

Théorie algébrique pour les systèmes de dimension infinie

Mini cours – Laboratoire des Signaux et Systèmes

Hugues Mounier[†], en collaboration avec Joachim Rudolph[‡] et Frank Woittennek^{*}

[†]L2S, Université de Paris Sud, Orsay ; [‡]LSR, Universität des Saarlandes, Sarebruck ; ^{*}IRS, Technische Universität Dresden, Dresde

Juin/juillet 2015

Plan

- ▶ Motivations et modèles
- ▶ Notions d'algèbre
- ▶ Cadre algébrique
- ▶ Exemples : torsion d'une poutre ; système de forage
- ▶ Liberté distribuée

Motivations et modèles; liberté

- Équations de propagation
- Équations de diffusion
- Buts poursuivis
- Critères de commandabilité
- Liberté
- Schéma bicéphale pour le suivi

Équations de la poutre

- Comportement en torsion d'une barre flexible, avec un couple appliqué à un bout et une masse à l'autre bout.
- Équation des ondes unidimensionnelle

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}(\tau, z) = \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}(\tau, z)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z}(\tau, 0) = -u(\tau), \quad \frac{\partial q}{\partial z}(\tau, L) = -J \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}(\tau, L)$$

$$q(0, z) = q_0(z), \quad \frac{\partial q}{\partial \tau}(0, z) = q_1(z)$$

Équations de la poutre (suite)

- $q(\tau, z)$ déplacement angulaire de la position non excitée à un point $z \in [0, L]$ à l'instant $\tau \geq 0$
- L la longueur de la barre
- σ l'inverse de la vitesse de propagation des ondes
- J le moment d'inertie de la masse
- $u(\tau)$ le couple de commande
- q_0, q_1 déplacement et vitesse angulaire initiaux.

Modèle à retards

- Solution générale

$$q(\tau, z) = \phi(\tau + \sigma z) + \psi(\tau - \sigma z)$$

- ou encore, dans le plan de Laplace

$$\hat{q}(s, z) = e^{\sigma z s} \hat{\phi}(s) + e^{-\sigma z s} \hat{\psi}(s)$$

- Sortie choisie

$$y(\tau) = q(\tau, L)$$

Modèle à retards (suite)

- Posant $t = (\sigma/J)\tau$, $v(t) = (2J/\sigma^2)u(t)$ and $T = \sigma L$, on obtient

$$\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t - 2T) + \dot{y}(t) - \dot{y}(t - 2T) = v(t - T)$$

Équation de la chaleur avec commande en température

- Équation de la chaleur sans échange de chaleur à une extrémité et à température imposée à l'autre :

$$\partial_x^2 w(x, t) = \partial_t w(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, +\infty[\quad (1a)$$

$$\partial_x w(0, t) = 0 \quad (1b)$$

$$w(1, t) = u(t) \quad (1c)$$

- Décrit un processus de diffusion dans une barre homogène,
- $w(x, t)$: température de la barre en x et à t .
- Première conditions aux limites : pas de flux de chaleur en $x = 0$
- Deuxième : température fixée par $u(t)$ en $x = 1$.

Des relations entrée/sortie

- Transformée de Laplace d'hyperfonctions ou équation opérationnelle de Mikusiński

$$s\widehat{w}(x) = \partial_x^2 \widehat{w}(x, s)$$

- et à s fixé, on obtient l'EDO

$$\frac{d^2 \widehat{w}}{dx^2}(x; s) - s\widehat{w}(x; s) = 0 \quad (2)$$

- Équation caractéristique associée

$$\zeta^2 - s = 0$$

- Solution générale

$$\widehat{w}(x, s) = e^{x\sqrt{s}}\lambda_1(s) + e^{-x\sqrt{s}}\lambda_2(s)$$

But de commande

- Modèle d'analyse/modèle de commande
- Analyse fine du comportement des solutions pas toujours nécessaire
- Exemple : stabilisation de

$$\dot{x} = f(x) + u$$

- Solution simple

$$u = -f(x) - \lambda x$$

But de commande (suite)

- **Ne nécessite aucunement** une analyse détaillée du comportement de $\dot{x} = f(x)$
- qui **peut être fort complexe**
- Prédésumé : ne pas se fixer de cadre fonctionnel restrictif a priori
- Plutôt essayer d'obtenir des notions constructives à partir de la structure des équations
- D'où l'utilisation de notions algébriques

Divers critères de commandabilité

Système classique, mono-entrée

$$s\mathbf{x} = A\mathbf{x} + bu, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

- Critère de **Kalman**

$$\text{rg}_{\mathbb{R}}[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = n$$

- Critère de **Hautus-Popov-Belevitch**

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \text{rg}_{\mathbb{C}}[sI - A \mid b] = n$$

Critères de commandabilité : forme compagnon

- Mise sous **forme compagnon**

$$sZ_1 = Z_2$$

$$sZ_2 = Z_3$$

$$\vdots$$

$$sZ_{n-1} = Z_n$$

$$sZ_n = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \dots + \alpha_n Z_n + \beta u$$

- Sous-espace de **non commandabilité de Kalman** vide.

Sur la commandabilité

- Qu'est-ce qu'un système **non commandable** ?
- Absence de commandabilité : on ne peut joindre n'importe quel point.
- ou encore l'espace atteignable est non vide
- Dans cet espace inatteignable, la commande n'a aucun effet
- et les variables y évoluent de manière autonome

Sur la commandabilité

- Qu'est-ce qu'un système **non commandable** ?
- Absence de commandabilité : on ne peut joindre n'importe quel point.
- ou encore l'**espace atteignable est non vide**
- Dans cet espace inatteignable, la commande n'a aucun effet
- et **les variables y évoluent de manière autonome**

Sur la commandabilité

- Qu'est-ce qu'un système **non commandable** ?
- Absence de commandabilité : on ne peut joindre n'importe quel point.
- ou encore l'**espace atteignable est non vide**
- Dans cet espace inatteignable, la commande n'a aucun effet
- et **les variables y évoluent de manière autonome**

Sur la commandabilité : exple académique

- Considérons le système

$$\dot{x}_1 = x_1 + u \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 - u \quad (4)$$

- Posant $z = x_1 + x_2$, on a, par addition (3)+(4) :

$$\dot{z} = z$$

- Équation vérifiée quelle que soit la valeur de u

Forme compagnon & suivi

- Qu'est ce qu'un **système commandable** ?
- Un système que l'on peut, classiquement, faire passer d'un point à tout autre dans l'espace d'état à l'aide de la commande
- Malaisé à voir avec le critère de Kalman
- La **forme compagnon** permet un suivi de trajectoire des plus aisés de $y = z_1$:

$$u_d = -\frac{1}{\beta} \left(\alpha_1 y_d + \alpha_2 s y_d + \dots + \alpha_n s^{n-1} y_d(t) - s^n y_d(t) \right)$$

Forme compagnon & suivi

- Qu'est ce qu'un **système commandable** ?
- Un système que l'on peut, classiquement, faire passer d'un point à tout autre dans l'espace d'état à l'aide de la commande
- Malaisé à voir avec le critère de Kalman
- La **forme compagnon** permet un suivi de trajectoire des plus aisés de $y = z_1$:

$$u_d = -\frac{1}{\beta} \left(\alpha_1 y_d + \alpha_2 s y_d + \dots + \alpha_n s^{n-1} y_d(t) - s^n y_d(t) \right)$$

Forme compagnon & suivi

- Qu'est ce qu'un **système commandable** ?
- Un système que l'on peut, classiquement, faire passer d'un point à tout autre dans l'espace d'état à l'aide de la commande
- Malaisé à voir avec le critère de Kalman
- La **forme compagnon** permet un suivi de trajectoire des plus aisés de $y = z_1$:

$$u_d = -\frac{1}{\beta} \left(\alpha_1 y_d + \alpha_2 s y_d + \dots + \alpha_n s^{n-1} y_d(t) - s^n y_d(t) \right)$$

Forme compagnon & suivi

- Par ailleurs, z_1 fournit une paramétrisation complète : toute variable s'exprime comme combinaison linéaire de z_1 et d'un nombre fini de ses dérivées.

$$z_2 = sz_1$$

$$z_3 = s^2 z_1$$

$$\vdots$$

$$z_n = s^{n-1} z_1$$

$$u = -\frac{1}{\beta} \left(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 s z_1 + \dots + \alpha_n s^{n-1} z_1 - s^n z_1 \right)$$

$$y = z_1$$

- Cette agréable propriété se nomme la **liberté**.

Liberté

Un modèle de dim. finie muni d'une entrée $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ est **libre** s'il existe

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_m(t))$$

une **base** (ou **sortie plate**), t.q. :

- 1/ Elle fait partie du modèle (caractère **endogène**) :
les ω_i sont C.L. des variables du modèle (c.à.d. \mathbf{x} , \mathbf{u} ici) et de leurs dérivées :

$$\omega_i = L\mathbf{x} + N_0\mathbf{u} + N_1s\mathbf{u} + \dots + N_\alpha s^\alpha \mathbf{u}$$

$$L \in \mathbb{R}^{n \times n}, N_i \in \mathbb{R}^{n \times m}, i = 0, \dots, \alpha.$$

Liberté

- 2/ Ses composantes sont indépendantes (**indépendance**) :
Il n'existe aucune relation différentielle entre les ω_j :

$$M_0\omega + M_1s\omega + \dots + M_\beta s^\beta\omega = 0 \quad \implies \quad M_i = 0$$

$$M_i \in \mathbb{R}^{q \times m}, \quad i = 0, \dots, \beta.$$

Liberté (suite)

- 3/ Elle fournit une paramétrisation complète du système (**forme canonique de suivi**) :

$$\mathbf{x} = P_0\boldsymbol{\omega} + P_1s\boldsymbol{\omega} + \dots + P_\gamma s^\gamma\boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = Q_0\boldsymbol{\omega} + Q_1s\boldsymbol{\omega} + \dots + Q_\mu s^\mu\boldsymbol{\omega} \quad (6)$$

$$P_i \in \mathbb{R}^{n \times m}, Q_j \in \mathbb{R}^{m \times m}, i = 0, \dots, \gamma, j = 0, \dots, \mu,$$

La dernière propriété, et surtout (6) est une sol. simple au suivi de la sortie $\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega}$.

Un mot de méthodologie

- Formulation d'atteinte d'objectif en suivi de trajectoires
- Suivi réalisé en 2 étapes découplées :
 - Suivi en boucle ouverte, utilisant la liberté (ou la platitude).
 - Stabilisation **autour** de la trajectoire.

Suivre ou ne pas suivre ?

- Cette deuxième étape de stabilisation peut être réalisée par toute méthode de stabilisation.
- Quel est l'avantage de cette démarche à 2 étapes par rapport à une approche de type "stabilisation pure" ?

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

- Supposons avoir un changement de point de consigne, $y(t)$ passant de y_0 à y_1 , dont l'amplitude $|y_1 - y_0|$ est importante par rapport aux grandeurs caractéristiques du modèle.
- Réalisant ce changement directement en cherchant à faire tendre vers zéro $|y(t) - y_1|$ (par exemple avec un PID classique), on obtient des dépassements ("overshoots") et des oscillations indésirables.
- En effectuant d'abord un suivi en utilisant la liberté, on se laisse guider par le modèle plutôt que d'essayer de le forcer.

