|b(h_1, h_2)\| \leqslant \|b\| \, \|h_1\| \, \|h_2\| \leqslant \|b\| \, (\|h_1\| + \|h_2\|)^2 = o(\|h\|),$$

[2] On rappelle que, pour une application bilinéaire continue $b : \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \to \mathbb{F}$, la quantité définie par $\|b\| := \sup\{\|b(x_1, x_2)\| : \|x_1\| \leqslant 1, \|x_2\| \leqslant 1\}$ est finie et définit une norme sur l'espace vectoriel des applications bilinéaires continues de $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \to \mathbb{F}$. En particulier, on a $\|b(x_1, x_2\| \leqslant \|b\| \, \|x_1\| \, \|x_2\|$, quel que soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$.

où $h = (h_1, h_2)$ et où l'on a pris sur $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ la norme $(x_1, x_2) \mapsto \|x_1\| + \|x_2\|$. D'autre part, par la bilinéarité et la continuité de b, $h \mapsto b(h_1, x_2) + b(x_1, h_2)$ est linéaire continue, de norme $\|b\| \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$. Dès lors b est différentiable en $x = (x_1, x_2)$ et $b'(x) \cdot h = b(h_1, x_2) + b(x_1, h_2)$. On en déduit facilement la formule de b'' par dérivation de l'application linéaire $x \mapsto b'(x) \cdot h$.

2. L'application dérivée $i'(M)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^{n\times n}$ dans lui-même. On pourra l'obtenir en observant que
$$Mi(M) = I,$$
si bien que i est fonction implicite de l'équation $MX - I = 0$ qui définit X de manière implicite. On dérivant l'identité suivant un élément (une matrice en l'occurrence) $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on obtient
$$Hi(M) + M[i'(M) \cdot H] = 0,$$
soit
$$i'(M) \cdot H = -M^{-1}HM^{-1}. \tag{1.10}$$
On notera que lorsque $n = 1$, on retrouve bien que la dérivée de $1/x$ en $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par rapport à x est $-1/x^2$.

La dérivée seconde s'obtient en dérivant (1.10) :
$$i''(M) \cdot (H, K) = M^{-1}HM^{-1}KM^{-1} + M^{-1}KM^{-1}HM^{-1}.$$

3. On a pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned}\varphi'(x) \cdot h &= \langle M - xx^\mathsf{T}, -hx^\mathsf{T} - xh^\mathsf{T}\rangle \\ &\qquad \text{[dérivation d'une application bilinéaire et dérivation en chaîne]} \\ &= -2\, x^\mathsf{T} Mh + 2(x^\mathsf{T} h)\, \|x\|^2 \\ &\qquad [\langle M, uv^\mathsf{T}\rangle = v^\mathsf{T} Mu \text{ et symétrie de } M].\end{aligned}$$
On en déduit que
$$\nabla\varphi(x) = -2Mx + 2\|x\|^2 x.$$
Par ailleurs
$$\varphi''(x) \cdot (h, k) = -2\, h^\mathsf{T} Mk + 2(h^\mathsf{T} k)\, \|x\|^2 + 4(x^\mathsf{T} h)\, (x^\mathsf{T} k),$$
si bien que
$$\nabla^2\varphi(x) = -2M + 2\|x\|^2 I + 4xx^\mathsf{T}.$$

3 Direction du gradient

1. On a $\langle \nabla f(x_0), y\rangle = f'(x_0).y$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$. L'application f est une submersion dans un voisinage ouvert ω_0 de x_0 ($\omega_0 \subset \omega$), ce qui signifie que sa dérivée est surjective pour x voisin de x_0 : c'est en effet le cas en x_0 puisque $\nabla f(x_0) \neq 0$; c'est donc aussi le cas pour x voisin de x_0.

On montre alors en Géométrie Différentielle, que l'ensemble
$$S_0 := \omega_0 \cap f^{-1}(\{f(x_0)\}) = \{x \in \omega_0 : f(x) = f(x_0)\}$$

est une variété (surface) de dimension $n-1$.

