



**HAL**  
open science

# **Théorie de l'élimination pour les systèmes intégré-différentiels linéaires**

Camille Pinto

► **To cite this version:**

Camille Pinto. Théorie de l'élimination pour les systèmes intégré-différentiels linéaires. Calcul formel [cs.SC]. Sorbonne Université, 2025. Français. ⟨NNT : 2025SORUS294⟩. ⟨tel-05394996⟩

**HAL Id: tel-05394996**

**<https://theses.hal.science/tel-05394996v1>**

Submitted on 3 Dec 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

**Camille PINTO**

---

## **Théorie de l'élimination pour les systèmes intégréo-différentiels linéaires**

---

dirigée par Alban QUADRAT et Thomas CLUZEAU

Soutenue le 23 octobre 2025 devant le jury composé de :

M. François BOULIER	Université de Lille	Examineur
M. Frédéric CHYZAK	Inria Saclay	Président du jury
M. Thomas CLUZEAU	Université de Limoges	Co-directeur
M. Alban QUADRAT	Inria Paris	Directeur
M. Georg REGENSBURGER	University of Kassel	Rapporteur
M. Daniel ROBERTZ	RWTH Aachen University	Rapporteur
Mme Annick VALIBOUZE	Sorbonne Université	Examineur
Mme Eva ZERZ	RWTH Aachen University	Examineur

Institut national de recherche  
en sciences et technologies du  
numérique | Inria  
Site de Paris  
48 Rue Barrault, 75013 Paris

Institut de mathématiques  
de Jussieu-Paris Rive gauche.  
UMR 7586.  
Boîte courrier 247  
4 place Jussieu  
75 252 Paris Cedex 05

Sorbonne Université.  
École doctorale de sciences  
mathématiques de Paris centre.  
Boîte courrier 290  
4 place Jussieu  
75 252 Paris Cedex 05

# Table des matières

Remerciements . . . . .	5
<b>Notations</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>11</b>
1.1 Généralités sur les équations intégrales et différentielles . . . . .	11
1.2 Quelques équations intégro-différentielles linéaires classiques . . . . .	13
1.3 Approches analytiques et numériques . . . . .	16
1.4 Approches algébriques et effectives . . . . .	16
1.4.1 Systèmes d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles . . . . .	17
1.4.1.1 Approches théoriques . . . . .	17
1.4.1.2 Approche Calcul Formel . . . . .	18
1.4.2 Les systèmes d'équations intégro-différentiels . . . . .	18
1.5 Contribution . . . . .	19
1.6 Plan du mémoire chapitre par chapitre . . . . .	22
<b>2 Les anneaux d'opérateurs différentiels et intégro-différentiels</b>	<b>23</b>
2.1 L'anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux . . . . .	23
2.2 L'anneau des opérateurs intégro-différentiels à coefficients polynomiaux . . . . .	28
2.2.1 Définition de $\mathbb{I}_1$ . . . . .	28
2.2.2 Premières propriétés de $\mathbb{I}_1$ . . . . .	31
2.2.2.1 L'opérateur évaluation . . . . .	31
2.2.2.2 L'involution de $\mathbb{I}_1$ . . . . .	34
2.2.2.3 Les opérateurs de Taylor . . . . .	34
2.3 Analyse algébrique des systèmes intégro-différentiels linéaires . . . . .	38
2.3.1 Le théorème de Malgrange . . . . .	38
2.3.2 Théorie des modules . . . . .	42
2.4 Aspects effectifs . . . . .	46
2.4.1 Une théorie de l'élimination effective . . . . .	46
2.4.2 Calcul effectif dans l'anneau $\mathbb{A}_1$ . . . . .	47
2.4.2.1 Calcul de syzygies dans $\mathbb{A}_1$ . . . . .	50
2.4.2.2 Calcul d'inverse à gauche/droite dans $\mathbb{A}_1$ . . . . .	51
2.4.2.3 Factorisation sur $\mathbb{A}_1$ . . . . .	52
2.4.3 Calcul effectif dans $\mathbb{B}_1$ . . . . .	53
<b>3 Annulateurs d'évaluation sur <math>\mathbb{I}_1</math></b>	<b>55</b>
3.1 Caractérisation de la propriété de cohérence . . . . .	55
3.2 Calcul des générateurs de l'annulateur d'un opérateur de $\mathbb{I}_1$ . . . . .	57
3.2.1 Calcul effectif d'une famille génératrice de l'annulateur d'un opérateur $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ . . . . .	57
3.2.2 Calcul effectif d'une famille génératrice de l'annulateur d'un opérateur $d \in \langle e \rangle$ . . . . .	59
3.3 Caractérisation effective de l'intersection de deux idéaux $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de type fini lorsque $\mathcal{I} \in \langle e \rangle$ et $\mathcal{J} \in \langle e \rangle$ . . . . .	68
3.3.1 Calcul du noyau à gauche d'une matrice à coefficients dans $\langle e \rangle$ . . . . .	69
3.3.1.1 Application au calcul de l'intersection de deux idéaux d'évaluation . . . . .	77

