1. Discriminant de 2 polynômes

Kest un corps, $\overline{K}$ sa clôture algébrique. Soit $P=\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in K[X]$, unitaire ($a_d=1$) de degré d dont les racines (non forcément distinctes) dans $\overline{K}$ sont notées $\alpha_1, \dots, \alpha_d$. On définit le discriminant de P par $\mathrm{Dis}(P)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant d} (\alpha_i-\alpha_j)^2$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme à coefficients entiers $D_d(u_1, \dots, u_d)$ tel que $\mathrm{Dis}(P) = D_d(a_1, \dots, a_d)$. En déduire que $\mathrm{Dis}(P)\in K$.
2. Montrer que $\mathrm{Dis}(P)=(-1)^{d(d-1)/2}\mathrm{Res}_X(P,P')$
3. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes
   i. P et P' ont un facteur en commun non constant
   ii. P a une racine multiple dans $\overline{K}$
   iii. $\mathrm{Dis}(P)=0$

On suppose maintenant que $a_d\neq 0$ et a_d non forcément égal à 1 et on pose :

$$\mathrm{Dis}(P)=\mathrm{lc}(P)^{2d-2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant d} (\alpha_i-\alpha_j)^2$$

4. Montrer que $\mathrm{lc}(P)\,\mathrm{Dis}(P)=(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}\mathrm{Res}(P,P')$.

2. Majoration des racines d'un poylynôme de $\mathbb{Z}[X]$

Soit $P=\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire ($a_d=1$) de degré d. Montrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$ tq $P(\alpha)=0$

1. $|\alpha|<1+\max_{i=0}^{d}(|a_i|)$
2. Si $\forall i=0\dots d$, $a_i\geqslant 0$, alors P n'a aucune racine réelle positive. Si $\alpha\in\mathbb{R}^{+\star}$, alors $\alpha < 2\left(\max_{a_i<0}(-a_i)^{\frac{1}{d-i}}\right)$

3. Séparation des racines d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$

Soit $P=\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d sans facteur carré, dont les racines complexes sont notées $\alpha_1, \dots, \alpha_d$.

On définit la borne de Mahler de P par $M(P)=|a_n|\prod_{k=1}^{d}\max(1,|\alpha_k|)$ et le séparateur de P comme étant la distance minimale entre 2 racines distintes de P : $\mathrm{sep}(P)=\min_{i\neq j}|\alpha_i-\alpha_j|$. On note $||P||_2=\sqrt{\sum_{i=0}^{d} a_i^2}$.

1) Soit

$$P_d=\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_d\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{d-1} & \dots & \alpha_d^{d-1}\end{bmatrix}$$

Montrer que $a_d^{2d-2}\det(P_d)^2=|\mathrm{Discrim}(P)|$

2) On ordonne les racines de P de telle sorte que $|\alpha_1|\geq\dots\geq|\alpha_m|\geq 1\geq|\alpha_{m+1}|\geq\dots|\alpha_d|$.
Monter que

$$\frac{\det(P_d)}{(\alpha_i-\alpha_j)}=\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{i-1} & q_1 & \alpha_{i+1} & \dots & \alpha_d\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_1^{d-1} & \dots & \alpha_{i-1}^{d-1} & q_{d-1} & \alpha_{i-1}^{d+1} & \dots & \alpha_d^{d-1}\end{vmatrix}$$

avec $q_1=1$ et $q_l=\alpha_i^{l-1}+\alpha_i^{l-2}\alpha_j+\dots+\alpha_i\alpha_j^{l-2}+\alpha_j^{l-1}$ pour $l>1$.

3) Montrer que si on suppose $i > j$, $\frac{\mathrm{Discrim}(P)}{a_d^{2d-2}\,|(\alpha_i - \alpha_j)\prod_{i=1\ldots m}\alpha_i^{d-1}|^2} \leq \frac{d^{d-1}\,d\,(d-1)\,(2\,d-1)}{6}$

4) En déduire que $\mathrm{sep}(P)^2 \geq \frac{3}{(M(P)^{d-1})^2}\cdot\frac{1}{d^{d+2}}$

5) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $||\,(\,\bar{z}x-1)P(x)||_2 = ||\,(x-z)\,P(x)||_2$

6) On suppose que $P(x) = a_n\prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$ et pour tout m tel que $d > m \geqslant 0$, on pose $Q(X) = a_n\prod_{i=1}^{m}(\bar{\alpha_i}X - 1)\prod_{i=m+1}^{d}(x-\alpha_i)$.

a) Montrer que $\|P\|_2^2 = ||\,Q||_2^2 \geq |a_n|^2\prod_{i=1}^{m}|\bar{\alpha_i}|^2 + |a_n|^2\prod_{i=m+1}^{d}|\alpha_i|^2$

b) En déduire que $\mathrm{sep}(P) \geq \sqrt{\frac{3}{d^{d+2}}}\cdot\frac{1}{||\,P||_2^{d-1}}$.

4. Isolation des zéros réels d'un poylynôme de $\mathbb{Z}[X]$

Utiliser les 2 exercices précédents pour proposer un algorithme permettant d'isoler les racines réelles d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ par des intervalles à bornes rationnelles, c'est à dire fournir une liste disjointe d'intervalles à bornes rationnelles, chaque intervalle contenant une et une seule racine réelle, chaque racine réelle étant contenue dans au moins 1 intervalle.

Cet algorithme est-il efficace ?