Modèle du second ordre

Équation de Newton :

$$M\ddot{z} + \gamma\dot{z} + kz = F$$

avec

F force appliquée

$\gamma\dot{z}$ terme d'amortissement

kz terme de raideur

Second ordre : trajectoire de référence

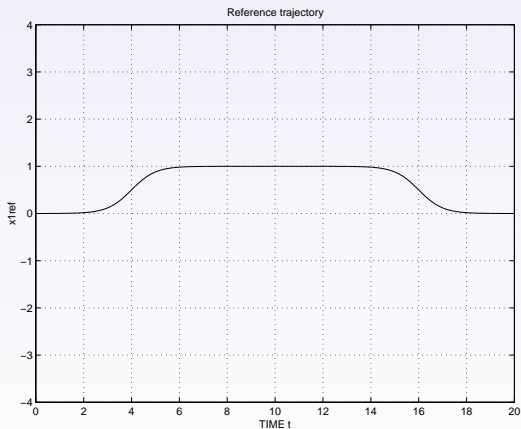


FIGURE 1 : Trajectoire désirée en hauteur

Second ordre : trajectoire de référence

- Méthode du **couple calculé** (*Computed Torque*)

$$F_{\text{ref}}(t) = M\ddot{z}_{\text{ref}}(t) + \gamma\dot{z}_{\text{ref}}(t) + kz_{\text{ref}}(t)$$

Second ordre : commande de référence

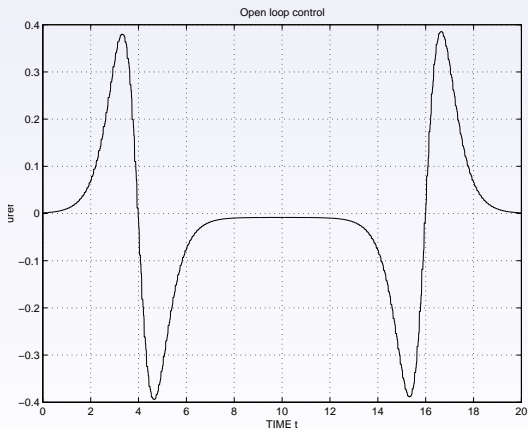


FIGURE 2 : Loi de commande en boucle ouverte réalisant le suivi

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

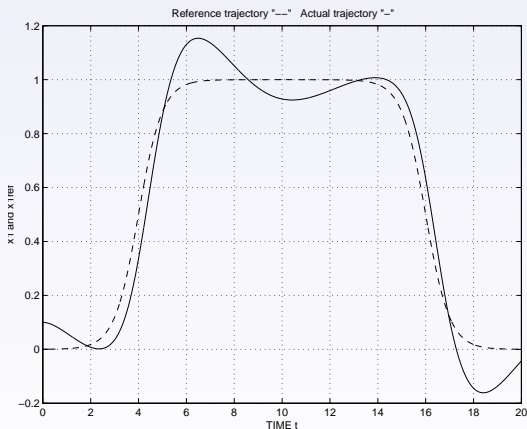


FIGURE 3 : Trajectoire de référence et réelle (PID pur)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

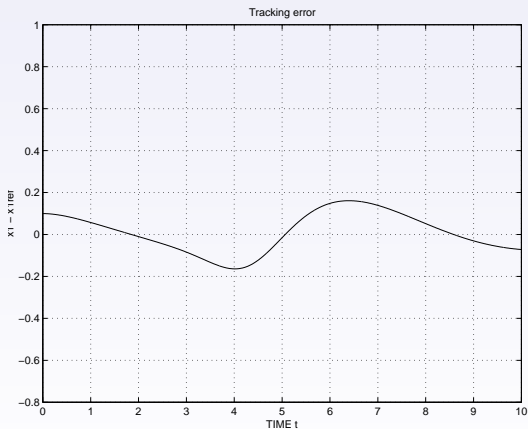


FIGURE 4 : Erreur de suivi (PID pur)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

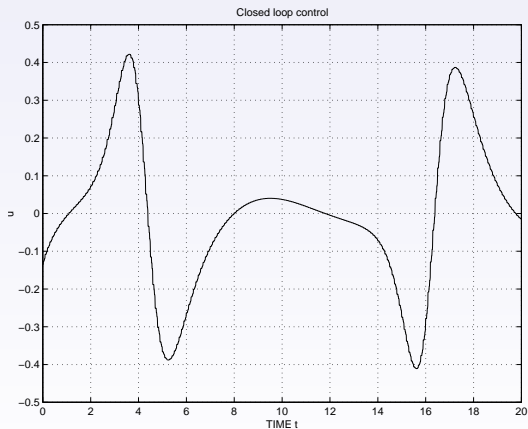


FIGURE 5 : Loi de commande appliquée (PID pur)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

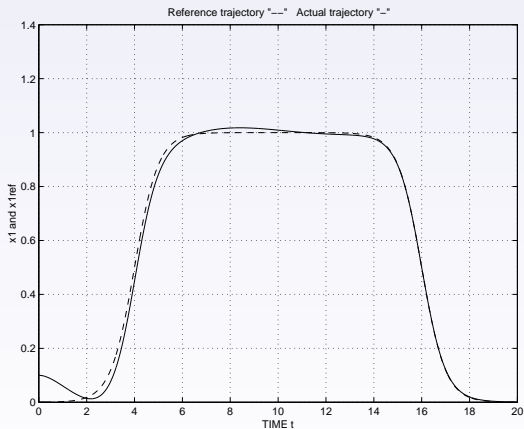


FIGURE 6 : Trajectoire de référence et réelle (suivi stabilisé par PID)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

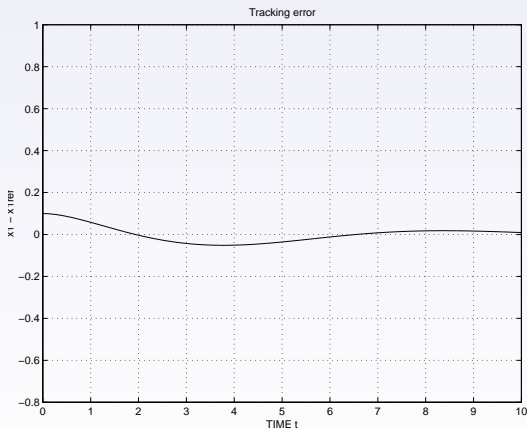


FIGURE 7 : Erreur de suivi (suivi stabilisé par PID)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

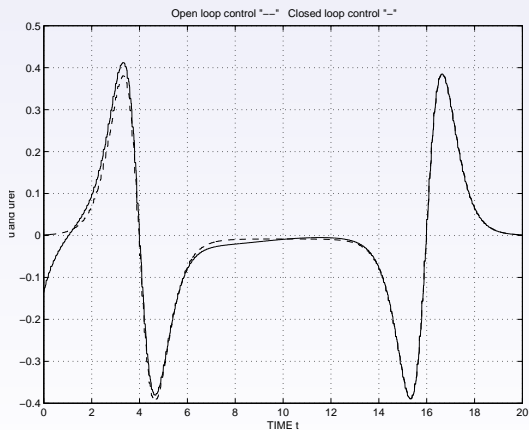


FIGURE 8 : Commandes en boucle ouverte et appliquée (suivi stabilisé par PID)

Liens multirésolution/génie logiciel

- Se retrouve en génie logiciel (**forte cohésion, faible couplage**).
- Hiérarchisation à deux résolutions
 - La première étape permet un “dégrossissage” du problème, en **se laissant guider par le modèle** (au travers de la liberté).
 - La deuxième affine le suivi et **corrige les imperfections** de modèle et méconnaissances de conditions initiales par bouclage.

Avantages de ce schéma

- Performances

La loi de commande en boucle ouverte est obtenue **sans intégrer d'équation différentielle**. Elle peut donc être calculée hors-ligne et tabulée

- Choix de la trajectoire

Donne une grande **souplesse** par rapport à un simple changement de point de consigne

Avantages de ce schéma (suite)

- **Respect des contraintes**

Pour des spécifications données (bornes d'erreur, . . .), permet de moins relever les gains et donc de **dépenser moins d'énergie** par le biais de la commande

- **Contrôle des transitoires**

Spécialement pour des systèmes non linéaires, se laisser guider par un modèle permet de **maîtriser les évolutions transitoires** en changement de régime

Quelques notions d'algèbre

- Module, liberté, torsion
- Idéal, extension des scalaires, localisation
- Projectivité et liberté

Module

Définition

Un anneau $(R, +, \cdot)$ est un groupe $(R, +)$ avec distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

$$\forall r_1 \in R, \exists r_2 \in R, \quad r_1 + r_2 = 0, \quad \text{inverse pour } +$$

$$\exists e \in R, \forall r \in R, \quad r + e = e + r = r, \quad \text{élt. neutre pour } +$$

$$\exists \epsilon \in R, \forall r \in R, \quad r \cdot \epsilon = \epsilon \cdot r = r, \quad \text{élt. neutre pour } \cdot$$

$$\forall r_1, r_2, r_3 \in R, \quad r_1 \cdot (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3, \quad \text{ditributivité}$$

- Exemples : $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$, $(C^\infty, +, *)$
- Un corps est un anneau avec existence d'inverse pour la multiplication $(\mathbb{R}, \mathbb{R}(x))$

Module (suite)

- On considère un anneau R commutatif, unifié (élt neutre pour \cdot) et sans diviseur de zéro.

Définition

Un R -module M est un groupe commutatif muni d'une action sur R , c'est-à-dire d'une application $R \times M \rightarrow M$, écrite $(r, m) \mapsto rm$, telle que, pour tous $r, s \in R$ et $m, n \in M$, l'on ait :

$$r(sm) = (rs)m \quad (\text{associativité})$$

$$r(m + n) = rm + rn$$

$$(r + s)m = rm + sm \quad (\text{distributivité})$$

$$1m = m \quad (\text{identité})$$

Module (suite)

- Un module a les mêmes axiomes qu'un espace vectoriel, mais ses scalaires sont pris dans un corps au lieu d'un anneau

Module : exemples

- D'où des propriétés moins simples, car on ne peut pas toujours inverser les scalaires
- Exemple

$$\dot{y} = Ty + u$$

correspond à un module sur $\mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]$. On ne s'autorise pas d'intégration

- Par contre, en fonction de transfert

$$s\hat{y} = T\hat{y} + u \quad \text{s'écrit} \quad \hat{y} = \frac{1}{s - T}\hat{u}$$

et l'on a un espace vectoriel sur $\mathbb{R}(s)$. On s'autorise toute intégration

Combinaison linéaire, indépendance

- Soit S un sous-ensemble d'un R -module M

Définition

L'ensemble N de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de S est un sous-module de M , le sous-module engendré par S et l'on nomme S l'ensemble des générateurs de N .

- On notera $[S]$ le (sous)-module engendré par S

Combinaison linéaire, indépendance (suite)

Définition

Un sous-ensemble S d'un R -module M est dit linéairement indépendant (sur R) si, lorsque l'on a une combinaison linéaire de la forme

$$\sum_{m \in S} a_m m$$

qui est égale à zéro, alors $a_m = 0$ pour tous $m \in S$. Un sous-ensemble est dit linéairement dépendant s'il n'est pas linéairement indépendant.

