1. Dictionaire Idéal-Variété

On supposera par défaut dans toute cette partie que **K est un corps commutatif**.

1.1. Rappels

Définition 1. *Un polynôme $f \in K[X_1, ..., X_n]$ s'écrit $f = \sum_{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha$ ou les α sont tous nuls sauf un nombre fini, avec $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$.*

- *a_α est le coefficient du monôme X^α*
- *si $a_\alpha \neq 0$, $a_\alpha X^\alpha$ est un terme de f*
- *le degré (total) du monôme X^α est $\sum_{i=1}^n \alpha_i$*
- *le degré (total) de f est le degré maximal des monômes de ses termes*

Définition 2. *Un idéal $I \subset K[X_1, ..., X_n]$ est un sous ensemble de $K[X_1, ..., X_n]$ tel que*

i. $0 \in I$

ii. $\forall f, g \in I \Rightarrow f + g \in I$

iii. $\forall f \in I, \forall h \in K[X_1, ..., X_n], fh \in I$

Notation 3. *Soient $f_1, ..., f_s$ des polynômes de $K[X_1, ..., X_n]$. On note $\langle f_1, ..., f_s \rangle = \{\sum_{i=1}^s h_i f_i, \forall i = 1...s, h_i \in K[X_1, ..., X_n]\}$ l'idéal engendré par $f_1, ..., f_s$.*

1.2. Variétés Algébriques (affines)

Définition 4. *Soient $f_1, ..., f_s$ des polynômes de $K[X_1, ..., X_n]$. On définit $V(f_1, ..., f_s) = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n : f_i(a_1, ..., a_n) = 0, \forall i = 1...s\}$ que l'on appelle Variété Algébrique (Affine) de $f_1, ..., f_s$.*

Lemme 5. *Soient $V, W \subset K^n$ 2 variétés algébriques affines, alors $V \cup W$ et $V \cap W$ sont également 2 variétés algébriques affines.*

Démonstration. On pose $V = V(f_1, ..., f_s)$ et $W = V(g_1, ..., g_t)$.

Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in V(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_t)$. Alors $\forall i = 1...s$, $f_i(a_1, ..., a_n) = 0$, donc $a \in V$. De la même manière, $a \in W$ et donc $a \in V \cap W$ et $V(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_t) \subset V \cap W$. Inversement si $a \in V \cap W$ alors $a \in V$ et $\forall i = 1...s$, $f_i(a_1, ..., a_n) = 0$ et $a \in W$ et $\forall i = 1...t$, $g_i(a_1, ..., a_n) = 0$ donc $a \in V(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_t)$ et par conséquent $V(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_t) = V \cap W$.

Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ tq $f_i g_j(a_1, ..., a_n) = 0$ pour tous $i = 1...s$, $j = 1...t$ et supposons que $a \notin V$. Alors $\exists i_0$, $f_{i_0}(a) \neq 0$ et par conséquent $f_{i_0} g_j(a) = 0$ pour tous $j = 1...t$ ce qui implique que $a \in W$. Ainsi $V(f_i g_j, i = 1...s, j = 1...t) \subset V \cup W$.

Soit $a \in V \cup W$. Soit $a \in V$ et $f_i(a) = 0, \forall i = 1...s$ ce qui implique en particulier $f_i g_j(a_1, ..., a_n) = 0$ pour tous $i = 1...s$, $j = 1...t$, soit $a \in W$ et $g_{ij}(a) = 0$, $\forall j = 1...t$ ce qui implique en particulier $f_i g_j(a_1, ..., a_n) = 0$ pour tous $i = 1...s$, $j = 1...t$. Ainsi $V \cup W \subset V(f_i g_j, i = 1...s, j = 1...t)$. □

1.3. Idéal de définition d'une variété algébrique affine

Proposition 6. *Si $\langle f_1, ..., f_s \rangle = \langle g_1, ..., g_t \rangle$, alors $V(f_1, ..., f_s) = V(g_1, ..., g_t)$*

Démonstration. Si $\langle f_1, ..., f_s \rangle = \langle g_1, ..., g_t \rangle$, alors $\forall j = 1...s$, $\exists h_{j,1}, ..., h_{j,t}$, $f_j = \sum_{i=1}^s h_{j,i} g_i$. Si $\forall i = 1...t$, $g_j(a) = 0$, alors $f_j(a) = 0$ et donc $V(g_1, ..., g_t) \subset V(f_1, ..., f_s)$. On conclut en inversant les rôles des f_i et g_j. □

