Introduction à l'optimisation

(1) Objectifs du cours

— informations pratiques → voir planche

— Buts : théorie et algorithmes en optimisation "continue"

× théorie : analyse convexe
conditions d'optimalité
dualité ...

× algorithmes : pbs avec et sans contraintes
algos à direction de descente
algo de points intérieurs
Newton, quasi-Newton
pénalisation
relaxation lagrangienne
...

② Déf. d'un problème d'optimisation

- Déterminer un jeu optimal de paramètres $(x_1, \ldots, x_n) = x$ en nombre fini pour nous

- On a besoin de savoir si x est meilleur que x' $\Rightarrow$ besoin d'1 critère (= objectif, fonction - coût, ...)

$$f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

e.v (pas un ensemble discret → pas optim combinatoire)

1 seul critère (pas de l'optim multicritère)

utile car on construit des fonctions et on ne sait pas si le résultat $f(x) \in \mathbb{R}$

- En général, on cherche x dans un ensemble $X \subset \mathbb{E}$ appelé ensemble admissible

  $x \in X$ est dit admissible

- le problème s'écrit alors

$$(P_X) \begin{cases} \inf f(x) \\ x \in X \end{cases} \equiv \inf_{x \in X} f(x) \equiv \inf \{ f(x) : x \in X \}$$

veut dire que l'on ne sait pas s'il y a une solution (sinon min)

— Maximiser : c'est la même chose car

$$\sup_{x \in X} f(x) = - \inf_{x \in X} \left(-f(x)\right) \qquad (1)$$

On préfère minimiser car

- on sait ce qui est un convexe (il n'y a pas d'analyse "concave")
- il est alors naturel de définir une fonction convexe (voir plus loin)
- il est naturel de <u>minimiser</u> une fonction convexe

— Si $X \neq \emptyset$ on dit que le problème est <u>réalisable</u>

— Si $\exists (x_k) \subset X$ telle que $f(x_k) \longrightarrow -\infty$ on dit que le problème est <u>non borné</u>

— $\boxed{\inf_{x \in \emptyset} f(x) = +\infty}$ $\boxed{\sup_{x \in \emptyset} f(x) = -\infty}$ par (1)

Convention très utile car alors

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in E} f(x) + I_X(x)$$

où I_X est <u>l'indicatrice</u> de X déf par

$$I_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

③ Solution d'un problème d'optimisation

[A] Définition

x_* est <u>solution</u> de (P_X)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_* \in X \\ f(x_*) \le f(x), \ \forall x \in X \end{cases} \qquad (2)$$

On dit aussi que x_* est un <u>minimum</u> ou un <u>minimiseur</u>

— ne pas confondre avec la <u>valeur optimale</u>

$$val(P_X) = \inf_{x \in X} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

(une solution, si elle existe, est dans $\mathbb{E}$)

— tout problème n'a pas de solution mais a toujours une valeur optimale

<u>ex</u> $\mathbb{E} = X = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^x$

x n'est pas solution car $e^{x-1} < e^x$

(et on cherche une solution dans $\mathbb{R}$ pas dans $\overline{\mathbb{R}}$)

— une solution est parfois appelée un <u>minimum global</u> pour faire la distinction avec

x_* est une solution/minimum <u>local</u>

$\iff$ $\exists$ voisinage V de x_* tel que

$$\begin{cases} x_* \in X \\ f(x_*) \leq f(x), \quad \forall x \in X \cap V \end{cases} \qquad (3)$$

— On parle aussi de minimum global/local <u>strict</u> si [illegible]

$$(1) \rightarrow \begin{cases} x_* \in X \\ f(x_*) < f(x), \quad \forall x \in X \setminus \{x_*\} \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow \begin{cases} x_* \in X \\ f(x_*) < f(x), \quad \forall x \in (X \cap V) \setminus \{x_*\} \end{cases}$$