Module quotient

- Soit M un R -module, et N un sous-module de M (N est un sous-ensemble de M qui est également un R -module)

Définition

Le module quotient M/N est l'ensemble des classes d'équivalence obtenues en égalant tout élément de N à zéro

- Exemple : si

$$\dot{y} = Ty + u$$

correspond au module $[y, u]$,

Module quotient (suite)

- Le module $[y, u]/[u]$ correspond à

$$\dot{\bar{y}} = T\bar{y}$$

puisque $\bar{u} = 0$ dans $[y, u]/[u]$

Générateurs et relations

Définition

Le M un R -module sera dit être donné par générateurs et relations s'il existe deux R -modules N et E tel que M soit en bijection avec le module quotient N/E . La matrice associée aux équations de M , P_M est nommée matrice de présentation de M

- Exemple : le système

$$\dot{y} = Ty + u$$

peut être défini comme le $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -module

$$[Y, U]/[(\frac{d}{dt} - T)Y - U]$$

- $P_M = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} - T & -1 \end{bmatrix}$

Exemple donné par générateurs et relations

- Prenons un modèle d'ondes de torsion dans une barre grossièrement discrétisée en espace

$$I\ddot{\alpha} = -mgL\alpha - k(\alpha - \theta)$$

$$J\ddot{\theta} = k(\alpha - \theta) - u$$

avec m, I les masse et inertie de la charge, L la distance du moteur à la charge (longueur de la barre), k le coefficient de raideur de la barre, J l'inertie du moteur et u le couple du moteur

Exemple donné par générateurs et relations (suite)

- Le module associé s'écrit

$$[A, \Theta, U] / [(I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k)A + k\Theta, (J \frac{d^2}{dt^2} + k)\Theta - kA + U]$$

- Ou encore, en matriciel

$$\begin{pmatrix} I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k & k & 0 \\ k & J \frac{d^2}{dt^2} + k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = 0$$

- La matrice de présentation associée est donc

$$P_M = \begin{pmatrix} I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k & k & 0 \\ k & J \frac{d^2}{dt^2} + k & 1 \end{pmatrix}$$

Liberté, torsion

Définition

Un module est dit libre s'il contient une base, c.à.d., un sous-ensemble indépendant et générateur.

- Remarque : un espace vectoriel est toujours libre ; pas un module

Définition

Un élément m d'un R -module M est dit de torsion s'il existe $a \in R$, $a \neq 0$ tel que

$$am = 0$$

En d'autres termes, l'ensemble $\{m\}$ est linéairement dépendant.

Liberté, torsion (suite)

Définition

Un module M est dit de torsion si tous ses éléments le sont. Il est dit sans torsion si aucun de ses éléments n'est de torsion.

Exemple de torsion

- Reprenons un modèle d'ondes de torsion dans une barre grossièrement discrétisée en espace

$$I\ddot{\alpha} = -mgL\alpha - k(\alpha - \theta)$$

$$J\ddot{\theta} = k(\alpha - \theta) - u$$

- et supposons avoir une panne d'actionneur, $u = 0$
- On obtient, d'après la seconde équation

$$\alpha = \frac{J}{k}\ddot{\theta} + \theta$$

Exemple de torsion (suite)

- ce qui, reporté dans le première, donne

$$\frac{l}{k} \theta^{(4)} + \left(1 + \frac{mgLJ}{kl} + \frac{J}{I}\right) \ddot{\theta} + \frac{mgL}{I} \theta = 0$$

qui est une équation autonome vérifiée par θ , qui est un élément de torsion

- D'après l'expression de α en fonction de θ et $\ddot{\theta}$, l'élément α est également de torsion
- Donc, en cas de panne d'actionneur ($u = 0$), le module $[\alpha, \theta]$ est de torsion

Exemple de liberté

- Toujours sur le modèle d'ondes de torsion dans une barre grossièrement discrétisée en espace

$$I\ddot{\alpha} = -mgL\alpha - k(\alpha - \theta)$$

$$J\ddot{\theta} = k(\alpha - \theta) - u$$

- et sans panne d'actionneur ($u \neq 0$)
- On obtient, d'après la première équation

$$\theta = \ddot{\alpha} + \frac{mgL + k}{I} \alpha$$

Exemple de liberté (suite)

- et la seconde fournit

$$\begin{aligned} u &= -J\ddot{\theta} + k(\alpha - \theta) \\ &= -J\alpha^{(4)} - \left(\frac{J(mgL + k)}{I} + k \right) \ddot{\alpha} + k\alpha \end{aligned}$$

- c'est-à-dire une expression de la forme

$$u = -J\alpha^{(4)} - \zeta\ddot{\alpha} + k\alpha$$

- Et α est une base du $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -module $[\alpha, \theta, u]$

Exemple de suivi

- La dynamique de la base s'écrit

$$J\alpha^{(4)} = -\zeta\ddot{\alpha} + k\alpha - u \quad (7)$$

- Pour suivre une trajectoire $\alpha_{ref}(t) \in C^4(\mathbb{R})$, on prendra

$$u_{ref} = -J\alpha_{ref}^{(4)} - \zeta\ddot{\alpha}_{ref} + k\alpha_{ref} \quad (8)$$

- Pour assurer un suivi avec stabilité, nous devons tempérer la confiance faite au modèle dans la commande u_{ref}

Exemple de suivi (suite)

- Considérons que l'on mesure α ; on voudra que l'erreur

$$e_\alpha = \alpha - \alpha_{ref}$$

tende asymptotiquement vers zéro

- L'équation d'erreur s'obtient par la différence (7)–(8)

$$J e_\alpha^{(4)} = -\zeta \ddot{e}_\alpha + k e_\alpha - (u - u_{ref})$$

- On posera donc

$$u = u_{ref} + \sum_{i=0}^3 \lambda_i e_\alpha^{(i)}$$

Le premier terme est induit par le modèle et peut être calculé hors ligne; le deuxième incorpore les mesures

Idéal

Définition

Un idéal \mathfrak{a} de R est un sous-groupe additif de R tel que pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$ et $r \in R$, $r\alpha \in \mathfrak{a}$. C'est donc un sous-ensemble de R qui est également un R -module.

Idéal (suite)

Définition

Étant donné un idéal \mathfrak{a} de R , s'il existe une famille d'éléments $(\alpha_i)_{i \in I}$ ($I \subseteq \mathbb{N}$) de \mathfrak{a} tels que

$$\mathfrak{a} = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i p_i \mid p_i \in R \right\}$$

l'idéal \mathfrak{a} est dit engendré par la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$. Lorsque I est fini, \mathfrak{a} est dit finiment engendré.

Idéal (suite)

Définition

Avec M donné par générateurs et relations l'idéal de Fitting d'ordre i associé à M noté \mathfrak{F}_M^i , est défini comme l'idéal de R engendré par les déterminants de toutes les sous-matrices de taille $(\alpha - i) \times (\alpha - i)$ (les mineurs d'ordre $\alpha - i$) de P_M . Supposant que $\text{rg}_R P_M = \gamma$, nous noterons \mathfrak{F}_M l'idéal de Fitting associé aux mineurs d'ordre γ de P_M .

- Dans le cas où R est un anneau de polynômes en r indéterminées, nous considérerons les éléments de \mathfrak{F}_M comme des fonctions polynomiales de \mathbb{C}^r .

Exemple d'idéal de Fitting

- Reprenons le modèle d'ondes de torsion dans une barre discrétisée
- La matrice de présentation associée est

$$P_M = \begin{pmatrix} I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k & k & 0 \\ k & J \frac{d^2}{dt^2} + k & 1 \end{pmatrix}$$

- l'idéal de Fitting est engendré par

$$m_1 = \begin{vmatrix} I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k & k \\ k & J \frac{d^2}{dt^2} + k \end{vmatrix}, \quad m_2 = \begin{vmatrix} I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix},$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} k & 0 \\ J \frac{d^2}{dt^2} + k & 1 \end{vmatrix},$$

Exemple d'idéal de Fitting (suite)

- ou encore

$$m_1 = \left(I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k \right) \left(J \frac{d^2}{dt^2} + k \right) - k^2$$

$$m_2 = I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k$$

$$m_3 = k$$

Produit tensoriel

- Le produit tensoriel permet d'étendre l'anneau des scalaires agissant sur un module.
- Soit R un anneau, M et N deux R -modules.

Produit tensoriel (suite)

Définition

Notons F le groupe des combinaisons R -linéaires de toutes les paires ordonnées (m, n) . Soit L le sous-groupe de F engendré par tous les éléments de la forme

$$\begin{aligned} (m + m', n) - (m, n) - (m', n), & \quad (am, n) - a(m, n) \\ (m, n + n') - (m, n) - (m, n'), & \quad (m, an) - a(m, n) \end{aligned}$$

où $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ et $a \in R$. On pose alors $M \otimes_R N = F/L$; il s'agit d'un R -module que l'on nomme produit tensoriel des modules M et N .

- Les éléments de $M \otimes_R N$ s'écrivent $\sum_{\text{finie}} m_i \otimes_R n_j$ (ou $\sum_{\text{finie}} m_i \otimes n_j$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion) et ce de manière non unique en général.

Produit tensoriel (suite)

- Un des avantages de cette construction est de pouvoir réduire des applications bilinéaires sur $M \times N$ à des applications linéaires sur $M \otimes_R N$.

Extension des scalaires – localisation

- Soient R et S deux anneaux avec $R \subseteq S$, S étant un R -module et M un R -module.

Définition

Alors on dit que le S -module $S \otimes_R M$ est obtenu à partir de M par extension des scalaires.

Extension des scalaires – localisation (suite)

Définition

Soit \mathcal{S} un sous-ensemble multiplicativement clos de R (c'est-à-dire pour tous $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}$, $\pi_1\pi_2 \in \mathcal{S}$ et $1 \in \mathcal{S}$). Le localisé en \mathcal{S} de R est un anneau, noté $S^{-1}R$, muni d'un morphisme $\phi : R \longrightarrow S^{-1}R$ tel que

- (i) pour tout $\pi \in \mathcal{S}$, $\phi(\pi)$ est inversible dans $S^{-1}R$;
- (ii) pour tout $q \in S^{-1}R$, il existe des $p \in R$ et $\pi \in \mathcal{S}$ tels que $q = \phi(p)\phi(\pi)^{-1}$.

On note généralement l'élément q précédent par p/π .

Projectivité

- Caractérisation de la commandabilité des systèmes de dimension finie : liberté du module sous-jacent
- repose sur

Proposition

Les notions de liberté et d'absence de torsion sont équivalentes pour tout module sur $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$.

- Dans le cas des systèmes à paramètres répartis, cette caractérisation n'est plus valable, *la liberté d'un R -module M étant une notion plus forte que le fait d'être sans torsion* (l'implication inverse de la suivante est fausse) :

$$M \text{ libre} \implies M \text{ sans torsion}$$

Projectivité (suite)

- Il faut en fait distinguer deux propriétés : la liberté et la projectivité.

- **Définition**

Un module M sur un anneau commutatif R est donc dit projectif, si $N = M \oplus \widetilde{M}$ où N est un module libre

Critères de projectivité

- Sur un anneau commutatif R , intègre et sans diviseurs de zéros :

Proposition

Un R -module M est projectif si, et seulement si son idéal de Fitting \mathfrak{J}_M est égal à R .