Définition 7. *Soit $V \subset K^n$ une variété algébrique affine, on définit $I(V) = \{f \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n] : \forall a = (a_1, ..., a_n) \in V, f(a) = 0\}$*

Lemme 8. *Soit $V \subset K^n$ une variété algébrique affine, alors $I(V)$ est un idéal de $K[X_1, ..., X_n]$*

Démonstration.

i. $0 \in I(V)$

ii. Soient $f, g \in I(V)$. Alors $\forall a \in V, f(a) + g(a) = 0$ et donc $f + g \in I(V)$

iii. Soient $f \in I(V)$, $h \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$. Alors $\forall a \in V, f(a) = 0$ et donc $f\,h(a) = 0$ et donc $f\,h \in I(V)$. □

Lemme 9. *Soient $f_1, ..., f_s \in K[X_1, ..., X_n]$. Alors $\langle f_1, ..., f_s \rangle \subset I(V(f_1, ..., f_s))$, mais il n'y a pas forcément égalité.*

Démonstration. $f \in \langle f_1, ..., f_s \rangle \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{s} h_i\, f_i$. En particulier si $f_i(a) = 0$ alors $f(a) = 0$ et donc $\langle f_1, ..., f_s \rangle \subset I(V(f_1, ..., f_s))$.

On remarque que $X \in I(V(X^2))$ mais pourtant $X \notin \langle X^2 \rangle$. □

Proposition 10. *Soient $V, W \subset K^n$ deux variétés algébriques affines. Alors*

i. $V \subset W \Leftrightarrow I(V) \supset I(W)$

ii. $V = W \Leftrightarrow I(V) = I(W)$

Démonstration. le ii) est une conséquence directe du i).

si $V \subset W$ alors tout polynôme s'annulant sur W (donc élément de $I(W)$) s'annule en particulier sur V (est donc élément de $I(V)$) □

1.4. Rappel des variantes du théorème des zéros de Hilbert

Rappelons les 2 formes du théorème des zéros de Hilbert vues dans un cours précédent mais avec les notations introduites dans ce cours :

Théorème 11. *(Théorème des zéros de Hilbert - forme faible) Soit K un corps algébriquement clos et $I \subset \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ un idéal de $K[X_1, ..., X_n]$. Alors $V(I) = \emptyset \Leftrightarrow I = K[X_1, ..., X_n]$.*

Théorème 12. *(Théorème des zéros de Hilbert) Soit K un corps algébriquement clos, f, f_1, ..., $f_s \in K[X_1, ..., X_n]$. Alors $f \in I(V(f_1, ..., f_s))$ si et seulement si $\exists m \in \mathbb{N}^\star$, $f^m \in \langle f_1, ..., f_s \rangle$.*

1.5. Idéaux radicaux

Lemme 13. *Soit K un corps, $V \subset \mathbb{K}^n$ une variété algébrique et $f \in K[X_1, ..., X_n]$. Si $\exists m \in \mathbb{N}$, $f^m \in I(V)$, alors $f \in I(V(I))$.*

Démonstration. Si $f^m \in I(V)$, alors pour tout $a \in V$, $f^m(a) = 0$ et donc $f(a) = 0$. Ainsi $f \in I(V(I))$. □

Définition 14. *Un idéal est dit radical si $f^m \in I$ pour $m \in \mathbb{N}^\star$ implique $f \in I$.*

Corollaire 15. *Soit K un corps, $V \in K^n$. $I(V)$ est un idéal radical*

Démonstration. Transcription immédiate du précédent lemme. □

Définition 16. *Soit K un corps et $I \subset K[X_1, ..., X_n]$ un idéal. Le radical de I, que l'on note $\sqrt{I}$ est l'ensemble $\{f : \exists m \in \mathbb{N}, f^m \in I\}$*

Lemme 17. *Si I est un idéal de $K[X_1, ..., X_n]$, alors $\sqrt{I}$ est un idéal de $K[X_1, ..., X_n]$ contenant I.C'est de plus un idéal radical.*

Démonstration. I est clairement contenu dans $\sqrt{I}$ et $0 \in \sqrt{I}$.