<b>4</b>	<b>Solutions polynomiales d'un système intégro-différentiel rectangulaire inhomogène</b>	<b>83</b>
4.1	Solutions polynomiales d'un système différentiel homogène général	84
4.1.1	Les modules de présentation finie de $\mathbb{A}_1$	84
4.1.2	Description explicite de l'ensemble des solutions polynomiales	88
4.1.3	Algorithme et exemple	91
4.2	Solutions polynomiales d'un système intégro-différentiel	94
4.2.1	Cas $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$	94
4.2.2	Cas $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$	95
4.2.3	Algorithme principal	96
<b>5</b>	<b>Preuve constructive de la cohérence de <math>\mathbb{I}_1</math></b>	<b>102</b>
5.1	Rappel sur la propriété de cohérence	102
5.2	Le « Horseshoe Lemma »	103
5.3	Le calcul de $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$	106
5.3.1	Solution particulière de $GR = LR \in \langle e \rangle^{r \times p}$ avec $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$	107
5.3.2	Caractérisation effective de $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ pour $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$	110
5.3.3	Algorithme et exemples du calcul de $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ pour $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$	112
<b>6</b>	<b>L'anneau <math>\mathbb{I}_1</math> est un anneau de Cramer effectif</b>	<b>121</b>
6.1	Anneau de Cramer	121
6.2	Calcul d'inverses à gauche	123
6.3	Factorisation de matrices à coefficients dans $\mathbb{I}_1$	127
6.4	Analyse algébrique sur $\mathbb{I}_1$	129
6.4.1	Définition d'une résolution libre et raccourcissement de résolution finie	130
6.4.2	Calcul de résolution libre et résolution libres finies de $\mathbb{I}_1$ -modules	131
6.4.2.1	Comparaison des méthodes des chapitres 3 et 5 pour le calcul de noyau d'une matrice $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$	131
6.4.2.2	Exemples de calcul de résolution libre de $\mathbb{I}_1$ -modules	133
6.4.3	Calcul de modules d'extension	134
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>138</b>
<b>A</b>	<b>Quelques rappels d'algèbre homologique</b>	<b>139</b>
A.1	Définitions et propriétés d'algèbre homologique	139
A.1.1	Suites exactes	139
A.1.2	Modules de type fini et de présentation finie	141
A.1.3	Classification de modules	143
A.1.4	Résolutions	144
A.1.5	Catégories	145
A.1.5.1	Extension des coefficients avec le produit tensoriel	147
A.1.5.2	Lien entre module d'extention, foncteur Hom et module projectif	147
A.1.6	Factorisation	149
A.2	Caractérisation de la cohérence	149
<b>B</b>	<b>Bavula : un package Maple pour l'étude des systèmes sur <math>\mathbb{I}_1</math></b>	<b>155</b>
B.1	Liste des procédures principales du package <b>Bavula</b>	156
B.2	Exemples d'utilisation du package <b>Bavula</b>	157
B.2.1	Solutions polynomiales d'une matrice de $\mathbb{I}_1$	158
B.2.2	Calcul du noyau d'une matrice de $\mathbb{I}_1$	160
B.2.3	Inverse à gauche, à droite et factorisation	161
<b>C</b>	<b>Publications</b>	<b>163</b>

## Remerciements

Voici quelques mots pour adresser mes remerciements à tous ceux qui ont contribué à rendre cette thèse possible, autant scientifiquement qu’humainement.

Tout d’abord, je dois remercier mes encadrants, Alban Quadrat ainsi que Thomas Cluzeau. Je vous remercie pour ces trois années d’échanges sur un sujet qui m’a plu. Merci pour votre précision et votre investissement sur le sujet, merci d’avoir initié et mené à bien ce projet de thèse.

Très chers membres du jury, François Boulier, Frédéric Chyzak, Annick Valibouze, Eva Zerz et, en particulier, Georg Regensburger et Daniel Robertz, qui ont gentiment accepté d’être rapporteurs : je vous exprime ma profonde reconnaissance pour le temps, l’expertise et la bienveillance que vous avez consacrés à mon travail et à moi-même. J’ai beaucoup apprécié votre attention et votre compréhension dans cette étape particulière de mon parcours.

Je remercie également le laboratoire IMJ-PRG, ainsi que toute l’équipe Inria OURAGAN, en particulier Fabrice Rouiller, chef d’équipe, pour le soutien, les ressources et l’environnement stimulant mis à ma disposition. Un grand merci aux personnes de l’administration et au staff divers et varié. Je pense notamment à Corentin Lacombe, merci pour votre efficacité éclair.

Un immense merci à Laurence Bourcier pour son aide irremplaçable ; vous avez résolu tous mes problèmes pratiques pendant plus de 3 ans, avec une bienveillance et un sourire rares qui étaient visibles même par e-mail. Merci à Evariste pour m’avoir aidée à intégrer numériquement le laboratoire avec une grande douceur.

Pendant ces trois années, j’ai été entourée par de nombreux collègues à qui je veux dire combien je suis reconnaissante d’avoir embelli d’une façon considérable mon quotidien de doctorante en mettant une super ambiance dans le couloir 15-16. En commençant par celles et ceux avec qui j’ai partagé le même bureau : Joaquin, dont je me suis sentie si proche, merci pour ta complicité et la profondeur de nos échanges ; Christina, avec qui j’ai partagé l’équipe OURAGAN, le bureau et une conférence en Norvège : merci pour tous ces bons souvenirs. Gabriel, merci à toi pour ton accueil chaleureux, ta grande gentillesse et tes petits gâteaux quand les temps étaient plus durs. Bilal, merci pour les piercings et pour nos doux échanges pendant quelques semaines avant ton inimitable imitation de l’homme invisible. João, merci pour avoir si souvent considéré le bureau comme le tien.

Je poursuis par tous ceux qui gravitaient aux alentours. Raphaël, d’abord collègue puis ami, je te remercie pour nos discussions sur le rapport à la thèse, et pour m’avoir présenté Jacques et Xenia, avec qui j’aurais aimé passer encore plus de temps. De notre Nouvel An d’il y a deux ans, et de tes fêtes d’anniversaire je garde tant de super souvenirs.

Mattias, merci de m’avoir permis de découvrir une nouvelle orthographe de ton prénom, pour tous les goûters que tu venais partager pour me remonter le moral, et enfin pour ton aide sur L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Merci à toi, Felipe, pour ton amour de la culture française, en particulier la variété française au service des karaokés et le côté un peu « vieux jeu catho » que nous partageons tous deux. Merci à Lucas, passionné de tous les sujets, mathématiques ou non ; ton intérêt est incomparable. Merci pour tous ces moments à la cantine, à papoter d’anecdotes, de vie de famille et de vie de prof. Merci de m’avoir remonté le moral plusieurs fois.