- Dans le cas où R est un anneau de fonctions entières d'une variable complexe, on note $\mathcal{V}(\mathfrak{J})$ la variété complexe

$$\mathcal{V}(\mathfrak{J}) = \{s \in \mathbb{C} \mid \forall f \in \mathfrak{J}, f(s) = 0\}$$

Critères de projectivité (suite)

- On dira que *le Nullstellensatz est vrai sur R* , si pour tout idéal \mathfrak{J} de R tel que la variété associée $\mathcal{V}(\mathfrak{J})$ soit vide, l'on a $\mathfrak{J} = R$
- Si le Nullstellensatz est vrai sur R , M est projectif si une matrice de présentation P_M est inversible à droite (s'il existe $Q \in R^{\alpha \times \beta}$ tel que $P_M Q = I_\beta$).
- Ceci est directement lié aux équations de Bezout matricielles
- Prenant une dynamique Λ d'équations

$$\dot{\mathbf{x}} = F\mathbf{x} + G\mathbf{u}$$

avec F et G des matrices à coefficients dans R de tailles appropriées,

Critères de projectivité (suite)

- la projectivité de Λ revient à l'existence de matrices \bar{F} et \bar{G} à coefficients dans R telles que

$$\left[\frac{d}{dt} I_n - F \right] \bar{F} + G \bar{G} = I_n.$$

- Ce type d'équation peut servir à des fins de stabilisation par retour d'état dynamique (cf. Vidyasagar)

Projectivité et liberté

- Théorème de Quillen et Suslin

Théorème

Tout module projectif sur un anneau de polynômes ($k[X_1, \dots, X_n]$ où k est un corps) est libre.

Cadre algébrique

- Système
- Commandabilités sans torsion, projective et libre
- π -liberté

Systèmes et dynamiques

R anneau commutatif unitaire, sans diviseurs de zéro.

- Un R -système est un R -module finiment engendré.
- Une R -dynamique Λ est un R -système muni d'une entrée, c.à.d. un sous ensemble \mathbf{u} de Λ tel que $\Lambda/[\mathbf{u}]$ est de torsion.
- Élément $w \in \Lambda$ de torsion :

$$\exists p \in R, p \neq 0, \quad pw = 0$$

Exemple :

$$\frac{d}{dt}x - x = \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) x = 0$$

Systèmes et dynamiques (suite)

- $\Lambda/[u]$ est de torsion :

$$\forall w \in \Lambda, \exists p, q \in R, p \neq 0, \quad pw = qu$$

Toute variable d'une dynamique est (différentiellement) influencée par l'entrée. Par exemple, pour

$$\frac{d}{dt} y = -y + u$$

Dans $[u, y]/[u] = [\bar{y}]$:

$$\frac{d}{dt} \bar{y} + \bar{y} = 0$$

Systèmes et dynamiques (suite)

- Une **sortie** du système Λ est un sous-ensemble de Λ .
- Un **R -système entrée-sortie** est une R -dynamique munie d'une sortie.
- Contrairement à la description kalmanienne d'état, cette description inclut **toutes les variables du système**.

Notions de commandabilité

- Un R -système Λ est R -commandable sans torsion (resp. R -commandable projectif, R -commandable libre) si Λ est sans torsion (resp. projectif, libre).
- Un R -module est sans torsion s'il ne contient aucun élément de torsion, c.à.d. aucun élément w satisfaisant $pw = 0$, avec $p \in R, p \neq 0$.
- Un élément de torsion satisfait une équation (en général) différentielle non influencée par l'entrée.

Notions de commandabilité (suite)

- Ceci est impossible dans un espace vectoriel, puisque $pw = 0$ implique $w = 0$, p étant inversible.
- Par exemple dans

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = x_2 & \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u & \dot{x}_2 = x_2 + u \end{array}$$

le premier système est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -commandable sans torsion et le deuxième ne l'est pas, puisque x_1 est de torsion.

Notions de commandabilité (suite)

- Un R -module est **projectif** si toute matrice de présentation admet un **inverse à droite**.
- Par exemple dans

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} - 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix} = 0$$

L'on a

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} - 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Directement relié à l'existence d'**équations de Bézout**.

Notions de commandabilité (suite)

- Un R -module est **libre** s'il admet une **base**, c.à.d. un ensemble R **linéairement indépendant et générateur**.
- Par exemple dans

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = x_2 & \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u & \dot{x}_2 = x_2 + u \end{array}$$

Le premier système est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -commandable libre et admet x_1 pour base ; en effet, $x_2 = \frac{d}{dt} x_1$, $u = -\frac{d}{dt} x_1 + \frac{d^2}{dt^2} x_1$.
 Le deuxième ne l'est pas, puisque x_1 est de torsion ; en effet

- La R -commandabilité libre (resp. projective) **implique** la R -commandabilité projective (resp. sans torsion).

Notions de commandabilité (suite)

- Par exemple, dans

$$\frac{d}{dt} y = -y + u$$

on a

$$\hat{y} = \frac{1}{1+s} \hat{u}$$

- Le $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ -module correspondant est libre, de base y :

$$u = \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) y$$

- Permet un **suivi de trajectoire des plus aisés**; se donnant $y_d(t)$, la commande en boucle ouverte $u_d(t)$ est directement donnée par

$$u_d(t) = \dot{y}_d(t) + y_d(t)$$

Critère de commandabilité libre

- Rappel de la résolution de la **conjecture de Serre**
Sur un anneau de polynômes, tout module projectif est libre
(th. de Quillen-Suslin)
- Un système linéaire est $k[\xi_1, \dots, \xi_r]$ -commandable libre si, et seulement s'il est $k[\xi_1, \dots, \xi_r]$ -commandable projectif.
- Cette conjecture permet d'obtenir le critère de commandabilité libre suivant.

Critère de commandabilité libre (suite)

- Soit Λ donné par :

- des générateurs $\Lambda = [\mathbf{w}] = [w_1, \dots, w_\alpha]$,
- des relations $P_\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_r) \mathbf{w} = 0$

où $P_\Lambda \in k[\xi_1, \dots, \xi_r]^{\beta \times \alpha}$ et $\text{rg}_{k[\xi_1, \dots, \xi_r]} P_\Lambda = \beta$.

- \bar{k} désigne la **clôture algébrique** (Le corps contenant toutes les racines d'équations polynômiales à coefficients dans k) de k .
- Le système linéaire stationnaire à retards Λ est **$k[\xi_1, \dots, \xi_r]$ -commandable libre** si, et seulement si

$$\forall (z_1, \dots, z_r) \in \bar{k}^r, \quad \text{rg}_{\bar{k}} P_\Lambda(z_1, \dots, z_r) = \beta.$$

- Ce critère de rang équivaut à l'**absence de zéros communs** dans \bar{k}^r des mineurs d'ordre β de P_Λ .

Exemple d'application

- Reprenons le modèle d'ondes de torsion dans une barre discrétisée
- La matrice de présentation associée est

$$P_M = \begin{pmatrix} I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k & k & 0 \\ k & J \frac{d^2}{dt^2} + k & 1 \end{pmatrix}$$

- l'idéal de Fitting est engendré par

$$m_1 = \begin{vmatrix} I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k & k \\ k & J \frac{d^2}{dt^2} + k \end{vmatrix}, \quad m_2 = \begin{vmatrix} I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix},$$

Exemple d'application (suite)

- ou encore

$$m_1 = \left(I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k \right) \left(J \frac{d^2}{dt^2} + k \right) - k^2$$

$$m_2 = I \frac{d^2}{dt^2} + mgL + k$$

$$m_3 = k$$

- Et, ayant $m_3 = k \neq 0$ les différents mineurs n'ont pas de zéro commun, le module associé est donc libre

Critère de commandabilité sans torsion

- Soit Λ donné par :
 - des générateurs $\Lambda = [\mathbf{w}] = [w_1, \dots, w_\alpha]$,
 - des relations $P_\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_r) \mathbf{w} = 0$où $P_\Lambda \in k[\xi_1, \dots, \xi_r]^{\beta \times \alpha}$ et $\text{rg}_{k[\xi_1, \dots, \xi_r]} P_\Lambda = \beta$.
- Le système linéaire stationnaire Λ est **$k[\xi_1, \dots, \xi_r]$ -commandable sans torsion** si, et seulement si, les mineurs $\beta \times \beta$ de P_Λ sont premiers entre eux.
- Premiers entre eux signifie que leur pgcd est une constante, ou encore l'**absence de facteurs communs**.

Exemple d'application

- Considérons le modèle à retards suivant

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - 1)$$

- La matrice de présentation associée est $[s - 1 \quad e^{-s}]$ sur $\mathbb{R}[s, e^{-s}]$ et $[s - 1 \quad z]$ sur $\mathbb{R}[s, z]$
- l'idéal de Fitting sur $\mathbb{R}[s, z]$ est donc engendré par $s - 1$ et z
- Ces deux polynômes ont un zéro commun $s = 1, z = 0$
- Par contre, ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[s, z]$
- Le système est donc sans torsion mais pas libre

Exemple d'application (suite)

- De même le modèle à retard sur l'entrée

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t - h)$$

tel que le système sans retard soit commandable (au sens usuel) est sans torsion, mais non libre.

Le meilleur des (deux) mondes

- La notion la plus agréable mathématiquement est la liberté sur R .
- Elle se rencontre malheureusement très peu en pratique.
- Le caractère sans torsion est presque toujours réalisé en pratique, mais n'est pas constructif.
- \implies Besoin d'une notion **équivalente** mathématiquement au caractère **sans torsion** et qui permette de recouvrir les avantages de la liberté, notamment **l'existence d'une base**.

π -Liberté

- Soit Λ un R -système, A une R -algèbre et \mathcal{S} une partie multiplicative de A telle que Λ est $\mathcal{S}^{-1}R$ -commandable libre.
- Alors il existe π dans \mathcal{S} tel que Λ est $R[\pi^{-1}]$ -commandable libre. Λ est dit π -libre.
- Une sortie étant une base de $R[\pi^{-1}] \otimes_R \Lambda$ est dite π -basique ou π -plate.
- Notion générale permettant de recouvrir les avantages mathématiques de la liberté

π -Liberté (suite)

- Exemple de système de Broïda-Strejč

$$\frac{d}{dt} y = Ty + \delta u$$

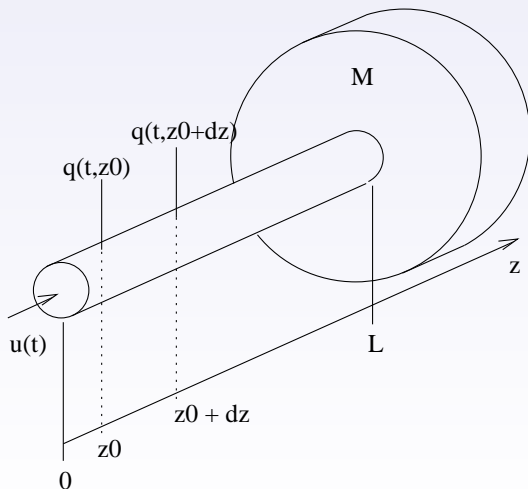
- n'est pas $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$ -libre (où δ est l'opérateur retard), mais est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ -libre
- En effet

$$u = \delta^{-1} \left(\frac{d}{dt} - T \right) y$$

et y est une base du $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ -module associé

Vibrations de torsion d'un poutre flexible ; système de forage

Schéma de la poutre



Équations de la poutre

- Comportement en torsion d'une barre flexible, avec un couple appliqué à un bout et une masse à l'autre bout.
- Équation des ondes unidimensionnelle

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}(\tau, z) = \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}(\tau, z)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z}(\tau, 0) = -u(\tau), \quad \frac{\partial q}{\partial z}(\tau, L) = -J \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}(\tau, L)$$

$$q(0, z) = q_0(z), \quad \frac{\partial q}{\partial \tau}(0, z) = q_1(z)$$

Équations de la poutre (suite)

- $q(\tau, z)$ déplacement angulaire de la position non excitée à un point $z \in [0, L]$ à l'instant $\tau \geq 0$
- L la longueur de la barre
- σ l'inverse de la vitesse de propagation des ondes
- J le moment d'inertie de la masse
- $u(\tau)$ le couple de commande
- q_0, q_1 déplacement et vitesse angulaire initiaux.