Un vecteur tangent y à S_0 en x_0 peut être vu comme la dérivée d'un arc

$$\gamma :]a,b[\subset \mathbb{R} \to S_0,$$

de classe C^1, passant par x_0 : $\gamma(t_0) = x_0$ pour un certain $t_0 \in]a,b[$ et $\gamma'(t_0) = y$. Il suffit de vérifier que $\langle \nabla f(x_0), y \rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x_0), y \rangle &= f'(x_0) \cdot y \\ &= f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) \\ &= (f \circ \gamma)'(t_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $f \circ \gamma$ est constante sur $]a,b[$.

2. Il suffit de montrer que $f(x_0 + \tau \nabla f(x_0)) > f(x_0)$ pour $\tau > 0$, petit. Ceci se déduit de

$$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{1}{\tau}[f(x_0 + \tau \nabla f(x_0)) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot \nabla f(x_0) = \|\nabla f(x_0)\|^2 > 0.$$

4 Méthode de l'état adjoint

1. Soit $v \in \mathbb{R}^{n-m}$. En écrivant de la même manière l'opérateur dérivée $y'(u)$ et la matrice des dérivées partielles associée, on a

$$\begin{aligned} \nabla f(u)^\mathsf{T} v &= f'(u) \cdot v \\ &= J'_y(y(u),u) \cdot (y'(u) \cdot v) + J'_u(y(u),u) \cdot v \\ &= \nabla_y J(y(u),u)^\mathsf{T} (y'(u)v) + \nabla_u J(y(u),u)^\mathsf{T} v \\ &= \left(y'(u)^\mathsf{T} \nabla_y J(y(u),u) \right)^\mathsf{T} v + \nabla_u J(y(u),u)^\mathsf{T} v. \end{aligned}$$

Pour calculer $y'(u)$, on dérive l'équation d'état. Pour tout v, on a

$$F'_y(y(u),u) \cdot (y'(u) \cdot v) + F'_u(y(u),u) \cdot v = 0$$

On en déduit le résultat.

2. On introduit le lagrangien

$$\ell(y,u,p) = J(y,u) + p^\mathsf{T} F(y,u),$$

où $p \in \mathbb{R}^m$. Quel que soit $p \in \mathbb{R}^m$ (que l'on fixera plus tard), on a

$$f(u) = \ell(y(u),u,p).$$

On dérivant cette relation en considérant p constant, on trouve

$$f'(u) \cdot v = J'_y(y,u) \cdot y'(u) \cdot v + J'_u(y,u) \cdot v + p^\mathsf{T}[F'_y(y,u) \cdot y'(u) \cdot v + F'_u(y,u) \cdot v].$$

En regroupant les termes contenant $y'(u) \cdot v$, on obtient

$$\nabla f(u)^\mathsf{T} v = \nabla_u J(y,u)^\mathsf{T} v + p^\mathsf{T} F'_u(y,u)v + [\nabla_y J(y,u)^\mathsf{T} + p^\mathsf{T} F'_y(y,u)](y'(u) \cdot v).$$

On trouve le résultat avec le p proposé. On voit que celui-ci sert à annuler le facteur de $y'(u)$ que l'on ne veut pas calculer.

5 Courbes de niveau d'une fonction convexe

La fonction A ne peut pas être convexe; elle a des ensembles de sous-niveau non convexes, alors que

> Les ensembles de sous-niveaux d'une fonction convexe sont convexes.

En effet, si $x, y \in N_\nu(f) := \{z : f(z) \leqslant \nu\}$ et $t \in [0,1]$, alors $(1-t)x + ty \in N_\nu(f)$ puisque

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y) \leqslant (1-t)\nu + t\nu = \nu.$$

En particulier,

> L'ensemble des minimiseurs d'une fonction convexe sur un enemble convexe est un ensemble convexe.