Merci à toi Antoine, pour tes excellents gâteaux et la convivialité que tu apportes dans le couloir : toujours le sourire, toujours présent. Merci à toi Germain pour ton empathie et toutes nos papotes sur les horaires de train et les déménagements. Florent, merci pour toutes nos discussions pédagogiques, sur l’agrégation et les classes prépa. On vit notre amour des maths de la même façon.

Merci enfin à tous ceux que j’ai croisés au labo et avec qui j’ai passé de bons moments :

- Les Italiens : Matteo et Enrico, pour nos débats « fromages français/italiens » ; Francesco, pour m’avoir fait découvrir un classique de la BD italienne ; Pietro.
- Les Latino-Américains : Thiago et Odylo.
- Celles qui sont parties avant moi et qui étaient les autres filles du labo : Anna et Perla.
- Merci aussi à Nastaran et Nelson.

Tout a été possible grâce à vous, et grâce vous en soit rendu :

- Valentin Pinto, mon frère, je te remercie de tout mon cœur pour ta présence inspirante et motivante, pour tes mots qui me font rire autant que pour ceux qui me mettent en marche. De tout temps un exemple, tu es aussi un gardien de mon temple.

- Véronique Pinto, ma maman, je te remercie de tout mon être pour toujours être là : une écoute autant qu'une entente. Notre relation m'est essentielle. De toute évidence, aucune des lignes de ce rapport n'aurait pu débiter sans toi. Ce projet ou un autre, je te dois tous mes accomplissements.
- Marc Pinto, mon papa, je te remercie pour ton affection constante et tes attentions. Je suis heureuse de pouvoir te montrer ce travail mené à terme, nous qui partageons maintenant le titre de « docteur ».

Merci également au reste de la famille et tout particulièrement à mes grands-parents Daniel et Geneviève de qui j'ai été très proche. Vous m'avez beaucoup appris. Grand-père, je garde en mémoire que c'est grâce à toi que j'ai pris confiance en moi dans les mathématiques, confiance sans laquelle je n'aurais pas poursuivi les études qui m'ont menée vers le métier dont j'ai toujours rêvé. Un merci particulier aussi à Alexandra, ma cousine, qui a eu la délicatesse et la patience d'être là aujourd'hui.

*Last but not least*, voici le temps venu de remercier mes plus proches amis, indéfectibles soutiens à chaque pas, chaque détour, chaque tournant de mon chemin : Shaneze, merci pour ton amitié, ton énergie, ta force, ta confiance, ta résolution, et l'exemple de vie que tu es pour moi. Depuis plus de 11 ans maintenant, tant de souvenirs, tant de passages, et toujours ta présence. Maintenant doublée... Merci à toi, Alex, pour la profondeur de ta gentillesse, ton écoute, ton accueil bienveillant, et cette façon unique d'être présent et attentif.

Aurélien Parigaux, merci pour ta grande amitié, pour tout ce que tu as fait et continues de faire pour moi, pour être là quand il le faut et pour m'aider quand j'en ai besoin. Merci pour ta gentillesse et ton immense générosité, qui me touchent beaucoup. Merci d'avoir partagé mes larmes. Ton aide sur  $\text{\LaTeX}$  a été si précieuse que je me dois de te remercier spécifiquement pour cela. Ce manuscrit ne serait pas là sans toi. Tu es un vrai exemple de générosité et dévouement. Ah et j'oubliais, de rien de t'avoir filé le virus de la danse. Merci à toi, Léa, pour ton amitié, ta fidélité, ton écoute, ton humour (je resterai toujours ta plus grande fan!). Tu es pour moi un exemple de bienveillance, de douceur et de remise en question : ta présence m'est précieuse.

Merci à toi, Maxime, pour l'ami sincère et indéfectible que tu es. Merci pour ta grande ouverture de cœur comme d'esprit : sache que ce que tu es compte beaucoup pour moi et me permet d'avancer plus que tu ne le sais. Merci à toi Max, frérot, pour avoir été un super coloc et confident. À chaque retrouvailles je me sens à nouveau proche de toi comme à l'époque. Merci pour ta douce et fidèle amitié, tu m'as beaucoup inspirée.

Je termine cette farandole d'amis par ceux que la danse a mis dans ma vie. Clément Rieu, notre amitié est faite de profond respect et d'une sincère affection. J'aime autant ta franchise que ta finesse et ton intelligence. Tu fais partie de ceux qui, d'un seul mot, peuvent me faire rire ou réfléchir. Merci d'être là. Merci à toi aussi Tristan pour ta fidèle amitié. Nos réflexions sur le couple m'ont beaucoup appris. J'ai beaucoup d'admiration pour toi, j'espère que tu le sais. Enfin, merci à toi Gérard pour la gentillesse et la générosité que tu as toujours eues à mon égard.

Bien que nos chemins se soient séparés, je tiens à profondément remercier Louis. Merci pour ton amour, ta tendresse et tous les merveilleux moments que nous avons partagés pendant toutes ces années. Ton calme et ta lucidité ont été un vrai soutien face aux moments difficiles au labo. Je te sais heureux et plein de projets là où tu es. Je te souhaite tout le bonheur du monde pour la suite. Tu feras toujours partie de moi.

Enfin, je tiens à remercier mon JD, Jean-David pour ceux qui se posent encore la question du prénom complet. Tu as été : un élève de danse, un confident, un ami. Tu as failli devenir mon parrain, mais à ce moment-là j'ai réalisé que ce que je voulais que tu sois pour moi, c'est tout simplement ma moitié. Merci de m'avoir tant écoutée, à des heures complètement indécentes, d'avoir rédigé des mails avec moi, d'avoir pris ma morve en pleine figure au téléphone tant de fois. Tu as été si présent pour moi et à la fois tout à fait à ta place. Avec toi j'ai vu ce qu'était le don gratuit. Merci pour ton immense aide pour organiser cette soutenance, elle n'aurait pas lieu sans toi à bien des égards. Merci de m'avoir laissé approcher. Merci de partager ma vie.