Soient $f, g \in \sqrt{I}$.Il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tq $f^n \in I$ et $g^m \in I$. On considère alors $(f+g)^{n+m-1} = \sum_{i=0}^{n+m-1} \binom{i}{n+m-1} f^i g^{n+m-i-1}$que l'on décompose alors en $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{n+m-1} f^i g^{n+m-i-1} + \sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{i}{n+m-1} f^i g^{n+m-i-1}$ que l'on ré-écrit alors $g^m\left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{n+m-1} f^i g^{n-i-1}\right) + f^n\left(\sum_{i=n}^{n+m-1} \binom{i}{n+m-1} f^{i-n} g^{n+m-i-1}\right)$ qui est clairement la comme de 2 polynômes de I. Ainsi $(f+g)^{n+m-1} \in I$ et donc $(f+g) \in \sqrt{I}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \sqrt{I}$, tels que $f^n \in I$ et $h \in K[X_1, ..., X_n]$. Alors $(h\,f)^n = h^n f^n \in I$ et donc $h\,f \in \sqrt{I}$. □

Théorème 18. *(Théorème des zéros de Hilbert - version forte) Soit K un corps algébriquement clos. Si I est un idéal de $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$, alors $I(V(I)) = \sqrt{I}$.*

Démonstration. Soit $f \in \sqrt{I}$. Il esxiste alors $m \in \mathbb{N}$ tq $f^m \in I$ ce qui implique que $\forall a \in V(I)$, $f^m(a) = (f(a))^m = 0$ et donc $f(a) = 0$, ce qui fait que $f \in I(V(I))$ et donc $\sqrt{I} \subset I(V(I))$.

Soit $f \in I(V(I))$ et, d'après la forme faible du théorème, il existe $m \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^m \in I$ et donc $f \in \sqrt{I}$. □

Théorème 19. *Si K est un corps algébriquemenbt clos, les 2 applications suivantes*

$$\begin{array}{ccc} K^n & I & K[X_1, ..., X_n] \\ \textit{variétés} & \rightarrow & \textit{idéaux radicaux} \end{array} \quad et \quad \begin{array}{ccc} K[X_1, ..., X_n] & V & K^n \\ \textit{idéaux radicaux} & \rightarrow & \textit{variétés} \end{array}$$

sont réciproques l'une de l'autre et définissent une bijection.

1.6. Clôture de Zariski - Variétés irréductibles - Idéaux premiers

Proposition 20. *Soit $S \subset K^n$ un ensemble, on étend la définition d'idéal de définition réservée jusqu'ici aux variétés en posant $I(S) = \{f \in K[X_1, ..., X_n] : \forall a = (a_1, ..., a_n) \in S, f(a) = 0\}$.*

Alors $V(I(S))$ est la plus petite variété algébrique affine contenant S et est appélée clôture de Zariski de S.

Démonstration. Si $S \subset W$ alors $I(W) \subset I(S)$ et $V(I(S)) \subset V(I(W))$. Or W est une variété algébrique affine, donc $V(I(W)) = W$ et donc $V(I(S)) \subset W$. □

Définition 21. *Une variété (algébrique affine) $V \subset K^n$ est irréductible si $V = V_1 \cup V_2$ avec V_1, V_2 2 variétés algébriques (affines) implique $V = V_1$ ou $V = V_2$.*

Définition 22. *Un idéal $I \subset K[X_1...., X_n]$ est premier lorsque $\forall f, g \in K[X_1, ..., X_n]$ $f\,g \in I \Rightarrow f \in I$ ou $g \in I$.*

Proposition 23. *Une variété algébrique affine $V \subset K^n$ est irréductible ssi $I(V)$ est premier.*

Démonstration. Supposons V irréductible et $f, g \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$. On pose $V_1 = V \cap V(f)$ et $V_2 = V \cap V(g)$. V_1 et V_2 sont 2 variétés algébriques (vu plus haut).

Si $f\,g \in I(V)$ alors pour tout $a \in V$ soit $f(a) = 0$ et $a \in V_1$ soit $g(a) = 0$ et $a \in V_2$. Donc $V = V_1 \cup V_2$ et comme V est irréductible, alors $V = V_1$ ou $V = V_2$. Dans le premier car $f\,g \in I(V) \Rightarrow f \in I(V)$ dans le second $f\,g \in I(V) \Rightarrow g \in I(V)$ et donc $I(V)$ est premier.