$\boxed{B}$ Existence de solution

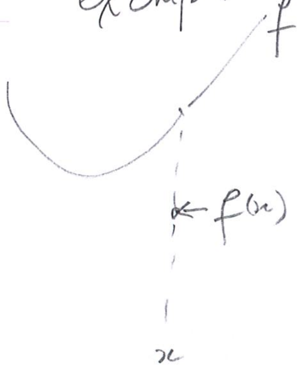
— On dit que f est s.c.i (semi-continue inférieurement) si $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall (x_n) \to x$

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$$

c-à-d

$$\lim_{k \to \infty} \underbrace{\left(\inf_{n \geq k} f(x_n) \right)}_{\text{suite } \nearrow \text{ avec } k \nearrow}$$

exemple



$\longrightarrow$ la lim inf existe toujours (alors que la limite peut ne pas exister)

$\Longleftrightarrow$ f est <u>fermée</u> c-à-d que son <u>épigraphe</u>

$$\text{epi} f = \{(x, \alpha) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

est fermé (dans $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$)

$\Longleftrightarrow$ $\forall \nu \in \mathbb{R}$, l'<u>ensemble de sous-niveau</u>

$$\{x \in \mathbb{E} : f(x) \leq \nu\}$$

est fermé

(Voir les TD pour la démonstration de ces équivalences)

Théor (WEIERSTRASS)

> **Si** • $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i sur X
> • X compact non vide
>
> **alors** (P_X) a au moins une solution

Dém $X \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ suite minimisante (x_n)

c-à-d telle que

- $(x_n) \subset X$
- $f(x_n) \longrightarrow val(P_X) = \inf\limits_{x \in X} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

(une telle suite existe toujours par déf de l'inf et $X \neq \emptyset$)

- X compact $\Rightarrow \exists$ sous-suite $(x_n) \longrightarrow \bar{x} \in X$
- f est s.c.i $\Rightarrow f(\bar{x}) \leq \liminf\limits_{n \to \infty} f(x_n) = val(P_X)$

$\Rightarrow \bar{x}$ est solution

$\square$

Donc l'$\exists$ de solution est un résultat topologique

Remarques

Lorsque dim $\mathbb{E} < +\infty$ (ce que l'on supposera toujours)

1) X compact ($\subset$ dans 1 e.v. de dim finie)

$\Leftrightarrow$ X fermé et borné

2) Dans le théo de Weierstrass, on peut remplacer X compact par

- X fermé
- f est coercive sur X c-à-d

$$\lim_{\substack{x \in X \\ \|x\| \to \infty}} f(x) = +\infty$$

En effet soit $x_0 \in X$ non vide et

$$X_0 := \{x \in X : f(x) \leq f(x_0)\}$$

Alors X_0 est compact (fermé car f est s.c.i et borné car f est coercive)

Donc le problème

$$\inf_{x \in X_0} f(x)$$

a une solution x_*, qui est aussi solution de (P_X) :

$$x_* \in X_0 \subset X$$

$$f(x_*) \begin{cases} \leq f(x) & \forall x \in X_0 \\ \leq f(x_0) \leq f(x) & \forall x \in X \setminus X_0 \end{cases}$$

$\square$

C Unicité

(provient de la convexité)

Soit $\mathbb{E}$ un e.v. sur $\mathbb{R}$

- $X \subset \mathbb{E}$ est convexe si $\forall x, y \in X$ le segment

$$[x,y] := \{ (1-t)x + ty : t \in [0,1] \}$$

est dans X.