En effet si $\alpha := \inf\{f(x) : x \in C\}$, où f est une fonction convexe et C est un ensemble convexe, alors $\arg\min\{f(x) : x \in C\}$ est l'ensemble de sous-niveau $\{x : f(x) + \mathcal{I}_C(x) \leqslant \alpha\}$ de la fonction convexe $f + \mathcal{I}_C$.

La fonction B peut être convexe. Les courbes de niveaux de la norme ℓ_1 ont cette allure et

> Une norme est convexe.

En effet, si $t \in [0,1]$, on a

$$\|(1-t)u + tv\| \leqslant \|(1-t)u\| + \|tv\| \leqslant (1-t)\|u\| + t\|v\|.$$

On observe qu'une fonction convexe n'est pas nécessairement différentiable.

La fonction C ne peut pas être convexe, car l'« écart » entre les courbes « 2 » et « 1 » est plus petit que celui entre les courbes « 3 » et « 2 ». De manière plus précise, on peut supposer que l'origine est au centre des cercles (translation de l'origine si nécessaire) et en prenant des points x_1, x_2 et x_3 le long d'un même rayon et vérifiant $f(x_i) = i$ pour tout i, on a $x_2 = (1-t)x_1 + tx_3$ avec $t < \frac{1}{2}$ (d'après la figure). Si f était convexe, on aurait $f(x_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_3) = (1-t) + t3 = 1 + 2t < 2$, ce qui contredit l'hypothèse $f(x_2) = 2$.

6 Les fonctions det et ld

1. La fonction $A \mapsto \det A$ est dérivable (c'est un polynôme des éléments de la matrice), si bien que l'application $H \mapsto \det'(I) \cdot H$ est linéaire et donc

$$\det'(I) \cdot H = \sum_{i,j} H_{ij} \left(\det'(I) \cdot E^{ij}\right),$$

où E^{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément (i,j) qui vaut 1. On commence par évaluer $\det'(I) \cdot E^{ij}$. En se rappelant que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux, on a $\det(I + tE^{ij}) = 1 + t\delta_{ij}$ et donc

$$\det'(I) \cdot E^{ij} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left(\det(I + tE^{ij}) - 1\right) = \delta_{ij}.$$

Dès lors

$$\det'(I) \cdot H = \sum_{i,j} H_{ij}\delta_{ij} = \operatorname{tr} H.$$

2. Soit A inversible fixée. On commence par calculer $\det'(A)\cdot H$ en se ramenant au calcul précédent. On dérive pour cela, en $B=A$, l'application

$$B \mapsto (\det A)\det(A^{-1}B) = \det B.$$

On trouve

$$\det'(A)\cdot H = (\det A)\det'(I)\cdot(A^{-1}H) = (\det A)\operatorname{tr}(A^{-1}H).$$

On en déduit que, pour le produit scalaire donné sur $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\nabla \det(A) = (\det A)A^{-\mathsf{T}}.$$

3.
   - La fonction ld est propre : elle ne prend pas la valeur $-\infty$ ($-\log\det A > -\infty$ pour $A\in\mathcal{S}^n_{++}$) et n'est pas identiquement égale à $+\infty$ ($\mathrm{ld}(I)=0$).
   - On montre que la fonction ld est convexe en montrant que $\mathrm{ld}''(A)\cdot H^2 \geqslant 0$ pour tout $A\in\mathrm{dom}(\mathrm{ld})=\mathcal{S}^n_{++}$ et pour tout $H\in\mathcal{S}^n$. On a pour $A\in\mathcal{S}^n_{++}$ et pour H et $K\in\mathcal{S}^n$:

$$\begin{aligned}\mathrm{ld}'(A)\cdot H &= -\operatorname{tr} A^{-1}H\\ \mathrm{ld}''(A)\cdot(H,K) &= \operatorname{tr} A^{-1}KA^{-1}H.\end{aligned}$$