Je me souviendrai de ces trois ans. Je me souviendrai surtout de ceux qui étaient là, chacun à sa manière. Ces quelques mots ne peuvent pas tout dire : prenez-les pour ce qu'ils sont, une fenêtre ouverte sur mon cœur. Enfin, merci à Dieu d'avoir mis sur mon chemin des personnes que j'ai envie de remercier.

# Résumé

Le but de cette thèse est de développer une théorie de l'élimination effective pour les systèmes fonctionnels intégral-différentiels ordinaires permettant leur manipulation et leur étude algébrique.

Ayant pour objectif une élimination intégral-différentielle, nous avons été amenés à étudier les propriétés de l'algèbre  $\mathbb{I}_1$  des opérateurs intégral-différentiels ordinaires à coefficients polynomiaux, c'est-à-dire, l'algèbre d'opérateurs définie par la dérivation ordinaire  $\partial = \frac{d}{dt}$ , l'intégrale indéfinie  $I = \int_{t_0}^t$ , l'évaluation  $e_{t_0}$  en  $t_0$  et les opérateurs de multiplication  $m_a$  par des fonctions polynomiales  $a$  en la variable  $t$ . Cette algèbre a une structure d'anneau de polynômes non commutatifs en ces opérateurs satisfaisant les identités classiques du calcul intégral-différentiel telles que :  $\partial \circ I = 1$ , où 1 désigne l'opérateur identité ;  $I \circ \partial = 1 - e_{t_0}$  ;  $\partial \circ m_a = m_a \circ \partial + m_{\partial(a)}$  ;  $\partial \circ e_{t_0} = 0$  ;  $e_{t_0} \circ I = 0$  ;  $e_{t_0}^2 = e_{t_0}$  ; etc. Ce point de vue permet de reformuler certaines identités du calcul intégral-différentiel comme différentes expressions d'un même opérateur. Cela conduit naturellement à l'étude des formes normales de ces polynômes non commutatifs et aux problèmes de réécriture. Par exemple, l'intégration par parties s'écrit comme l'identité  $I \circ m_a \circ \partial = -I \circ m_{\partial(a)} + (1 - e_{t_0}) \circ m_a$ . Nous pouvons alors « algébriser » une partie du calcul intégral-différentiel classique en ramenant des problèmes du calcul intégral-différentiel à de simples calculs algébriques. Par exemple, le théorème de Taylor avec reste intégral se réécrit comme une identité algébrique dans  $\mathbb{I}_1$ .

Contrairement aux algèbres d'opérateurs différentiels, intensivement étudiées en mathématiques pour leurs liens avec les systèmes différentiels et la mécanique quantique (algèbres des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux, aussi appelées *algèbres de Weyl*), l'étude des propriétés algébriques de l'algèbre  $\mathbb{I}_1$  n'a été menée que récemment. Le fait que l'opérateur intégral  $I$  soit un inverse à droite de  $\partial$  mais non un inverse à gauche implique que l'algèbre  $\mathbb{I}_1$  n'est pas noethérienne par un résultat classique de Jacobson. Cela est, a priori, une obstruction forte à un développement algorithmique de  $\mathbb{I}_1$  dans un système de calcul formel.

Cependant, Bavula a pu montrer que cette algèbre est *cohérente*, ce qui signifie que le noyau d'une matrice à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$  est finiment engendré. Comme un système linéaire d'équations intégral-différentielles définit un module de *présentation finie*, une étude algorithmique de ces systèmes peut alors être développée et implémentée dans un système de calcul formel. Pour cela, nous avons dû obtenir une preuve effective du théorème de Bavula démontrant la cohérence de l'algèbre  $\mathbb{I}_1$ . Notre preuve, bien différente de l'originale non algorithmique, a été implémentée dans le logiciel de calcul formel `Maple` dans un prototype nommé `Bavula`. Ainsi, à l'aide de cette implémentation, nous pouvons maintenant calculer des noyaux de matrices à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ , des inverses à gauche/droite de telles matrices, calculer les conditions de compatibilités des systèmes linéaires intégral-différentiels inhomogènes, etc.

Nous avons également prouvé que  $\mathbb{I}_1$  est un anneau de *Cramer effectif* (aussi appelé *computational ring* ou *anneau fortement discret* dans les communautés du calcul formel ou de l'algèbre constructive). Ce résultat montre que tout système linéaire de la forme  $AX = B$  ou  $XA = B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux matrices fixées à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$  et  $X$  une matrice inconnue à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ , peut être résolu de manière effective. La propriété de Cramer effectif est la condition connue permettant le développement d'une version effective de l'algèbre homologique. L'implémentation de ce résultat dans le package `Bavula` nous donne ainsi un accès aux méthodes homologiques effectives sur  $\mathbb{I}_1$  en utilisant, par exemple, une interface avec la librairie `CapAndHomalg`.

Finalement, les résultats obtenus dans ce mémoire montrent la possibilité d'une future étude des systèmes linéaires intégral-différentiels ordinaires à coefficients polynomiaux à l'aide des méthodes de l'analyse algébrique effective.

## Mots clés

Systèmes linéaires d'équations intégral-différentielles ordinaires, anneau d'opérateurs intégral-différentiels, anneau cohérent, élimination intégral-différentielle, solutions polynomiales, systèmes linéaires d'équations différentielles ordinaires, modules sur l'algèbre de Weyl, algèbre homologique effective.

# Abstract

The goal of this thesis is to develop an effective elimination theory for ordinary integro-differential functional systems, enabling their manipulation and algebraic study.