- Soit $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$

domaine de f

$$\operatorname{dom} f := \{ x \in \mathbb{E} : f(x) < +\infty \}$$

épigraphe de f

$$\operatorname{epi} f := \{ (x,\alpha) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} : f(x) \le \alpha \}$$

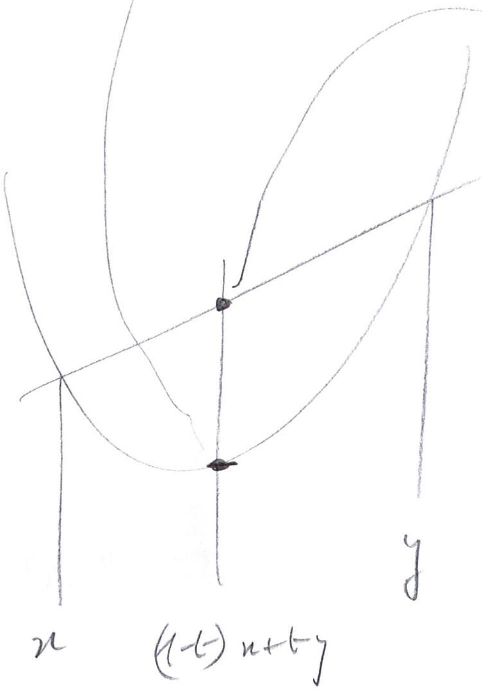
pas $\overline{\mathbb{R}}$!!

• $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe

$\overset{\text{def}}{\iff}$ (epi f) est ~~fermé~~ convexe

$\iff \forall x, y \in \operatorname{dom} f, \ \forall t \in]0,1[$

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y) \qquad (u)$$



la somme a 1 sens car il n'y a pas 1 terme qui vaut $-\infty$ et l'autre $+\infty$

($t \in]0,1[$, donc $(1-t)f(x)$ et $t f(y)$ ont un sens)

Dem (⇒) Soient $\alpha \geq f(x)$ et $\beta \geq f(y)$

$\Rightarrow (x, \alpha), (y, \beta) \in$ epi f

$\Rightarrow (1-t)(x,\alpha) + t(y,\beta) \in$ epi f

$\quad = ((1-t)x+ty, (1-t)\alpha + t\beta)$

$\Rightarrow f((1-t)x+ty) \leq (1-t)\alpha + t\beta$

puis $\alpha \downarrow f(x)$ et $\beta \downarrow f(y)$

(⇐) idem

$\square$

Par (u) $\boxed{f \text{ convexe}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{dom} f \text{ convexe}}$

- $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est strictement convexe
  si (4) est vérifié avec "<"
  $\forall x \neq y$ dans dom f et $\forall t \in]0,1[$

- Prop (unicité)

si · X convexe · f strictement convexe sur X alors (P_X) a au plus une solution

Dém (par l'absurde)

Soient $x_1 \neq x_2$ deux solution

- X convexe $\Rightarrow$ $\frac{x_1+x_2}{2} \in X$
- f strict convexe $\Rightarrow$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2} \underbrace{f(x_1)}_{\substack{\| \\ \mathrm{val}(P_X)}} + \frac{1}{2} \underbrace{f(x_2)}_{\substack{\| \\ \mathrm{val}(P_X)}} = \mathrm{val}(P_X)$$

contradiction car $\frac{x_1+x_2}{2} \in X$
et $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \mathrm{val}(P_X)$

$\square$

(4) Caractérisations de la convexité d'une fonction

$f : \underbrace{\mathbb{E}}_{\text{un e.v.}} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Lemme fondamental

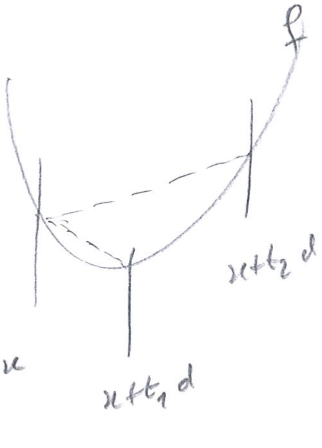
Si
- f est convexe
- $d \in \mathbb{E}$, $x \in \operatorname{dom} f$ (i.e. $f(x) < +\infty$)

alors
1) $t \in \mathbb{R}_{++} \longmapsto \dfrac{f(x+td) - f(x)}{t}$ est croissante
2) $f'(x;d) := \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{f(x+td) - f(x)}{t}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$
3) $f'(x;d) = +\infty \iff x + td \notin \operatorname{dom} f$, $\forall t > 0$
4) $f'(x;d) \geq -f'(x;-d)$