   Donc si $A^{1/2}$ est la racine carrée définie positive de A et si on note $\|A\|_F = (\operatorname{tr} A^{\mathsf{T}}A)^{1/2}$ la norme de Frobenius de A, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{ld}''(A)\cdot H^2 &= \operatorname{tr}(A^{-1/2}HA^{-1/2})(A^{-1/2}HA^{-1/2})\\ &= \|A^{-1/2}HA^{-1/2}\|_F^2\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

   - La fonction ld est fermée car son épigraphe est fermé. Soit en effet $\{(A_k,\alpha_k)\}_{k\geqslant 0}$ une suite de epi(ld) qui converge vers $(A,\alpha)\in\mathcal{S}^n\times\mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que $(A,\alpha)\in\mathrm{epi}(\mathrm{ld})$. Comme $\alpha_k\in\mathbb{R}$, $A_k\in\mathcal{S}^n_{++}$ et par continuité des valeurs propres, A est semi-définie positive. Par ailleurs, par continuité du déterminant, $\det A_k \to \det A$ et en passant à la limite dans

$$-\log\det A_k \leqslant \alpha_k,$$

   on trouve que $-\log\det A\leqslant\alpha$. Donc $\det A>0$, $A\in\mathcal{S}^n_{++}$ et $(A,\alpha)\in\mathrm{epi}(\mathrm{ld})$.

4. Il suffit d'observer que $\mathrm{ld}''(A)\cdot H^2>0$ pour tout $A\in\mathrm{dom}(\mathrm{ld})=\mathcal{S}^n_{++}$ et pour tout $H\in\mathcal{S}^n$ non nul.

7 Distance à un ensemble convexe, fonction marginale

1. Soit $\varepsilon>0$. On peut trouver y_0 et $y_1\in C$ tels que $\|x_0-y_0\|\leqslant d_C(x_0)+\varepsilon$ et $\|x_1-y_1\|\leqslant d_C(x_1)+\varepsilon$. Alors, pour $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}d_C((1-t)x_0+tx_1) &\leqslant \|(1-t)x_0+tx_1-[(1-t)y_0+ty_1]\|\\ &\leqslant (1-t)\|x_0-y_0\|+t\|x_1-y_1\|\\ &\leqslant (1-t)d_C(x_0)+td_C(x_1)+\varepsilon.\end{aligned}$$

   Comme ε est arbitraire, on a $d_C((1-t)x_0+tx_1)\leqslant(1-t)d_C(x_0)+td_C(x_1)$, dont on déduit la convexité de $d_C(\cdot)$.

2. Quel que soit x_0, x_1 et $y \in \mathbb{E}$, on a
$$\|x_0 - y\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - y\|.$$
En prenant l'infimum en $y \in C$, on trouve $d_C(x_0) \leqslant \|x_0 - x_1\| + d_C(x_1)$ ou $d_C(x_0) - d_C(x_1) \leqslant \|x_0 - x_1\|$. On en déduit le résultat, par symétrie en x_0 et x_1.

3. On peut utiliser exactement la même démonstration qu'au point 1. En voici une autre pour changer. Soient, x_0, $x_1 \in \mathbb{E}$ et $t \in [0,1]$. Quels que soient y_0 et $y_1 \in \mathbb{F}$, on a
$$\begin{array}{rcll} f((1-t)x_0 + tx_1) & \leqslant & \varphi((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1) & \text{[définition de } f\text{]} \\ & = & \varphi((1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1)) & \\ & \leqslant & (1-t)\varphi(x_0, y_0) + t\varphi(x_1, y_1) & \text{[convexité de } \varphi\text{]}. \end{array}$$
En prenant l'infimum à droite en y_0 et $y_1 \in \mathbb{F}$, on trouve le résultat.

Remarque. On observera que l'infimum de fonctions convexes n'est pas convexe en général. Donc si φ était seulement convexe en x, on ne pourrait pas en déduire, en général, que f est convexe. C'est la convexité de φ en (x, y) qui est importante ici.