With the objective of integro-differential elimination, we were led to study the properties of the algebra  $\mathbb{I}_1$  of ordinary integro-differential operators with polynomial coefficients. That is, the algebra of operators defined by the ordinary derivation  $\partial = \frac{d}{dt}$ , the indefinite integral  $I = \int_{t_0}^t$ , the evaluation  $e_{t_0}$  at  $t_0$ , and the multiplication operators  $m_a$  by polynomial functions  $a$  in the variable  $t$ . This algebra has a structure of a noncommutative polynomial ring in these operators, satisfying the classical identities of integro-differential calculus such as  $\partial \circ I = 1$ , where 1 denotes the identity operator;  $I \circ \partial = 1 - e_{t_0}$ ;  $\partial \circ m_a = m_a \circ \partial + m_{\partial(a)}$ ;  $\partial \circ e_{t_0} = 0$ ;  $e_{t_0} \circ I = 0$ ;  $e_{t_0}^2 = e_{t_0}$ ; etc. This perspective allows us to understand certain identities of integro-differential calculus as different representations of the same operator, which naturally leads to the study of normal forms of these noncommutative polynomials and rewriting problems. For instance, integration by parts can be written as the identity  $I \circ m_a \circ \partial = -I \circ m_{\partial(a)} + (1 - e_{t_0}) \circ m_a$ . This allows us to “algebraize” part of classical integro-differential calculus by reducing integro-differential problems to simple algebraic computations. For example, Taylor’s theorem with integral remainder can be rewritten as an algebraic identity in  $\mathbb{I}_1$ .

Unlike algebras of differential operators, which have been extensively studied in mathematics for their connections with differential systems and quantum mechanics (differential operators with polynomial coefficients, also named *Weyl algebras*), the study of the algebraic properties of the algebra  $\mathbb{I}_1$  has only recently been explored. The fact that the integral operator  $I$  is a right inverse of  $\partial$  but not a left inverse implies that the algebra  $\mathbb{I}_1$  is not noetherian, according to a classical result by Jacobson. This poses a significant obstacle to the algorithmic development of  $\mathbb{I}_1$  in a computer algebra system.

However, Bavula has shown that this algebra is coherent, meaning that the kernel of a matrix with coefficients in  $\mathbb{I}_1$  is finitely generated. Since a system of linear integro-differential equations defines a *finitely presented* module, an algorithmic study of such systems can then be developed and implemented in a computer algebra system. To achieve this, we needed to obtain an effective proof of Bavula’s theorem demonstrating the coherence of the algebra  $\mathbb{I}_1$ . Our proof has been implemented in the `Maple` computer algebra software in a prototype named `Bavula`. Thanks to this implementation, we can now compute kernels of matrices with coefficients in  $\mathbb{I}_1$ , left/right inverses of such matrices, compatibility conditions for inhomogeneous linear integro-differential systems, and more.

We also proved that  $\mathbb{I}_1$  is an *effective Cramer ring* (also known as a *computational ring* or *strongly discrete ring* in the computer algebra or constructive algebra communities). This result shows that any linear system of the form  $AX = B$  or  $XA = B$ , where  $A$  and  $B$  are fixed matrices with coefficients in  $\mathbb{I}_1$  and  $X$  is an unknown matrix with coefficients in  $\mathbb{I}_1$ , can be solved effectively. The effective Cramer property is the known condition that enables the development of an effective version of homological algebra. The implementation of this result in the `Bavula` package thus gives us access to effective homological methods over  $\mathbb{I}_1$  by using, for example, an interface with the `CapAndHomalg` library.

Finally, the results obtained in this thesis demonstrate the potential for a future study of ordinary integro-differential systems with polynomial coefficients using methods from effective algebraic analysis.

## Keywords

Linear systems of ordinary integro-differential equations, ring of integro-differential operators, coherent algebra, integro-differential elimination, polynomial solutions, linear systems of ordinary differential equations, modules over the Weyl algebra, effective homological algebra.

# Notations

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels.

$\llbracket 1, n \rrbracket$  désigne le sous ensemble d'entiers naturels  $\{1, \dots, n\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.

$\mathbb{Q}$  désigne le corps des fractions rationnelles.

$\mathbb{k}$  désigne un corps de base calculable infini, souvent  $\mathbb{Q}$  pour les calculs.

$\mathbb{R}$  désigne le corps des nombres réels.

$\mathcal{A}$  désigne un anneau, souvent un anneau d'opérateurs comme  $\mathbb{A}_1$  ou  $\mathbb{I}_1$ .

$\mathcal{A}^*$  désigne l'anneau  $\mathcal{A}$  privé de 0, c'est-à-dire,  $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ .

$\mathcal{A}^{q \times p}$  désigne le  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}$ -bi-module des matrices de taille  $q \times p$  à coefficients dans  $\mathcal{A}$ .

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  désigne l'algèbre des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  infiniment différentiables.

$\mathcal{F}$  désigne un  $\mathcal{A}$ -module à gauche de fonctions comme  $\mathbb{k}[t]$  ou  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

Soit  $d \in \mathcal{A}$  avec  $\mathcal{A}$  un anneau, et  $y \in \mathcal{F}$  avec  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche.

$\text{ann}_{\mathcal{A}}(d)$  désigne l'idéal à gauche  $\{a \in \mathcal{A} \mid a d = 0\}$ .

$\text{ann}_{\mathcal{A}}(d.)$  désigne l'idéal à droite  $\{a \in \mathcal{A} \mid d a = 0\}$ .

$d \bullet y$  désigne l'action de l'opérateur  $d$  sur la fonction  $y$ , autrement dit,  $d \bullet y = d(y)$ .

$d \bullet$  désigne l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  qui à  $y \in \mathcal{F}$  associe  $d \bullet y = d(y)$ .

$\ker_{\mathcal{F}}(d \bullet)$  désigne le groupe abélien  $\{y \in \mathcal{F} \mid d \bullet y = d(y) = 0\}$ .

$\text{ann}_{\mathcal{A}}(\bullet y)$  désigne l'idéal à gauche  $\{d \in \mathcal{A} \mid d \bullet y = d(y) = 0\}$ .

Soit  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$  avec  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1$  ou  $\mathbb{I}_1$ .