Modèle à retards

- Solution générale

$$q(\tau, z) = \phi(\tau + \sigma z) + \psi(\tau - \sigma z)$$

- Sortie choisie

$$y(\tau) = q(\tau, L)$$

- Posant $t = (\sigma/J)\tau$, $v(t) = (2J/\sigma^2)u(t)$ and $T = \sigma L$, on obtient

$$\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t - 2T) + \dot{y}(t) - \dot{y}(t - 2T) = v(t - T)$$

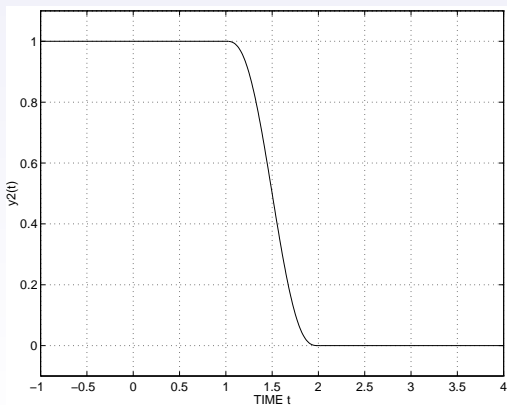
Modèle à retards (suite)

- Le système est δ -libre, de base y

$$v = (\delta^{-1} + \delta)\ddot{y} + (\delta^{-1} - \delta)\dot{y}$$

Suivi en boucle ouverte

$$v_d(t) = \ddot{y}_d(t+T) + \ddot{y}_d(t-T) + \dot{y}_d(t+T) - \dot{y}_d(t-T)$$



Suivi : commande en boucle ouverte

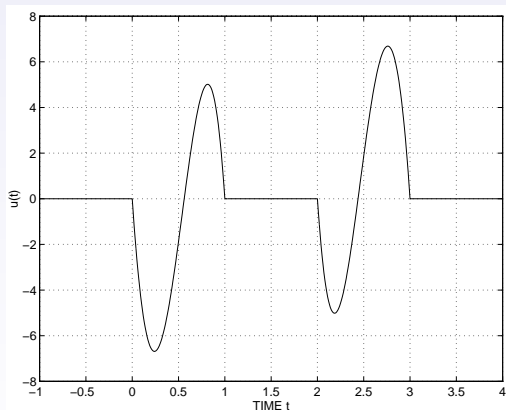
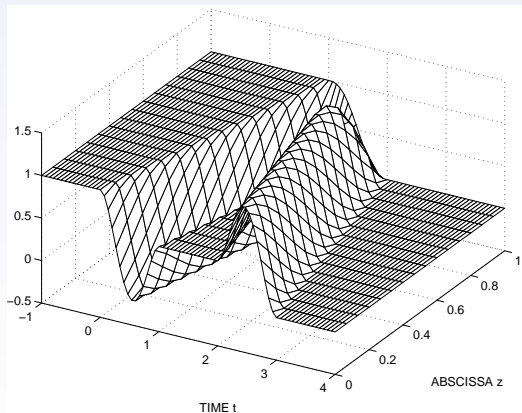


FIGURE 11 : La commande u .

Suivi : Déplacements des autres points de la barre

$$q_d(z, t) = \frac{1}{2} \left[y_d(t-z+T) + \dot{y}_d(t-z+T) + y_d(t-T+z) - \dot{y}_d(t-T+z) \right]$$



Système de forage

Appareil de forage :

- En **surface** : le **rig** (treuil, crochet, poulies, pompe à boue, etc.)
- Le **long du puits** :
 - Un **train de tiges**, de 0 à 6000m, \varnothing ext. 10cm, épaisseur 0.5cm
 - Un **train de masse-tiges**, de 300 à 600m, \varnothing ext. 20cm, épaisseur 2cm, masse de **40 à 60 tonnes**
- En **fond de puits**, un **outil** :
 - soit avec plusieurs cônes, munis de dents ; travaille en poinçonnement de la roche,
 - soit muni de pastilles de diamant polycristallin ; travaille en arrachement



Commandes

- Les tiges sont vissées les unes aux autres à force.
- Le train de tiges/masse-tiges est **retenu en surface** grâce à un système crochet + poulies + treuil. L'actionnement du **frein sur le treuil est la 1^{ière} commande**.
- L'ensemble tiges, masse-tiges, outil est **entraîné en rotation** en surface (tige carrée dans un logement). Le **couple du moteur de rotation est la 2^{ième} commande**.
- Chaque tige est creuse et l'outil est muni de duses de façon à faire **circuler un fluide** pour remonter les débris de roche forée.

Commandes (suite)

- Le fluide (eau + additifs chimiques) de forage arrive en sortie des duses d'outil à 50m/s. Le **débit de fluide** injecté en surface est la 3^{ième} commande.

Précautions

- Le **poids sur outil** (frein du treuil en surface) ne doit pas être trop important (effort de forage de roche trop élevé); risque de génération de **vibrations** avec résonances.
- La **vitesse de rotation** ne doit pas être trop importante (risque de **vibrations**) ni trop faible (risque de **bloquage de l'outil**).
- Le **débit de fluide** ne doit pas être trop important (risque de **fissures** dans les parois du puits et perte de fluide, ou risque d'**effondrement des parois** du puits) ni trop faible (risque de **bloquage de l'outil**).

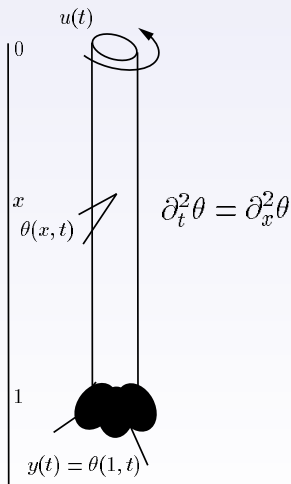
Dysfonctionnements vibratoires

- Cycles d'**adhérence-glissement** (stick-slip), lié aux **vibrations de torsion** du train de tiges. Fatigue et usure du train de tiges, Risque de **dévissage des tiges** ...
- **Rebond** de l'outil, lié aux **vibrations de traction/compression** du train de masse-tiges. Risque d'**endommagement de l'outil**.
- **Précession** du train de masse-tiges et de l'outil, lié aux **vibrations de flexion** du train de masse-tiges. Fatigue et usure du train de masse-tiges.

Systèmes de forage : moyens d'action

- On peut chercher à
 - 1) détecter par anticipation les problèmes, ou bien
 - 2) éviter de les provoquer.
- Le 1) est à court terme
- Le 2) est à moyen/long terme.

Vue schématique des vibrations de torsion



Dynamique de torsion

- Dynamique de torsion d'un système de forage

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x^2} \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = -u(t)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(1, t) = F \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}(1, t) \right)$$

- avec

$\theta(x, t)$ Profil de torsion à t et en $x \in [0, 1]$

u couple de commande en surface

$F(v)$ loi de friction en fond de puits.

Forage par trajectographie régulière

- On prend comme **trajectoires désirées** les **variables de fond** (déplacement angulaire).
- Si ces trajectoires sont suffisamment régulières, on en déduit des **lois de commande douces en surface**.
- Principal avantage : on **évite d'exciter les modes de vibration** des trains de tiges et de masse-tiges.

Trajectographie régulière et platitude

- Sortie plate du système : l'angle en fond de puits $y(t) = \theta(1, t)$. Le système est δ -plat (Mounier et Rudolph).

- Paramétrisation explicite des trajectoires

$$2\theta(x, t) = y(t + x - 1) + y(t - x + 1) - \int_{t-1+x}^{t+1-x} F(\dot{y}(\tau)) d\tau$$

- Donc, pour stabiliser le système et réduire l'adhérence-glisement on stabilise $y(t)$.

Stabilisation de l'adhérence-glisement

- À chaque vitesse ω_r il correspond une rotation uniforme à vitesse constante

$$\theta(x, t) = a + \omega_r t + F(\omega_r)x, \quad u = -F(\omega_r)$$

solution des équations de dynamique de torsion.

- Lorsque $dF/dv(\omega_r) > 0$, ce mouvement stationnaire est **instable**.

Stabilisation de l'adhérence-glisement (suite)

- Loi stabilisante, n'utilisant que les mesures de vitesse en surface (cf. P. Rouchon)

$$u(t) = -\omega(t) + v(t) - F(v(t))$$

avec

$$v(t) = \omega_r(t) - \lambda I(t) - \frac{\lambda}{2} \left(\int_{t-2}^t v(\tau) d\tau \right)$$

$$\dot{I}(t) = \omega(t) - \omega_r(t)$$

Stabilisation de l'adhérence-glisement (suite)

- On doit avoir $\lambda > 0$, qui assure pour la sortie plate $y(t) = \theta(1, t)$, la dynamique suivante

$$\frac{d}{dt}(y(t+1) - y_r(t+1)) = -\lambda(y(t+1) - y_r(t+1))$$

- Où la référence $t \mapsto y_r(t)$ est telle que $\dot{y}_r(t+1) = \omega_r(t)$.
- Notons que le bouclage fait intervenir des retards distribués (cf. par ex. Bréthé-Loiseau).

Puits profonds et déviés

- Forage dirigé, pour exploiter des nappes horizontales.
- Forage offshore profond.

Liberté distribuée

- Équation de la **chaleur**
- Diverses notions de liberté
- **Systemes d'ordre deux** en espace
- Équation d'**Euler-Bernoulli**

Équation de la chaleur avec commande en température

- Équation de la chaleur sans échange de chaleur à une extrémité et à température imposée à l'autre :

$$\partial_x^2 w(x, t) = \partial_t w(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, +\infty[\quad (9a)$$

$$\partial_x w(0, t) = 0 \quad (9b)$$

$$w(1, t) = u(t) \quad (9c)$$

- Décrit un processus de diffusion dans une barre homogène,
- $w(x, t)$: température de la barre en x et à t .
- Première conditions aux limites : pas de flux de chaleur en $x = 0$
- Deuxième : température fixée par $u(t)$ en $x = 1$.