4. Il suffit de prendre la fonction
$$\varphi : (x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \mapsto \|x - y\| + \mathcal{I}_{\mathbb{E}\times C}((x, y)).$$
Elle est convexe car
   - $(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \mapsto \|x-y\|$ est convexe comme pré-composition de la norme qui est convexe par l'application linéaire $(x, y) \mapsto x - y$,
   - $(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \mapsto \mathcal{I}_{\mathbb{E}\times C}((x, y))$ est convexe comme fonction indicatrice du convexe $\mathbb{E} \times C$,
   - la somme de deux fonctions convexes est convexe.

8 Fonction semi-continue inférieurement

1. $[(i) \Rightarrow (ii)]$ Supposons que f soit s.c.i. et montrons que epi f est fermé. Soit $\{(x_k, \alpha_k)\} \subset \operatorname{epi} f$ une suite convergeant vers (x, α) dans $\mathbb{E}\times\mathbb{R}$. Il faut montrer que $(x, \alpha) \in \operatorname{epi} f$. Pour tout k, $f(x_k) \leqslant \alpha_k$, et grâce au caractère s.c.i. de f on obtient
$$f(x) \leqslant \liminf_{k\to\infty} f(x_k) \leqslant \alpha.$$
Comme $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, \alpha) \in \operatorname{epi} f$.

2. $[(ii) \Rightarrow (iii)]$ Soit $\nu \in \mathbb{R}$ et $\{x_k\}_{k\geqslant 1} \subset N_\nu(f)$ qui converge vers x. Il faut montrer que $x \in N_\nu(f)$. C'est clair, car (x_k, ν) est dans l'épigraphe de f et converge vers (x, ν). Comme epi f est fermé, $(x, \nu) \in \operatorname{epi} f$, c'est-à-dire $x \in N_\nu(f)$.

3. $[(iii) \Rightarrow (i)]$ Si $\liminf_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer.

   Si $\liminf_{k\to\infty} f(x_k) = \alpha \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite de $\{x_k\}$ telle que $f(x_k) \leqslant \alpha + \varepsilon$. Comme $N_{\alpha+\varepsilon}(f)$ est fermé, $x \in N_{\alpha+\varepsilon}(f)$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant \alpha + \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on obtient $f(x) \leqslant \alpha = \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$.

   Il reste à considérer le cas où $\liminf_{k\to\infty} f(x_k) = -\infty$. Alors quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une sous-suite de $\{x_k\}$ telle que $f(x_k) \leqslant \alpha$. Comme $N_\alpha(f)$ est fermé, $f(x) \leqslant \alpha$. Mais $\alpha \in \mathbb{R}$ étant arbitraire, cela veut dire que $f(x) = -\infty$.

9 Existence et unicité de solution d'un problème quadratique

1. • [(a) $\Rightarrow$ (b)] Clair !

   • [(b) $\Rightarrow$ (c)]

   ◦ *Démonstrations directes.* Soit C est une constante minorant f:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \quad \frac{1}{2}\, x^{\mathsf{T}} A x + b^{\mathsf{T}} x \geqslant C. \tag{1.11}$$

   En prenant $x = tv$ dans (1.11), en divisant par t^2 et en faisant tendre $t \to \infty$, on obtient $v^{\mathsf{T}} A v \geqslant 0$. Comme v est arbitraire dans $\mathbb{R}^n$, on en déduit que $A \succcurlyeq 0$.

   En prenant $x = \pm tv$ dans (1.11), avec $t > 0$ et $v \in \mathcal{N}(A)$, en utilisant $Av = 0$, en divisant par t et en faisant tendre $t \to \infty$, on obtient $\pm b^{\mathsf{T}} v \geqslant 0$ ou $b^{\mathsf{T}} v = 0$. Comme v est arbitraire dans $\mathcal{N}(A)$, on en déduit que $b \in \mathcal{N}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A)$.