$\ker_{\mathcal{A}}(.R)$  désigne le  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $\{\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times q} \mid \lambda R = 0\}$ .

$\ker_{\mathcal{A}}(R.)$  désigne le  $\mathcal{A}$ -module à droite  $\{\lambda \in \mathcal{A}^{p \times 1} \mid R \lambda = 0\}$ .

$\text{im}_{\mathcal{A}}(.R)$  désigne le  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $\mathcal{A}^{1 \times q} R = \{\lambda R \mid \lambda \in \mathcal{A}^{1 \times q}\}$ .

$\text{im}_{\mathcal{A}}(R.)$  désigne le  $\mathcal{A}$ -module à droite  $R \mathcal{A}^{p \times 1} = \{R \lambda \mid \lambda \in \mathcal{A}^{p \times 1}\}$ .

$R \bullet y$  désigne l'action de  $R$  sur  $y$  définie par  $R \bullet y = R(y)$ .

$R \bullet$  désigne l'application de  $\mathcal{F}^{p \times 1}$  dans  $\mathcal{F}^{q \times 1}$  qui à  $y \in \mathcal{F}^{p \times 1}$  associe  $R \bullet y = R(y) \in \mathcal{F}^{q \times 1}$ .

$\text{im}_{\mathcal{F}}(R \bullet)$  désigne le groupe abélien  $\{R \bullet y = R(y) \mid y \in \mathcal{F}^{p \times 1}\}$ .

Soient  $p \in \mathbb{k}[t]$ ,  $M = (m_{i,j}(t))_{(i,j) \in \llbracket 1,q \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$  et  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1$  ou  $\mathbb{I}_1$ .

$\deg_t p$  désigne le degré en la variable  $t$  du polynôme  $p$ .

$\deg_t M$  désigne le maximum des degrés en  $t$  des polynômes  $m_{i,j}(t)$ , pour  $i = 1 \dots q$  et  $j = 1 \dots p$ .

$\ker_{\mathcal{A}}(\bullet M)$  désigne le  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $\{\lambda = (\lambda_1 \dots, \lambda_q) \in \mathcal{A}^{1 \times q} \mid \lambda \bullet M = \lambda(M) = 0\}$  où  $\lambda(M)$  est le vecteur dont le coefficient  $j$  est

$$\sum_{k=0}^q \lambda_k (m_{k,j}(t)).$$

# Chapitre 1

## Introduction

Les équations différentielles, aux dérivées partielles, intégrales et intégral-différentielles occupent une place centrale dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, biologiques et de problèmes de sciences l'ingénieur, où les effets de mémoire, d'héritage ou de dépendance temporelle sont essentiels. Elles permettent notamment de formaliser des dynamiques dans lesquelles l'évolution d'un système dépend non seulement de son état actuel, mais également de ses états passés, intégrés dans le temps. Ce type d'équations se retrouve dans des domaines aussi variés que la mécanique des milieux continus, la biologie cellulaire, l'électromagnétisme, ou encore en théorie du contrôle. Ce mémoire se concentre sur les équations et les systèmes d'équations intégral-différentielles linéaires à une variable, dites *ordinaires*, excluant ainsi les équations et les systèmes d'équations aux dérivées partielles et intégral-différentielles (non linéaires).

Dans cette introduction, nous rappelons la classification historique des équations intégrales introduite par Fredholm et Volterra au XIX<sup>e</sup> siècle, car elle reste un fondement théorique incontournable dans l'étude contemporaine des équations intégral-différentielles [172, 148, 3]. Ensuite, nous présentons différentes méthodes numériques modernes utilisées pour leur résolution (telles que les méthodes de collocation, spectrales, « multisteps » ou de transformation différentielle) avec quelques références bibliographiques. Enfin, nous introduisons une approche plus algébrique dans laquelle les opérateurs différentiels et d'intégration sont étudiés au sein d'algèbres spécifiques, comme les *algèbres de Weyl*, les *algèbres de Weyl généralisées*, les *algèbres différentielles* et les *algèbres intégral-différentielles*. C'est dans ce cadre plus algébrique que s'inscrit le travail de cette thèse. Enfin, cette introduction se conclura par la présentation des contributions de ce mémoire, suivie d'un résumé de son contenu détaillé, chapitre par chapitre.

### 1.1 Généralités sur les équations intégrales et différentielles

D'un point de vue mathématique, les équations intégrales peuvent être classées selon plusieurs critères fondamentaux, qui influencent tant leur analyse théorique que leur traitement numérique. Ces critères incluent notamment l'homogénéité, la place de la fonction inconnue dans l'équation, la variabilité des bornes d'intégration, la linéarité de l'équation, ainsi que la régularité des intégrales considérées.

Comme pour les équations différentielles, on qualifie une équation intégrale d'*homogène* lorsque le second membre est nul, et d'*inhomogène* dans le cas contraire. Par exemple, l'équation

$$\int_0^x t y(t) dt = 0$$

est une équation intégrale homogène, tandis que l'équation

$$\int_0^x t y(t) dt = x^2$$

est inhomogène.

Une autre distinction essentielle concerne la place occupée par la fonction inconnue dans l'équation. Une équation intégrale est dite de *première espèce* lorsque la fonction inconnue apparaît uniquement sous le signe intégral. En revanche, si cette fonction apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale, on parle alors d'*équation de deuxième espèce*. Par exemple,

$$\int_0^x \sin(x-t) y(t) dt = \sqrt{x}$$

est une équation de première espèce, tandis que

$$3y(x) + \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt = \sqrt{x}$$

est une équation de deuxième espèce. Cette classification n'est pas anodine : les équations de première espèce posent généralement plus de difficultés analytiques et numériques, car elles peuvent être mal posées. En effet, les équations intégrales de première espèce sont plus délicates car elles consistent à inverser le processus d'intégration qui « filtre » l'information. De plus, comme l'inconnue n'apparaît qu'à l'intérieur de l'intégrale, on ne peut pas l'isoler directement, ce qui complique fortement la résolution, tant théorique que numérique.