Des relations entrée/sortie

- Transformée de Laplace d'ultradistributions ou équation opérationnelle de Mikusiński

$$s\widehat{w}(x) = \partial_x^2 \widehat{w}(x, s)$$

- et à s fixé, on obtient l'EDO

$$\frac{d^2 \widehat{w}}{dx^2}(x; s) - s\widehat{w}(x; s) = 0 \quad (10)$$

- Équation caractéristique associée

$$\zeta^2 - s = 0$$

Des relations entrée/sortie (suite)

- Solution générale

$$\widehat{w}(x, s) = C_x \lambda_1(s) + S_x \lambda_2(s)$$

avec

$$C_x = \cosh(x\sqrt{s}), \quad S_x = \frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$$

- Ayant

$$\partial_x C_x = C'_x = s S_x$$

$$\partial_x S_x = S'_x = C_x$$

Des relations entrée/sortie (suite)

- On obtient par transformée de Laplace d'ultradistributions ou équation opérationnelle de Mikusiński

$$\begin{aligned}\widehat{w}(x) &= C_x \lambda_1 + S_x \lambda_2 & C_x &= \cosh(x\sqrt{s}) \\ \partial_x \widehat{w}(x) &= s S_x \lambda_1 + C_x \lambda_2 & S_x &= \frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\end{aligned}$$

- Conditions aux limites

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 0 & (\partial_x \widehat{w}(0) &= 0) \\ C_1 \lambda_1 &= \widehat{u}\end{aligned}$$

- Équation entrée/sortie

$$C_1 \widehat{w}(x) = C_x \widehat{u}$$

Inversion d'opérateurs et π -liberté

- L'équation d'entrée/sortie peut s'écrire

$$\hat{u} = \frac{\cosh(\sqrt{s})}{\cosh(x\sqrt{s})} \hat{w}(x) = \frac{C_1}{C_x} \hat{w}(x)$$

- L'élément $\hat{w}(x)$ est une C_x -base de $[\hat{w}, \hat{u}]_{\mathbb{R}[s, C_1, C_x]}$
- **Grand choix** de bases possibles en général, dès que le système est sans torsion

Liberté

- Posons

$$\omega(t) = w(0, t)$$

- Ayant

$$\hat{w}(x) = C_x \lambda_1 + S_x \lambda_2$$

- Les conditions aux limites ajoutées à la définition d' w s'écrivent :

$$\lambda_2 = 0$$

$$C_1 \lambda_1 = \hat{u}$$

$$\lambda_1 = \hat{\omega}$$

Liberté (suite)

- Posant

$$\hat{\omega} = \hat{w}(0) = \lambda_1$$

- Nous avons

$$\hat{u} = C_1 \hat{\omega} \tag{11a}$$

$$\hat{w}(x) = C_x \hat{\omega} \tag{11b}$$

- Le système peut donc être qualifié de **libre**, de **base** $\hat{\omega}$.
- Sachant que

$$\cosh(\sqrt{s}) = \sum_{i \geq 0} \frac{s^i}{(2i)!}$$

Liberté (suite)

- nous obtenons, dans le domaine temporel :

$$w(x, t) = \sum_{i \geq 0} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \omega^{(i)}(t)$$

$$u(t) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{(2i)!} \omega^{(i)}(t)$$

- Ces séries ont implicitement été écrites dans l'anneau des séries formelles $k \left[\left[\frac{d}{dt} \right] \right]$.

Liberté pour d'autres conditions aux limites

- Équation de la chaleur, avec conditions aux limites de Dirichlet, imposant une température nulle à l'extrémité libre :

$$\partial_x^2 w(x, t) = \partial_t w(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, +\infty[\quad (12a)$$

$$w(0, t) = 0 \quad (12b)$$

$$w(1, t) = u(t) \quad (12c)$$

- La solution générale et sa dérivée spatiale

$$\begin{aligned} \hat{w}(x) &= C_x \lambda_1 + S_x \lambda_2 \\ \partial_x \hat{w}(x) &= s S_x \lambda_1 + C_x \lambda_2 \end{aligned}$$

- Conditions aux limites

$$\lambda_1 = 0 \quad (\hat{w}(0) = 0) \quad \text{et} \quad S_1 \lambda_2 = \hat{u}$$

Liberté pour d'autres conditions aux limites (suite)

- Solution générale

$$\widehat{w}(x) = S_x \lambda_2$$

- Ainsi λ_2 apparaît comme une base. Ayant :

$$\partial_x \widehat{w}(x) = sS_x \lambda_1 + C_x \lambda_2 = C_x \lambda_2, \quad \text{On obtient } \lambda_2 = \partial_x \widehat{w}(0)$$

- Donc $\partial_x \widehat{w}(0)$ est une base du système.

Définitions de système et de commandabilité

- Calcul opérationnel utilisé
- Définition de **système**
- Commandabilité et **liberté**

Panorama de fonctions et d'opérateurs

On compte, du plus au moins régulier :

\mathcal{O}	Fonctions holomorphes	Cauchy
\mathcal{A}	Fonctions analytiques réelles	Martineau
$\mathcal{E}^{(\rho)}$	Fonctions ultradifférentiables Gevrey de Beurling	
$\mathcal{E}^{\{\rho\}}$	Fonctions ultradifférentiables Gevrey de Roumieu	Gevrey
\mathcal{D}	Fonctions indéfiniment différentiables à support compact	
\mathcal{S}	Fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide	
\mathcal{E}	Fonctions indéfiniment différentiables	Borel, Whitney
C^n	Fonctions n fois différentiables	Cauchy
C	Fonctions continues	Cauchy

Panorama de fonctions et d'opérateurs (suite)

L^p	Fonctions p fois sommables	Riesz
L^1	Fonctions sommables	Riesz
M^1	Mesures complexes	Riesz, Kakutani
\mathcal{E}'	Distributions à support compact	Schwartz
\mathcal{S}'	Distributions tempérées	Schwartz
\mathcal{D}'	Distributions	Schwartz
$\mathcal{E}'\{\rho\}$	Ultradistributions de Roumieu	Roumieu
$\mathcal{E}'(\rho)$	Ultradistributions de Beurling	Beurling
\mathcal{B}	Hyperfonctions	Sato
\mathcal{O}'	Fonctionnelles analytiques	Frantappié, Martineau

Ultradistributions

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et M_p ($p = 0, 1, \dots$) suite positive t.q. :

(M.0) (Normalisation) $M_0 = M_1 = 1$

(M.1) (Convexité logarithmique)

$$M_p^2 \leq M_{p-1} M_{p+1}, \quad p = 1, 2, \dots$$

(M.2) (Stabilité par opérateurs différentiels)

$$\exists G, H, \text{ tels que } M_{p+1} \leq GH^p M_p, \quad p = 0, 1, \dots$$

(M.3) (Non quasi-analyticité) $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty$

Ultradistributions (suite)

Définition

Soit M_p une suite de nombres positifs et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une fonction $f \in \mathcal{E} = C^\infty(\Omega)$ est dite *ultradifférentiable de classe (M_p)* (resp. $\{M_p\}$) si pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour tout $h > 0$, il existe une constante C (resp. pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes h et C) telle que

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)| \leq Ch^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \quad \text{pour tout } \alpha$$

On désigne par $\mathcal{E}^*(\Omega)$ l'ensemble des fonctions ultradifférentiables de classe $*$ sur Ω (où $*$ = (M_p) ou $\{M_p\}$) et par $\mathcal{D}^*(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{E}^*(\Omega)$ à support compact dans Ω .

Ultradistributions (suite)

- On peut remplacer (M.3) par la condition de quasi-analyticité (M.3')
 - Il existe des constantes strictement positives L et C telles que, pour tous p

$$p! \leq CL^p M_p$$

- La série écrite en (M.3) diverge $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} = \infty$

- De plus, si une suite M_p satisfaisant (M.3') est telle que

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{p!}{M_p}} > 0$$

alors $\mathcal{E}\{M_p\}$ est la classe des fonctions analytiques.

Ultradistributions (suite)

- Autre exemple : $M_p = (p!)^d$, auquel cas $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ est la classe des fonctions Gevrey d'ordre $d + 1$

Définition

Soit M_p une suite de nombres positifs satisfaisant (M.1) et (M.3). Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ le *dual* $\mathcal{D}'^*(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}'^*(\Omega)$) de $\mathcal{D}^*(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}^*(\Omega)$) est l'ensemble des *ultradistributions de classe ** (resp. des *ultradistributions à support compact de classe ** définies sur Ω).

On utilisera dans la suite la transformation de Laplace des ultradistributions comme calcul opérationnel.

Classe de systèmes

- Par souci de simplicité, on se restreindra à
- $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ (concentrées) t.q. :

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{w}_i &= A_i \mathbf{w}_i + B_i \mathbf{u}, \quad \mathbf{w}_i : \Omega_i \rightarrow (\mathcal{E}'^*)^2, \quad \mathbf{u} \in (\mathcal{E}'^*)^m \\ A_i &\in (\mathbb{R}[s])^{2 \times 2}, \quad B_i \in (\mathbb{R}[s])^{2 \times m}, \quad i \in \{1, \dots, l\} \end{aligned} \quad (13a)$$

où \mathcal{E}'^* est un espace d'ultradistributions à support compact.

- Les matrices A_1, \dots, A_l ont même polynôme caractéristique :

$$\det(\lambda 1 - A_i) = \lambda^2 - \sigma, \quad \sigma = as^2 + bs + c \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0.$$

Classe de systèmes (suite)

- Les intervalles Ω_i ($i = 1, \dots, l$) sont des ouverts de

$$\tilde{\Omega}_i = [x_{i,0}, x_{i,1}], \quad \ell_i = x_{i,1} - x_{i,0} = q_i \ell, \quad q_i \in \mathbb{Q}, \quad \ell \in \mathbb{R}. \quad (13b)$$

- Conditions aux frontières

$$\sum_{i=1}^l L_i \mathbf{w}_i(0) + R_i \mathbf{w}_i(\ell_i) + D \mathbf{u} = 0 \quad (13c)$$

où $D \in (\mathbb{R}[s])^{q \times m}$ et $L_i, R_i \in (\mathbb{R}[s])^{q \times 2}$.

- Remarque : On peut étendre l'étude à tout système d'EDPs où les matrices A_i sont $\xi \times \xi$, $\xi > 0$,

Classe de systèmes (suite)

- pourvu que les polynômes caractéristiques associés $\lambda^\xi - \sigma(s)$, avec $\sigma(s)$ polynôme d'ordre ξ en s donnent lieu à des solutions σ_i
- telles que les $e^{x\sigma_i}$ correspondent à des fonctions C^∞ de Ω dans un anneau \mathcal{E}'^* d'ultradistributions à support compact.

Solution du problème de Cauchy

- Problème de Cauchy avec conds initiales en $x = \xi$

$$\partial_x \mathbf{w} = A\mathbf{w} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{w}(\xi) = \mathbf{w}_\xi \quad (14)$$

- Problème aux valeurs initiales conjoint :

$$(\partial_x^2 - \sigma)v(x) = 0, \quad v(0) = v_0, \quad (\partial_x v)(0) = v_1, \quad (15)$$

associé à l'équation caractéristique $\det(\lambda 1 - A) = \lambda^2 - \sigma$
 avec $\sigma = as^2 + bs + c \neq 0$

- Soit S une solution non triviale de (15) et $C = \partial_x S$
- On suppose que S et C correspondent à des fonctions C^∞ de Ω dans l'anneau \mathcal{E}'^* des ultradistributions à support compact

Solution du problème de Cauchy (suite)

- La solution unique $x \mapsto \Phi(x, \xi)$ du problème aux valeurs initiales

$$\partial_x \Phi(x, \xi) = A\Phi(x, \xi), \quad \Phi(\xi, \xi) = 1,$$

avec 1 désignant l'identité de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, est

$$\Phi(x, \xi) = AS(x - \xi) + 1C(x - \xi). \quad (16)$$

avec A la matrice compagnon du polynôme caractéristique, *i.e.*,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x, \xi) = \begin{pmatrix} C(x - \xi) & S(x - \xi) \\ \sigma S(x - \xi) & C(x - \xi) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

Solution du problème de Cauchy (suite)

- La solution du problème associé à l'équation inhomogène

$$\partial_x \Psi(x, \xi) = A\Psi(x, \xi) + B \quad (18)$$

s'obtient par variation des constantes

- Ceci donne

$$\Psi(x, \xi) = \int_{\xi}^x \Phi(x, \zeta) d\zeta B. \quad (19)$$

- La solution générale du problème (14) est alors

$$\mathbf{w}(x) = \Phi(x, \xi) \mathbf{w}_{\xi} + \Psi(x, \xi) \mathbf{u}.$$

Solution du problème de Cauchy (suite)