   ◦ *Démonstrations par l'absurde.* Si $A \not\succcurlyeq 0$, on peut trouver un vecteur propre x_1 de valeur propre $\lambda_1 < 0$; dans ce cas, $f(tx_1) = \frac{1}{2} t^2 \lambda_1 \|x_1\|_2^2 - t b^{\mathsf{T}} x_1 \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$ et f n'est pas bornée inférieurement.

   D'autre part, si $b \notin \mathcal{R}(A)$, on peut écrire $b = b_0 + Ax_1$, avec $b_0 \in \mathcal{N}(A) \backslash \{0\}$; en prenant $x_t = -tb_0$, on voit $f(x_t) = -tb^{\mathsf{T}} b_0 = -t\|b_0\|_2^2$, qui tend vers $-\infty$ lorsque $t \to +\infty$; donc f n'est pas bornée inférieurement.

   • [(c) $\Rightarrow$ (a)] Le critère étant convexe ($A \succcurlyeq 0$), le problème a une solution ssi son équation d'optimalité $Ax + b = 0$ en a une, ce qui est clairement le cas puisque $b \in \mathcal{R}(A)$.

   Autre démonstration. Comme $b \in \mathcal{R}(A)$, il existe un $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\bar{x} + b = 0$. Alors le problème quadratique se récrit comme suit (à une constante additive près) :

$$\min\ \frac{1}{2}(x - \bar{x})^{\mathsf{T}} A (x - \bar{x}).$$

   Le critère de ce problème est positif (car $A \succcurlyeq 0$) et nul en $x = \bar{x}$, donc $\bar{x}$ est une solution du problème.

   Lorsque les conditions équivalentes (a), (b) ou (c) ont lieu, $\bar{x}$ est une solution du problème de minimisation de f ssi $A\bar{x} + b = 0$. On voit alors clairement que l'ensemble des solutions est de la forme $x_0 + \mathcal{N}(A)$, où x_0 est une solution particulière.

   Par ailleurs le coût optimal s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\bar{x}^{\mathsf{T}} A \bar{x} + b^{\mathsf{T}} \bar{x} &= -\frac{1}{2}\bar{x}^{\mathsf{T}} A \bar{x} \qquad [b = -A\bar{x}] \\
&= -\frac{1}{2}\bar{x}^{\mathsf{T}} A A^{\dagger} A \bar{x} \qquad [(1.3)] \\
&= -\frac{1}{2} b^{\mathsf{T}} A^{\dagger} b \qquad [A\bar{x} = -b].
\end{aligned}$$

2. [$\Rightarrow$] Si le problème a une solution, alors $A \succcurlyeq 0$ par l'implication $(a) \Rightarrow (c)$ du point 1. L'ensemble des solutions est alors de la forme $x_0 + \mathcal{N}(A)$ (point 1) ; donc si la solution est unique, on doit avoir $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, ce qui revient à dire que A est inversible ou (comme $A \succcurlyeq 0$) que $A \succ 0$.

[$\Leftarrow$] • Comme le critère est convexe ($A \succ 0$), le problème a une solution ssi son équation d'optimalité $Ax+b=0$ en a une, ce qui est clairement le cas si $A \succ 0$. L'unicité vient de la stricte convexité de f (car $A \succ 0$).

• On peut aussi raisonner comme suit. La fonction f est continue et $\mathbb{R}^n$ est un fermé non vide (mais il n'est pas borné !).

D'autre part, avec $\lambda_1 > 0$ désignant la plus petite valeur propre de A, on a

$$f(x) \geqslant \frac{\lambda_1}{2}\|x\|^2 - \|b\|\,\|x\| \geqslant \left(\frac{\lambda_1}{2}\|x\| - \|b\|\right)\|x\|.$$

Donc $f(x) \to \infty$ si $\|x\| \to \infty$.