Si $I(V)$ est premier, supposons $V = V_1 \cup V_2$ et $V \neq V_1$. Comme $V_1 \subsetneqq V$, alors $I(V) \subsetneqq I(V_1)$. Prenons $f \in I(V_1) \setminus I(V)$ et $g \in I(V_2)$ de telle sorte que $f\,g \in I(V)$. Comme $I(V)$ est premier, alors $f \in I(V)$ (impossible par choix) ou $g \in I(V)$ et donc $I(V) = I(V_2)$ ce qui implique $V = V_2$. □

Corollaire 24. *Si K est un corps algébriquement clos, les 2 applications suivantes*

$$\begin{array}{ccc} K^n & I & K[X_1, ..., X_n] \\ \textit{variétés irréductibles} & \rightarrow & \textit{idéaux premiers} \end{array} \quad et \quad \begin{array}{ccc} K[X_1, ..., X_n] & V & K^n \\ \textit{idéaux premiers} & \rightarrow & \textit{variétés irréductibles} \end{array}$$

sont réciproques l'une de l'autre et définissent une bijection.

1.7. Points et idéaux maximaux

Définition 25. *Un idéal propre de $K[X_1, ..., X_n]$ (différent de $K[X_1, ..., X_n]$) est dit maximal si les seuls idéaux le contenant sont lui-même et $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$.*

Proposition 26. *Pour tout $a = (a_1, ..., a_n) \in K^n$, $I = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle \subset K[X_1, ..., X_n]$ est maximal.*

Démonstration. Supposons $I \subsetneq J$ ou J est un idéal de $K[X_1, ..., X_n]$ et soit $f \in J \setminus I$. Alors, comme par divisions Euclidiennes successives par les $X_i - a_i$ (on a le droit puisque $X_i - a_i$ est unitaire), on écrit $f = A_1 (X_1 - a_1) + ... + A_n (X_n - a_n) + b$ avec $b \in \mathbb{K}$ et $b = f - A_1 (X_1 - a_1) - ... - A_n (X_n - a_n) \in J$. Comme $b \neq 0$ (sinon $f \in I$), alors $1 \in J$ et donc $J = K[X_1, ..., X_n]$. □

Proposition 27. *Tout idéal maximal I de $K[X_1, ..., X_n]$ est premier.*

Démonstration. Soient $f, g \in K[X_1, ..., X_n]$ tels que $f g \in I \subsetneq K[X_1, ..., X_n]$ et $f \notin I$, $g \notin I$. Considérons alors l'idéal $\langle f \rangle + I = \{g + h, g \in \langle f \rangle, h \in I\}$ (on peut vérifier trivialement que c'est un idéal). Cet idéal contient strictement I puisque $f \notin I$.

Si $\langle f \rangle + I$ etait $K[X_1, ..., X_n]$ tout entier, alors il existerait des polynômes $c \in K[X_1, ..., X_n]$ et $h \in I$ tels que $1 = c f + h$ et l'on aurait alors $g = g c f + g h \in I$ ce qui amène à une contradiction ($g \notin I$) et implique que $\langle f \rangle + I$ est un idéal propre contenant I qui n'est donc pas maximal. □

Théorème 28. *Si K est un corps algébriquement clos, tout idéal maximal de $K[X_1, ..., X_n]$ est de la forme $\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ avec $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.*

Démonstration. Soit $I \subsetneq K[X_1, ..., X_n]$ un idéal maximal. Par le théorème des zéros faible $V(I) \neq 0$. Soit alors $a = (a_1, ..., a_n) \in V(I)$. On a alors $I(V(I)) \subset I(\{a\})$ et donc par le théorème des zéros fort $I(V(I)) = \sqrt{I} \subset I(\{a\})$. I étant maximal et contenu dans $\sqrt{I}$ alors $I \subset I(\{a\})$.

Pour tout $f \in K[X_1, ..., X_n]$, on peut décomposer $f = A_1 (X_1 - a_1) + ... + A_n (X_n - a_n) + b$ avec $b \in \mathbb{K}$ et en particulier, $f(a) = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Ainsi $f \in I(\{a\}) \Rightarrow f \in \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$.

Inversement $f \in \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow f \in I(\{a\})$ donc $\langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle = I(\{a\})$ et on a alors $I \subset \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ qui est lui-même maximal. □

Corollaire 29. *Si K est un corps algébriquement clos, les 2 applications suivantes*

$$\begin{array}{ccc} K^n & I & K[X_1, ..., X_n] \\ \textit{points} & \rightarrow & \textit{idéaux maximaux} \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{ccc} K[X_1, ..., X_n] & V & K^n \\ \textit{idéaux maximaux} & \rightarrow & \textit{points} \end{array}$$

sont réciproques l'une de l'autre et définissent une bijection.