- ou, de manière équivalente

$$\mathbf{w}(x) = W(x, \xi)\mathbf{c}, \quad W(x, \xi) = \begin{pmatrix} \Phi(x, \xi) & \Psi(x, \psi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_\xi \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

- Les composantes de la matrice Φ appartiennent à $\mathbb{C}[s, C, S]$
- Au contraire, et d'après (19), les composantes de Ψ peuvent contenir des intégrales de S et C .

$$\int_0^x C(\zeta) dx = S(x), \quad \int_0^x S(\zeta) dx = (C(x) - 1)/\sigma.$$

Système comme module

- Injectant les solutions du problème aux valeurs initiales dans les conditions aux bords, on obtient

$$\mathbf{w}(x) = W_\xi(x)\mathbf{c}_\xi, \quad P_\xi\mathbf{c}_\xi = 0. \quad (20)$$

- Ici, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ arbitraire et fixé,
 $\mathbf{c}_\xi^T = (\mathbf{w}_1^T(\xi_1) \cdots \mathbf{w}_l^T(\xi_l), \mathbf{u}^T)$,

$$W_\xi = \begin{pmatrix} \Phi_1(x, \xi_1) & 0 & 0 & \Psi_1(x, \xi_1) \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \Phi_l(x, \xi_l) & \Psi_l(x, \xi_l) \end{pmatrix}, \quad P_\xi = (P_{\xi,1} \cdots P_{\xi,l+1})$$

Système comme module (suite)

avec

$$P_{\xi,i} = L_i \Phi_i(0, \xi_i) + R_i \Phi_i(\ell_i, \xi_i), \quad i = 1, \dots, l$$

$$P_{\xi,l+1} = D + \sum_{i=1}^l L_i \Psi_i(0, \xi_i) + R_i \Psi_i(\ell_i, \xi_i).$$

- On représente le système par un module engendré par \mathbf{c}_ξ avec la présentation donnée en (24)
- L'anneau des coefficients doit contenir $W_\xi(x)$ et P_ξ , dont les entrées sont des valeurs de C , S et de leurs intégrales en espace
- Un Anneau possible est alors $\mathcal{R}'_{\mathbb{R}}[s, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}']$ isomorphe à un sous anneau de \mathcal{E}'^* par transformation de Laplace inverse

Système comme module (suite)

- Pour tout $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$, on note $\mathcal{R}'_{\mathbb{X}} = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}, \mathfrak{S}'_{\mathbb{X}}]$, avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \{C, S\}, & \mathfrak{S}_{\mathbb{X}} &= \{C(z\ell), S(z\ell) \mid z \in \mathbb{X}\}, \\ \mathfrak{S}' &= \{C', S'\}, & \mathfrak{S}'_{\mathbb{X}} &= \{C'(z\ell), S'(z\ell) \mid z \in \mathbb{X}\}, \end{aligned}$$

ℓ défini comme en (13b), et

$$S'(x) = \int_0^x S(\zeta) d\zeta, \quad C'(x) = \int_0^x C(\zeta) d\zeta.$$

- Pour simplifier l'analyse des propriétés des modules, on utilisera, au lieu de $\mathcal{R}'_{\mathbb{R}}$, un anneau un peu plus grand, donné par $\mathcal{R}_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}(s)[\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}] \cap \mathcal{O}$ (où \mathcal{O} désigne l'anneau des fonctions entières en s).

Système comme module (suite)

Définition

Le système de convolution $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{R}}$ associé au problème frontière (13) est le module engendré par \mathbf{c}_{ξ} sur $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ avec P_{ξ} pour matrice de présentation. Par $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ on désigne le même système, mais vu comme module sur $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$.

Exemple

► Modèle

$$\partial_x^2 w(x, t) = \partial_t w(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, +\infty[\quad (21a)$$

$$\partial_x w(0, t) = 0 \quad (21b)$$

$$\partial_x w(L, t) = u(t) \quad (21c)$$

- Ce modèle peut se réécrire

$$\partial_x \begin{pmatrix} w(x, t) \\ \partial_x w(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(x, t) \\ \partial_x w(x, t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(0, t) \\ \partial_x w(0, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(L, t) \\ \partial_x w(L, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

Exemple (suite)

- ou, dans le domaine symbolique

$$\partial_x \hat{\mathbf{w}}(x) = A \hat{\mathbf{w}}(x) \quad (23a)$$

$$L \hat{\mathbf{w}}(0) + R \hat{\mathbf{w}}(L) = D \hat{u} \quad (23b)$$

- avec

$$\hat{\mathbf{w}}(x) = \begin{pmatrix} \hat{w}(x) \\ \partial_x \hat{w}(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Solutions fondamentales** Les solutions du problème sans frontière (23a) sont

$$\hat{\mathbf{w}}(x) = \begin{pmatrix} C_{x-\xi} & S_{x-\xi} \\ sS_{x-\xi} & C_{x-\xi} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{c}}$$

Exemple (suite)

- Donc, nous avons

$$\hat{w}(x) = C_{x-\xi} \hat{c}_1 + S_{x-\xi} \hat{c}_2$$

- qui exprime le fait que (C_x, S_x) soit une base de l'espace vectoriel des solutions de (23a) considérée comme une EDO par rapport à la variable x .

► Conditions aux bords

$$Le^{-A\xi} \hat{c} + Re^{A(L-\xi)} \hat{c} - D\hat{u} = 0$$

- ou bien, en forme matricielle explicite

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{-\xi} & S_{-\xi} \\ sS_{-\xi} & C_{-\xi} \end{pmatrix} \hat{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{L-\xi} & S_{L-\xi} \\ sS_{L-\xi} & C_{L-\xi} \end{pmatrix} \hat{c} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{u} = 0$$

Exemple (suite)

- qui est équivalente à

$$\begin{pmatrix} -sS_\xi & C_\xi \\ sS_{L-\xi} & C_{L-\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{u} = 0$$

- En résumé, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} -sS_\xi & C_\xi & 0 \\ sS_{L-\xi} & C_{L-\xi} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0, \quad \hat{w}(x) = \begin{pmatrix} C_{x-\xi} & S_{x-\xi} & 0 \\ sS_{x-\xi} & C_{x-\xi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{u} \end{pmatrix}$$

- que nous désignerons par

$$P_\xi \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0, \quad \hat{w}(x) = \widehat{W}_\xi(x) \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}$$

Exemple (suite)

- avec les notations

$$P_\xi = \begin{pmatrix} -sS_\xi & C_\xi & 0 \\ sS_{L-\xi} & C_{L-\xi} & -1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}_\xi = \begin{pmatrix} C_{x-\xi} & S_{x-\xi} \\ sS_{x-\xi} & C_{x-\xi} \end{pmatrix}$$

Commandabilités des systèmes d'EDPs

Proposition

L'anneau $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{C}(s)[\mathfrak{S}_{\mathbb{Q}}] \cap \mathcal{O}$ est un domaine de Bézout, c.à.d., tout idéal finiment engendré est principal.

- Ce type d'anneau peut se construire comme

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbb{X}} := \mathbb{C}(s)[\tilde{\mathcal{C}}_a, \tilde{\mathcal{S}}_a; a \in \mathbb{X}] / \mathfrak{a}$$
- avec l'idéal \mathfrak{a} engendré par $(\sigma \in \mathbb{C}(s), \quad a, b \in \mathbb{X})$

$$\tilde{\mathcal{C}}_a \tilde{\mathcal{C}}_b \pm \sigma \tilde{\mathcal{S}}_a \tilde{\mathcal{S}}_b - \tilde{\mathcal{C}}_{a \pm b}, \tilde{\mathcal{S}}_a \tilde{\mathcal{C}}_b \pm \tilde{\mathcal{C}}_a \tilde{\mathcal{S}}_b - \tilde{\mathcal{S}}_{a \pm b}, \tilde{\mathcal{C}}_0 - 1, \tilde{\mathcal{S}}_0$$

Commandabilités des systèmes d'EDPs (suite)

Théorème

Le système de convolution Σ défini par le $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ -module
 ($\mathcal{R}_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}(s)[\mathcal{G}_{\mathbb{R}}] \cap \mathcal{O}$) engendré par \mathbf{c}_{ξ} et admettant pour
 présentation

$$P_{\xi} \mathbf{c}_{\xi} = 0 \quad (\text{avec } \mathbf{w}(x) = W_{\xi}(x) \mathbf{c}_{\xi}) \quad (24)$$

est *libre*, si et seulement s'il est *sans torsion*. Plus généralement
 $\Sigma = \mathfrak{t}\Sigma \oplus \Sigma/\mathfrak{t}\Sigma$ où $\mathfrak{t}\Sigma$ est de torsion et $\Sigma/\mathfrak{t}\Sigma$ est libre.

Transition arrêt-arrêt

- Rappelons que pour le système

$$\partial_x^2 w(x, t) = \partial_t w(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, +\infty[$$

$$\partial_x w(0, t) = 0$$

$$w(1, t) = u(t)$$

- nous avons obtenu, dans le domaine temporel :

$$w(x, t) = \sum_{i \geq 0} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \omega^{(i)}(t)$$

$$u(t) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{(2i)!} \omega^{(i)}(t)$$

Transition arrêt-arrêt (suite)

- avec $\omega(t) = w(0, t)$
- Ces séries ont implicitement été écrites dans l'anneau des séries formelles $k\left[\left[\frac{d}{dt}\right]\right]$.
- Pour pouvoir donner un sens aux opérateurs d'ordre infini précédents
 - $w(0, t)$ doit être C^∞
 - et les séries doivent converger au sens usuel (*i.e.* d'une norme ℓ^2 ou ℓ^p) ou doivent pouvoir être sommées en un certain sens.
- La classe des fonctions analytiques est trop restreinte
- Même pour des transitions d'un état stationnaire à un autre

Transition arrêt-arrêt (suite)

- En effet, pour deux tels états, nous devons imposer

$$\begin{aligned}
 w(x, t_0) &= w_0, & w(x, t_1) &= w_1, & w_0, w_1 &\in \mathbb{R} \\
 w^{(i)}(x, t_0) &= 0, & w^{(i)}(x, t_1) &= 0, & i &\geq 1
 \end{aligned}$$

- Ayant

$$w(x, t) = \sum_{i \geq 0} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \omega^{(i)}(t)$$

- Nous devons donc avoir

$$\begin{aligned}
 \omega(t_0) &= w_0, & \omega(t_1) &= w_1 \\
 \omega^{(i)}(t_0) &= \omega^{(i)}(t_1) = 0, & i &\geq 1
 \end{aligned}$$

Transition arrêt-arrêt (suite)

- Or, une fonction analytique dont toutes les dérivées d'ordre strictement positif sont nulles est constante
- impossible dès lors que $w_0 \neq w_1$

Fonctions Gevrey

- On doit avoir recours à des fonctions C^∞ plus générales
- Par ailleurs une limitation sur la croissance des dérivées est nécessaire pour garantir la sommabilité des séries
- On considère la classe des fonctions Gevrey, satisfaisant aux estimées suivantes

Définition

Une fonction C^∞ f de $[0, T]$ dans \mathbb{R} est dite Gevrey d'indice d si

$$\sup_{t \in [0, T]} |f^{(i)}(t)| \leq CK^i \Gamma(1 + (d + 1)i), \quad \forall i \geq 0$$

où C et $K > 0$ sont des constantes

Sommabilité

- Considérons une série formelle en x

$$w(x, \tau) = \sum_{i \geq 0} \alpha_i(\tau) x^i$$

- où les $a_i(\tau)$ sont holomorphes dans un disque

$$D_\rho = \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| < \rho\}$$

- Cette série est élément de $C^\omega(\mathbb{C})[[x]]$.