Sur le plan historique, les équations intégrales se répartissent en deux grandes familles introduites aux XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles par Fredholm et Volterra. On parle d'*équation de Fredholm* lorsque les bornes d'intégration sont fixes et d'*équation de Volterra* lorsque la borne supérieure de l'intégrale dépend de la variable indépendante. Par exemple, l'équation

$$\int_0^1 (t-x)y(t)^2 dt = 2x$$

est une équation de Fredholm, tandis que

$$\int_0^x y(t)^2 dt = 2x$$

est une équation de Volterra.

Un autre critère important est celui de la *régularité* de l'équation. On dit qu'une équation intégrale est *régulière* lorsque toutes les intégrales intervenant dans l'équation sont bien définies au sens de Lebesgue. Sinon, l'équation est dite *singulière*. Par exemple, l'équation

$$\int_0^x \sin(t)y(t) dt = x^2$$

est régulière, tandis que l'équation

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}} = x^2$$

est singulière. Ce dernier exemple appartient à une famille bien connue : les *équations intégrales d'Abel*, de la forme

$$\int_0^x \frac{y(t)}{|x-t|^\alpha} dt = f(x),$$

où  $\alpha > 0$  et  $f$  est une fonction donnée. Historiquement, l'équation d'Abel,

$$\sqrt{2g} f(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{(x-t)}} dt,$$

joue un rôle fondateur. Elle apparaît dans la modélisation du mouvement d'une bille glissant sous l'effet de la gravité le long d'un fil, et constitue un exemple typique d'équation de Volterra, inhomogène, singulière, de première espèce.

Enfin, une composante essentielle d'une équation intégrale réside dans la fonction appelée *noyau*, notée  $K$ , qui intervient sous le signe intégral. De manière générale, un terme intégral s'écrit

$$\int_0^x K(t, x, y(t)) dt,$$

où la fonction  $K$  est le noyau de l'équation. Si ce noyau est de la forme  $K(t, x)y(t)$ , alors l'équation est *linéaire*. L'analyse des équations intégrales à noyau *séparable*, c'est-à-dire, pouvant s'écrire comme une somme  $\sum_i g_i(t)h_i(x)$ , où  $g_i$  et  $h_i$  sont des fonctions données, est simplifiée. Notons que cette classification est adaptable aux équations intégrales-différentielles. En effet, une équation de la forme suivante

$$u'(x) + \int_a^x K(x, y)u(y) dy = f(x),$$

est une équation intégrale-différentielle du type Volterra, de deuxième espèce, inhomogène.

Notons qu'il y a une correspondance entre les équations intégrales linéaires en une variable de type Volterra, respectivement Fredholm, et les équations différentielles linéaires ordinaires avec des conditions initiales de *type Cauchy*, respectivement des *conditions aux limites*.

Un *problème de Cauchy* pour une équation différentielle ordinaire d'ordre  $n$  consiste à chercher une fonction  $y(t)$  satisfaisant une équation différentielle du type

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , sous la contrainte que les  $n$  premières dérivées de  $y$  prennent des valeurs données au point initial  $a \in I$ , c'est-à-dire :

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}.$$

L'équation suivante est un exemple d'équation différentielle d'ordre 2 avec conditions de Cauchy :

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Ce type de contrainte rappelle les équations intégrales de Volterra, dans lesquelles l'information sur la solution est entièrement spécifiée à partir d'un point initial  $a$ . En effet, un problème de Cauchy peut être réécrit à l'aide d'une équation intégrale de Volterra.

Un *problème aux limites* pour une équation différentielle ordinaire consiste à chercher une fonction  $y(x)$  définie sur un intervalle  $I = [a, b]$  et satisfaisant une équation différentielle du type

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$

sous des conditions imposées en plusieurs points de l'intervalle, typiquement aux extrémités. Ces conditions contraignent la solution à satisfaire certaines valeurs aux bornes de l'intervalle, ce qui est caractéristique des phénomènes stationnaires ou symétriques (comme les vibrations d'une corde/poutre fixée aux extrémités). Un exemple de tel problème est le suivant :

$$y''(x) = -\pi^2 y(x) \quad \text{sur } [0, 1], \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Ce type de contrainte rappelle les équations intégrales de Fredholm, dans lesquelles l'intégration s'effectue sur un intervalle à bornes fixes  $[a, b]$ , et où l'on cherche une solution qui respecte des conditions imposées aux deux extrémités. De manière analogue, dans un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire, la solution est contrainte en plusieurs points, souvent aux bornes de l'intervalle. Un problème aux limites peut se réécrire sous la forme d'une équation intégrale de Fredholm.

Ces deux types de conditions reflètent des contextes physiques différents, évolution dans le temps d'une part et état d'équilibre de l'autre.

Les équations différentielles, intégrales ou intégral-différentielles *linéaires* sont généralement plus accessibles que leurs homologues *non linéaires*, car elles permettent d'exploiter les outils puissants de l'algèbre linéaire. Toutefois, comme on le verra dans les chapitres suivants, même dans le cadre linéaire, ces équations offrent encore un terrain riche pour la recherche théorique et numérique.

## 1.2 Quelques équations intégral-différentielles linéaires classiques

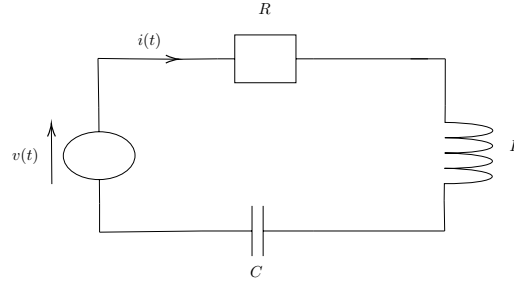
Cette section donne un inventaire de quelques équations intégral-différentielles linéaires classiques. Beaucoup d'équations non-linéaires peuvent être rendues linéaires en les regardant au voisinage d'un certain point fixé. On peut alors considérer leur linéarisé qui sont des équations linéaires et en faire leur étude.