10 Existence et unicité de solution d'un problème avec contraintes

1. Soit

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geqslant 2x_2 \geqslant 0\}$$

l'ensemble admissible. On constate que

1. f est continue (c'est un polynôme).
2. X est fermé, non vide, mais n'est pas compact (non borné).
3. Soit $\|x\| \to \infty$ avec $x \in X$. Alors $x_1 \to \infty$. Pour montrer que $f(x) \to \infty$ il suffit de minorer $f(x)$ par une fonction de x_1 non bornée lorsque $x_1 \to +\infty$. A x_1 fixé, le minimum de f sur X est obtenu pour $x_2 = \dfrac{x_1}{2}$. Donc si $x \in X$,

$$f(x) \geqslant x_1^2 + \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}x_1\frac{x_1}{2} = \frac{x_1^2}{8}.$$

On en déduit l'existence d'une solution.

2. X est convexe (intersection d'ensembles convexes), mais f n'est pas strictement convexe sur X. On a cependant, pour $x \in X$ et $x \neq 0$

$$f(x) \geqslant \frac{x_1^2}{8} > 0 = f(0).$$

Donc $x = 0$ est solution unique.

11 Problèmes d'optimisation sans solution

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (on minimise sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}$, pas sur $\overline{\mathbb{R}}$), on a

$$e^{x-1} < e^x.$$

Donc x ne peut pas être solution.

2. Le théorème standard ne s'applique pas car la fonction-coût ne tend pas vers $+\infty$ lorsque (A, b, x) tend en norme vers l'infini, même pour un triplet admissible. Le problème vient de ce que la fonction-coût ne dépend pas directement de x. On voit que l'on n'aura pas de solution, si, dans la suite minimisante, $\|x\| \to \infty$ (celle-ci n'étant pas bornée on ne pourra pas en extraire une sous-suite convergente).

On arrive à un cas semblable lorsque $A_0 x = b_0$ n'a pas de solution x, c'est-à-dire $b_0 \notin \mathcal{R}(A_0)$, alors que, $b_0 \in \mathcal{R}(A_0 + \epsilon I)$ pour tout $\epsilon > 0$ (prendre par exemple $A_0 = 0$ et $b_0 \neq 0$). Soit $\exists x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ une solution de

$$A_\varepsilon x_\varepsilon = b_0,$$

où $A_\varepsilon = A_0 + \varepsilon I$. Pour le triplet admissible $(A_\varepsilon, b_0, x_\varepsilon)$, le critère vaut

$$\frac{1}{2}\|\varepsilon I\|^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}\|I\|^2.$$

Donc la valeur minimale du critère est nulle (on peut prendre $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut). Mais il n'y a pas de triplet admissible (A, b, x) donnant une valeur nulle au critère car on devrait avoir $A = A_0$, $b = b_0$ alors qu'il n'y a pas de x vérifiant

$$A_0 x = b_0$$

(car $b_0 \notin \mathcal{R}(A_0)$).

Si on ajoute le terme $\frac{1}{2}\|x\|^2$ à la fonction-coût, celle-ci tend vers l'infini lorsque (A, b, x) tend vers l'infini en norme. D'autre part, l'ensemble admissible est clairement non vide ($(0, 0, 0)$ lui appartient) et fermé (pré-image de $0 \in \mathbb{R}^m$ par une application continue). Le problème a alors une solution.

3. (a) Soit $x \in X$. Comme $F(X)$ est ouvert et $0 \notin F(X)$, on peut trouver $\bar{y} \in F(X)$ tel que $\|\bar{y}\| < \|F(x)\|$. On a $\bar{y} = F(\bar{x})$, avec un $\bar{x} \in X$. Donc x n'est pas solution. Ce point étant arbitraire, le problème ne peut pas avoir de solution.

   (b) Si $\|x_k\| \not\to \infty$, il existe une sous-suite de $\{x_k\}$ convergeant vers un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. On ne peut pas avoir $\bar{x} \in X$, car $\bar{x}$ serait solution du problème ($x \mapsto \|F(x)\|$ est continue et $\{x_k\}$ est minimisante), donc $\liminf d_{X^c}(x_k) = 0$.