Sommabilité (suite)

Définition

On dira que la série $w(x, \tau)$ est *k-sommable dans la direction d* ($k > 0, d \in \mathbb{R}$) s'il est possible de trouver un rayon de convergence $r \in]0, \rho[$ tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

- La transformée de Borel en x d'ordre k , c.à.d. la série

$$\tilde{w}(z, \tau) = \mathcal{B}_k(w(x, \tau)) = \sum_{i \geq 0} a_i(\tau) \frac{z^i}{\Gamma(1 + i/k)} \quad (25)$$

converge absolument pour $|\tau| \leq r$ et $|z| < R$, avec R dépendant de r mais indépendant de τ .

Sommabilité (suite)

- Il existe δ tel que, pour tout $\tau \in \bar{D}_r$, la fonction $\tilde{w}(z, \tau)$ peut être prolongée analytiquement en x dans le secteur $S_{d, \delta} = \{x : |d - \arg z| < \delta\}$, prolongement que l'on note $\mathcal{C}_{S_{d, \delta}}(\tilde{w})(z, \tau)$. Ce prolongement est de plus borné par une exponentielle d'ordre k dans un tout sous secteur : pour tout $\delta_1 < \delta$, il existe des constantes $C, K > 0$ telles que

$$\forall x \in S_{d, \delta_1}, \quad \sup_{|\tau| \leq r} |\mathcal{C}_{S_{d, \delta}}(\tilde{w})(z, \tau)| \leq C \exp(K|z|^k)$$

Sommabilité (suite)

Définition

Dans ce cas, la transformée de Laplace \mathcal{L}_k d'ordre k de $\mathcal{C}_{S_{d,\delta}}(\tilde{w})(z, \tau)$, c.à.d. la fonction

$$\mathcal{S}_{k,d}(w(x, \tau)) = \mathcal{L}_k(\mathcal{C}_{S_{d,\delta}}(\mathcal{B}_k(w(x, \tau))) = x^{-k} \int_0^{\infty(\gamma)} w(\xi, \tau) e^{-(\xi/x)^k} d\xi$$

intégrant le long du rayon $\arg \xi = \gamma$ avec $|d - \gamma| < \delta$ est nommée k -somme de la série formelle $w(x, \tau)$, et notée

$$w(x, \tau) = \mathcal{S}_{k,d} w(x, \tau)$$

Sommabilité (suite)

- Le procédé de k -sommation est donc réalisé en trois étapes :

$$\mathcal{S}_{k,d} = \mathcal{L}_k \circ \mathcal{C}_{S_d,\delta} \circ \mathcal{B}_k$$

- Remarquons que la transformée de Laplace d'ordre 1 de z^n est

$$\mathcal{L}_1(z^n) = x^{-1} \int_0^{\infty(\gamma)} \xi^n e^{-\xi/x} d\xi = n! x^n$$

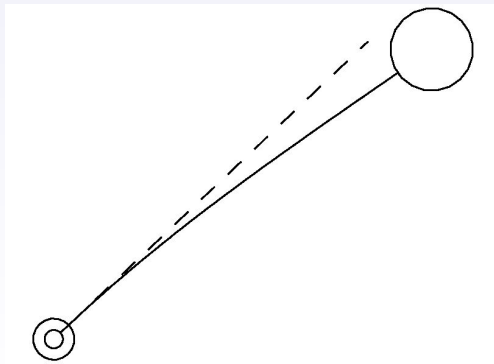
- qui apparaît donc comme un opérateur accélérant la divergence d'une série formelle.
- À l'inverse, la transformée de Borel accélère la convergence de cette même série formelle.

Sommabilité (suite)

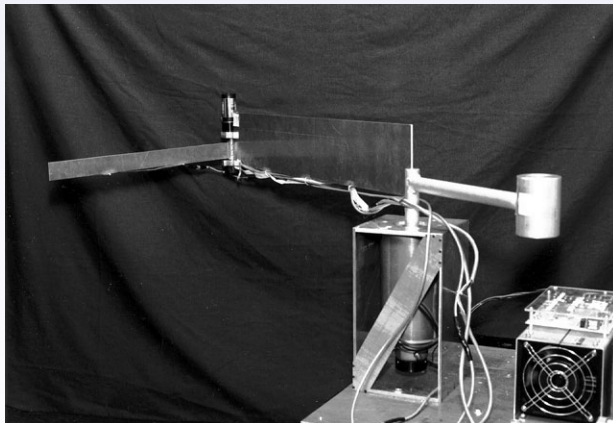
- Le procédé de sommation de Borel consiste donc à accélérer la convergence, ce qui permet d'obtenir une fonction analytique, dont on peut construire un prolongement analytique.
- La transformée de Borel inverse, c.à.d. la transformée de Laplace, permet de revenir dans le domaine initial.
- Ce procédé permet de sommer des séries de la forme $\sum_0^\infty i!x^i$.
- La transformée de Borel correspondante est $1/(1-z)$ qui possède les propriétés requises dans toutes les directions d , sauf l'axe réel positif.
- Cette série est donc 1-sommable dans toute direction $d \neq 0$ modulo 2π .

Barre d'Euler-Bernoulli

- Barre flexible de longueur L , fixée en $r = 0$ à l'arbre d'un moteur entraînant la barre en rotation



Barre d'Euler-Bernoulli



Barre d'Euler-Bernoulli

- Soient θ l'angle de rotation et M une masse attachée à l'extrémité $r = L$.

$$EI\partial_r^4 V(r, \tau) = -\rho S\partial_\tau^2 [V(r, \tau) + r\theta(\tau)], \quad J_m \frac{d^2\theta}{d\tau^2}(\tau) = \Gamma + EI\partial_r^2 V(0, \tau)$$

$$V(0, \tau) = 0, \quad r \in [0, L], \tau \in \mathbb{R}^+$$

$$\partial_r V(0, \tau) = 0$$

$$EI\partial_r^2 V(L, \tau) = -J\partial_\tau^2 [\partial_r V(L, \tau) + \theta(\tau)],$$

$$EI\partial_r^3 V(L, \tau) = M\partial_\tau^2 [V(L, \tau) + L\theta(\tau)]$$

où $V(r, \tau)$ est le **champ de déformations** de la barre par rapport à l'axe tournant d'angle θ ,

Barre d'Euler-Bernoulli (suite)

où Γ désigne le **couple de commande**, et où EI , ρ , J , J_m et S sont les constantes physiques usuelles.

- Couple de référence Γ_r :

$$\Gamma_r(t) = \frac{J_m}{L\alpha^2} \partial_x^2 \partial_t w_r(0, t) - \frac{EI}{L^2} \partial_x^2 w_r(0, t)$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho S}{EI}} L^2, \quad x = \frac{r}{L}, \quad t = \frac{\tau}{\alpha}, \quad w = V + r\theta.$$

Barre d'Euler-Bernoulli (suite)

- Avec $w(0, t)$ donné par,

$$w(0, t) = (C_0^+ + \mu s S_0^+)(\lambda s C_0^- - S_0^-) \omega$$

où ω est une base

- Couple en boucle fermée

$$\Gamma(\tau) = \Gamma_r(\tau) - k(\theta(\tau) - \theta_r(\tau)) - \sigma \left(\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} - \frac{d\theta_r(\tau)}{d\tau} \right)$$

avec k et σ deux paramètres positifs

Barre d'Euler-Bernoulli (suite)

- L'angle θ est donné par

$$\hat{u}(s) = L\hat{\theta}(s) = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{d\gamma_{1,n}}{dx}(0) \frac{(-1)^n s^{2n}}{(4n)!} + \sum_{n \geq 0} \frac{d\gamma_{2,n}}{dx}(0) \frac{(-1)^n s^{2n+2}}{(4n+4)!} \right) \hat{\omega}(s)$$

avec

$$\gamma_{1,n} = \frac{x^{4n+1}}{2(4n+1)} + \frac{(\Im - \Re)(1+i-x)^{4n+1}}{2(4n+1)} + \mu \Im(1+i-x)^{4n}$$

$$\gamma_{2,n} = \frac{(4n+4)!}{(4n+1)!} \frac{\lambda \mu}{2} \left[(\Im - \Re)(1+i-x)^{4n+1} - x^{4n+1} \right] +$$

$$\lambda \frac{(4n+4)!}{(4n+2)!} \Re(1+i-x)^{4n+2}$$

où \Re (resp. \Im) désigne la partie réelle (resp. imaginaire).

Barre d'Euler-Bernoulli (suite)

- d'où une famille de trajectoires paramétrée par toute fonction d'indice Gevrey $d < 2$
- Prenons pour trajectoire de référence de la base

$$\omega_r(\tau) = (S * g)(t)$$

- avec S est une spline interpolante adéquate d'ordre 6 et $[0, T] \ni \tau \mapsto g(\tau)$ une approximation d'une distribution de Dirac d'indice Gevrey d .

Barre d'Euler-Bernoulli (suite)

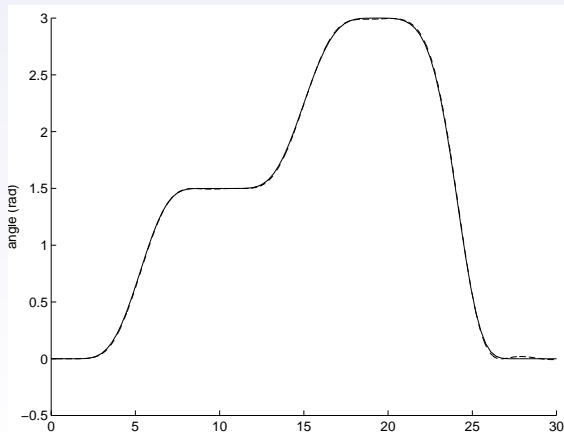
- Prenant le noyau Gevrey g d'indice Gevrey $d = 1/\nu$ suivant

$$g(t) = \frac{\gamma_{4,4}(t)}{\sup_{t \in \mathbb{R}} \gamma_{4,4}(t)}, \quad \text{avec}$$

$$\gamma_d(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ \exp\left(\frac{-1}{t^\nu(1-t)^\nu}\right), & \text{si } t \in [0, 1], \\ 0, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

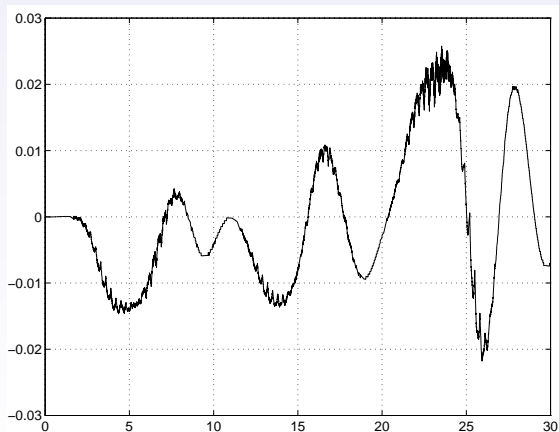
Trajectoires angulaires

Trajectoires angulaires : référence – trajectoire réelle --.



Erreurs de suivi

Erreur de suivi angulaire



Couples

Couples : en boucle ouverte – en boucle fermée --.