Dém 1) Soient $0 < t_1 < t_2$; on veut montrer

$$\frac{f(x+t_1 d) - f(x)}{t_1} \leq \frac{f(x+t_2 d) - f(x)}{t_2} \qquad [1]$$

- Si $x + t_2 d \notin \operatorname{dom} f \Rightarrow$ clair
- Si $x + t_2 d \in \operatorname{dom} f \Rightarrow x + t_1 d \in \operatorname{dom} f$ (un convexe et $x \in \operatorname{dom} f$)



$$x + t_1 d = \underbrace{\left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)}_{\in [0,1]} x + \frac{t_1}{t_2}(x + t_2 d)$$

$$f(x+t_1 d) \leq \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) f(x) + \frac{t_1}{t_2} f(x + t_2 d)$$

f convexe

$-f(x)$ et $\times \frac{1}{t_1} \Rightarrow [1]$

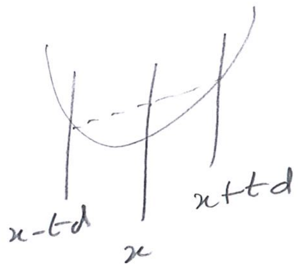
2) et 3) conséquences directes du point 1.

4) Si $f'(x;d) = +\infty$ ou $f'(x;-d) = +\infty$

l'inégalité est claire

Sinon $(x+td)$ et $(x-td) \in \operatorname{dom} f$ pour $t>0$

petit par le point 3.



$$x = \frac{1}{2}(x+td) + \frac{1}{2}(x-td)$$

$$f(x) \le \frac{1}{2} f(x+td) + \frac{1}{2} f(x-td)$$

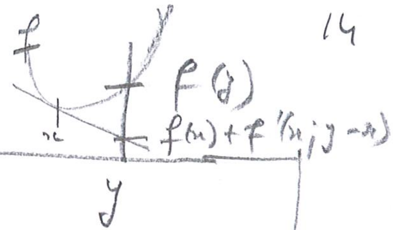
f convexe

$$-\Big(f(x-td) - f(x)\Big) \le f(x+td) - f(x)$$

$\frac{1}{t}$ et $\lim\limits_{t \to \infty}$ $\Rightarrow$ la formule donne 4.

$\square$

Caract 1 (cône d'appui)



> f (strictement) convexe
>
> $\iff \forall x, y \in E,\ x \neq y,\ x \in \operatorname{dom} f,\ \forall d \in E$
>
> $$\begin{cases} f'(x;d) \geq -f'(x;-d) & [1] \\ f(y) \underset{(>)}{\geq} f(x) + f'(x; y-x) & [2] \end{cases}$$

Démo ($\Rightarrow$) $f'(x;d) \geq -f'(x;-d)$ est le point 4 du lemme fondamental

• $$f'(x; y-x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\Big[f(\underbrace{x+t(y-x)}_{(1-t)x+ty}) - \cancel{f(x)}\Big]$$

$$\leq (\cancel{1}-t) f(x) + t f(y)$$

$$\leq f(y) - f(x)$$

• Si f est strict convexe (la même démonstration ne marche pas car on perd "$<$" en prenant la limite)

$$f'(x; y-x) = \frac{f'(x; t(y-x))}{t} \quad (t > 0)$$

$$\leq \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \quad (f \text{ convexe})$$

$$< \frac{(1-t)f(x) + t f(y) - f(x)}{t} \quad (f \text{ strict convexe})$$

$$= f(y) - f(x)$$

$\Leftarrow$ Soit $x, y \in \text{dom} f$, $t \in]0,1[$
$x \neq y$

On a $x_t := (1-t)x + ty \in \text{dom} f$
(1 convexe)

et donc par [2]

$$f(y) \underset{(>)}{\geqslant} f(x_t) + f'(x_t; (1-t)(y-x)) \quad * t$$
$$f(x) \underset{(>)}{\geqslant} f(x_t) + f'(x_t; -t(y-x)) \quad * (1-t)$$

