1. Theoreme de Sturm pour un polynôme quelconque

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose :

- $f_0 = P,\ f_1 = P'$
- pour $i = 1...s-1$, $f_{i+1} = -\text{Reste}(f_{i-1}, f_i)$ avec $0 < \deg(f_{i+1}) < \deg(f_i) < \deg(f_{i-1})$
- $f_s = -\text{Reste}(f_{s-2}, f_{s-1}) \approx \text{GCD}(P, P')$

1. Montrer que $\forall i = 0...s\ \overline{f_i} = f_i / f_s \in \mathbb{R}[X]$
2. Montrer que la suite $\overline{f_i}$ ainsi construite avec a, b tels que $P(a)\,P(b) \neq 0$ vérifie $\text{Var}(f_i(a), i = 0...s) - \text{Var}(f_i(b), i = 0...s) =$ nombre de racines réelles de P dans (a, b).

2. « Reciproque » de la Règle de Descartes

Notation 1. *Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \in \mathbb{R}[X]$ et soient k et c 2 entiers positifs tels que $c < 2^k$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit :*

$$I_{k,c} =]\frac{c}{2^k}, \frac{c+1}{2^k}], \quad P_{k,c} = 2^{kn}\, P(\frac{x+c}{2^k}),$$
$$R(P(x)) = x^n\, P(\frac{1}{x}),\ \ H_\lambda(P(x)) = P\,(\lambda\, x),\ \ T_\lambda(P(x)) = P\,(x+\lambda).$$

Les intervalles $I_{k,c}$ sont appelés intervalles standard.

1. On suppose que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ est un polynôme sans facteurs carrés à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et ayant toutes ses racines dans $]0, 1[$. Montrer que
   a) $\text{Var}\,(T_1\, R(P_{k,c}))$ majore le nombre de racines réelles de P dans $I_{k,c}$ et est égal à celui-ci modulo 2.
   b) Si P n'a aucune racine complexe dans le disque de centre $(0, (2\,c+1)\,/\,2^k)$ et de rayon $1/2^k$, alors $\text{Var}\,(T_1\, R(P_{k,c})) = 0$.
2. On suppose $P = \sum_{i=0}^{n} a_n\, X^n \in \mathbb{R}[X]$, sans racine multiple avec une unique racine (réelle) dans $]0,\ 1[$ et aucune racine non réelle dans les disques D_0 (centre $(0,\ 0)$ rayon 1) et D_1 (centre $(1, 0)$ et rayon 1).
   a) Montrer que si A est un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ tel que $\text{Var}(A) = 1$, alors pour tout $b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\text{Var}\,(A \cdot (x+b)) = 1$
   b) Montrer que les facteurs quadratiques apparaissant dans la factorisation de $T_1\, R(P)$ sont tous de la forme $(x^2 + b\,x + c)$ avec $b > 1$ et $b > c > 0$
   c) Montrer que $\text{Var}\,(T_1\, R(P)) = 1$
3. Donner un algorithme complet d'isolation basé sur la règle de Descartes et utilisant le même procédé dichotomique que celui basé sur le théorème de Sturm en prouvant qu'il termine. Argumenter sur son efficacité probable

3. Paramétrisation rationnelle de solutions de systèmes algébriques en 2 variables

Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X, Y]$ sans facteurs communs dans $\mathbb{Q}[X, Y]$ avec $\deg_Y(P) > \deg_Y(Q)$. En outre $\text{Res}_Y(P, Q) \neq 0$ dans $\mathbb{Q}[X]$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $P(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \beta) = 0$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\text{lc}_Y(P)(\alpha)\text{lc}_Y(Q)(\alpha) \neq 0$. On définit l'entier k_α par $k_\alpha = \inf\,(j, \text{sres}_j(P, Q)(\alpha) \neq 0)$. Montrer que $\text{Sres}_{k_\alpha}(P, Q)(\alpha, Y) \sim \text{PGCD}(P(\alpha, Y), Q(\alpha, Y))$.
2. Montrer que l'on peut alors décomposer le système $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, P(\alpha, \beta) = 0, Q(\alpha, \beta) = 0\}$ en une union finie de systèmes disjoints de la forme $\cup_{i=1}^{s}\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, R_i(\alpha) = 0, B_i(\alpha, \beta) = 0\}$ tels que $R_i \in \mathbb{Q}[X]$, $B_i \in \mathbb{Q}[X, Y]$ et $\forall \alpha \in \mathbb{C}, R_i(\alpha) = 0, B_i(\alpha, Y) \sim \text{PGCD}(P(\alpha, Y), Q(\alpha, Y))$.

3. Si on suppose que $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta') \Rightarrow \alpha \neq \alpha'$ pour tous couples (α, β), (α', β') tels que $P(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \beta) = P(\alpha', \beta') = Q(\alpha', \beta') = 0$, montrer que l'on peut alors décomposer le système $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, P(\alpha, \beta) = 0, Q(\alpha, \beta) = 0\}$ en une union finie de systèmes disjoints de la forme $\cup_{i=1}^{s}\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, R_i(\alpha) = 0, \beta = C_i(\alpha)\}$ avec $R_i, C_i \in \mathbb{Q}[X]$.
4. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on définit $T_a = X + a\,Y$. Montrer que sauf pour un nombre fini de valeurs de a , pour tous couples $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ tels que $P(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \beta) = P(\alpha', \beta') = Q(\alpha', \beta') = 0$, $t_a(\alpha, \beta) \neq t_a(\alpha', \beta')$. On dit alors que T_a sépare les racines du système $\{P = 0, Q = 0\}$.
5. Trouver un algorithme permettant de calculer $a \in \mathbb{Z}$ tq T_a sépare les racines du système $\{P = 0, Q = 0\}$.
6. Montrer que l'on peut alors décomposer le système $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, P(\alpha, \beta) = 0, Q(\alpha, \beta) = 0\}$ en une union finie de systèmes disjoints de la forme $\cup_{i=1}^{s}\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, R_i(\gamma) = 0, \alpha = C_{X,i}(\gamma)$, $\beta = C_{Y,i}(\gamma)\}$avec $R_i, C_{X,i}, C_{Y,i} \in \mathbb{Q}[T]$.