$+$

$$(1-t)f(x) + t f(y)$$
$$\underset{(>)}{\geqslant} f(x_t) + t(1-t)\Big[\underbrace{f'(x_t; y-x) + f'(x_t; -(y-x))}_{\geqslant 0 \text{ par } [1]}\Big]$$

$\square$

<u>Rmq</u> 1) si f est dérivable en x, la 1ère propriété ($f'(x; d) \geqslant -f'(x; -d)$) est vérifiée (avec égalité)

2) On ne peut pas se passer de [1]. Contre-exemple
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f n'est pas convexe mais vérifie [2] ; elle ne vérifie pas [1] en $x = 0$ car
$f'(0; 1) = f'(0; -1) = -\infty$

3) au lieu de [1], on peut aussi dire "f est continue sur $]x, y[$ (voir syllabus)

Caract 2 (monotonie)

f (strictement) convexe

$\Leftrightarrow \quad \forall x, y \in E, \quad x \neq y, \quad x, y \in \operatorname{dom} f$

$$f'(y; y-x) - f'(x; y-x) \underset{(>)}{\geq} 0$$

($\Rightarrow$) par la caractérisation 1, on a

$$f(y) \underset{(>)}{\geq} f(x) + f'(x; y-x)$$
$$f(x) \underset{(>)}{\geq} f(y) + f'(y; x-y)$$

$+$

$$0 \underset{(>)}{\geq} f'(x; y-x) + \underbrace{f'(y; x-y)}_{\geq -f'(y; y-x)}$$

(point 4 du lemme fondamental)

c'est le résultat

($\Leftarrow$) Soient $x \neq y$ dans dom f. On se ramène à la propriété 1) : $t \mapsto \xi(t) := f(x + t(y-x))$ est (strict) convexe si $\xi'(\cdot; 1)$ est (strict) croissante.

Soient $t_1 < t_2$:

$$\xi'(t_1; 1) = f'(x_{t_1}; y-x)$$

(hypothèse) $\longrightarrow \underset{(<)}{\leq} f'(x_{t_2}; y-x) = \xi'(t_2; 1)$

$\Rightarrow \xi$ est (strict) convexe

$$\Rightarrow \xi(t) \leq \xi((1-t)\, 0 + t\, 1) \qquad t \in]0,1[$$
$$\underset{(<)}{\leq} (1-t)\, \xi(0) + t\, \xi(1)$$

$$\Rightarrow f((1-t)x + ty) \underset{(<)}{\leq} (1-t) f(x) + t f(y)$$

Corol 3 (Courbure positive)

X ouvert convexe, f 2 fois dérivable

$$\boxed{f \text{ convexe sur } X \iff \forall x \in X,\ \forall h \in E \quad f''(x).h^2 \geq 0}$$

$$\boxed{f \text{ strict. convexe sur } \mathbb{R} \Longleftarrow \forall x \in X,\ \forall h \in E \setminus \{0\} \quad f''(x).h^2 > 0}$$

($\Rightarrow$) $$f''(x).h^2 = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \underbrace{\left[f'(x+th).h - f'(x).h \right]}_{\substack{\geq 0 \\ \text{par monotonie}}}$$

($\Leftarrow$) Développement de Taylor (f à valeurs dans $\mathbb{R}$!)

$x \neq y$

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x+\theta(y-x)).(y-x)^2}_{\substack{\geq 0 \\ (>0)}} \quad \text{où } \theta \in [0,1]$$

$\square$

Rmq ($\Rightarrow$) pas vrai dans la 2^e propriété

Contre-exemple $x \in \mathbb{R} \to x^4$ en $x = 0$