Cette section donne des exemples de modèles linéaires ou d'approximations linéaires d'équations connues de la physique, de la biologie et de la finance. Bien sûr, il est très intéressant de regarder les équations non-linéaires pour chercher « à coller au plus près » à la réalité. Mais ce cadre d'étude dépasse le contexte de ce mémoire.

On notera que les équations suivantes de cette section sont déjà résolues par différentes méthodes : différentiation, passage dans le domaine de Laplace, et changement de variable (notamment pour découpler des équations), etc. L'objectif de cette sous-partie n'est pas dans l'identification d'une famille non résolue d'équation intégral-différentielle, mais plutôt de se convaincre de la forte présence de ce type d'équations dans différents domaines des sciences.

### Circuit électrique RLC série [128, 35]

Considérons un circuit RLC série contenant une résistance  $R$ , une bobine d'inductance  $L$ , un condensateur de capacité  $C$  et un générateur de courant générant une tension  $v(t)$ , dépendant du temps.



La relation entre l'intensité du courant  $i(t)$  et la tension  $v(t)$  appliquée au circuit, peut être modélisée par l'équation intégro-différentielle suivante :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds = v(t).$$

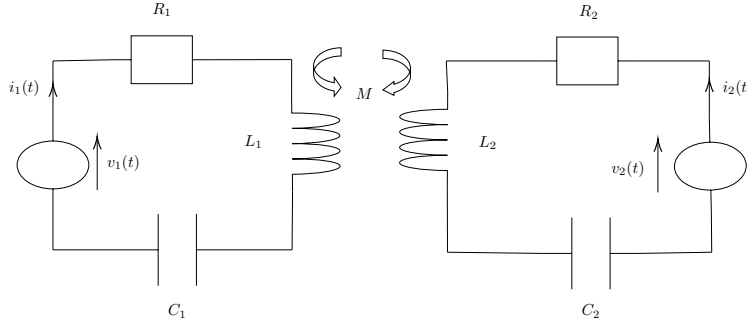
Dans certaines conditions (surface plane...), on peut faire une analogie avec la conduction thermique d'une quantité de chaleur injectée  $Q(t)$  dans un matériau de capacité  $C$  et de résistance thermique  $R$  qui vérifient une équation de la forme

$$C \frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{R} \int_0^t T(s) ds = Q(t),$$

où la notation  $T(t)$  désigne la température.

### Circuit électrique RLC couplé [93, 35]

Considérons deux circuits RLC (résistance, inductance, condensateur) couplés par une inductance mutuelle  $M$ . On représente la situation par le schéma suivant :



Ce système électrique complexe peut être décrit par deux équations intégro-différentielles linéaires liées, avec pour inconnues les courants dans chaque boucle,  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  :

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(s) ds - M \frac{di_2(t)}{dt} = v_1(t), \\ L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(s) ds - M \frac{di_1(t)}{dt} = v_2(t). \end{cases}$$

**Remarque 1.2.1.** Pour « découpler » les deux équations on peut effectuer un changement de variable. En effet, posons  $I_+ = i_1 + i_2$  et  $I_- = i_1 - i_2$ . Nous avons alors  $i_1 = \frac{I_+ + I_-}{2}$  et  $i_2 = \frac{I_+ - I_-}{2}$ . Les équations deviennent ainsi deux équations différentielles linéaires découplées en les variables  $I_+$  et  $I_-$  :

$$\begin{cases} (L_1 + L_2 - M) \frac{dI_+(t)}{dt} + (R_1 + R_2) I_+(t) + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_0^t I_+(s) ds = v_1(t) + v_2(t), \\ (L_1 - L_2 + M) \frac{dI_-(t)}{dt} + (R_1 - R_2) I_-(t) + \left( \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right) \int_0^t I_-(s) ds = v_1(t) - v_2(t). \end{cases}$$

### Modélisation des prix d'un actif avec mémoire des performances passées [36]

Considérons un modèle où le prix  $P(t)$  d'un actif financier est influencé par un indice économique  $I(t)$  et une mémoire intégrée des performances passées de  $P(t)$ , capturée par une intégrale. On cherche deux fonctions inconnues :  $P(t)$  (le prix) et  $I(t)$  (l'indice économique). On a alors un système d'équations dépendant des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$ , de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} + \alpha P(t) + \beta \int_0^t P(s) ds = \gamma I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} + \delta I(t) = \kappa \frac{dP(t)}{dt}. \end{cases}$$

### Dynamique linéaire de populations interconnectées [75]

Dans ce modèle, deux populations  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  évoluent sous des influences mutuelles linéaires. C'est le cas par exemple lorsque deux populations interagissent faiblement par exemple, deux espèces voisines qui partagent une ressource commune. On peut alors modéliser l'interaction entre ces populations via le système suivant, dans lequel  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  et  $\gamma$  sont des paramètres :

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} + \alpha_1 N_1(t) + \beta_1 \int_0^t N_1(s) ds = \gamma N_2(t), \\ \frac{dN_2(t)}{dt} + \alpha_2 N_2(t) + \beta_2 \int_0^t N_2(s) ds = \gamma N_1(t). \end{cases}$$

### Météorologie [116]

On modélise trois variables liées :  $T(t)$  la température à l'instant  $t$ ,  $C(t)$  la concentration de  $CO_2$  à l'instant  $t$  et  $H(t)$  la teneur en vapeur d'eau dans l'atmosphère à l'instant  $t$ . Les interactions entre ces trois grandeurs peuvent être modélisées par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} + \alpha_1 T(t) + \beta_1 \int_0^t T(s) ds = \gamma_{1,2} C(t) + H(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} + \alpha_2 C(t) + \beta_2 \int_0^t C(s) ds = \gamma_{2,1} T(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} + \alpha_3 H(t) + \beta_3 \int_0^t H(s) ds = \gamma_{3,1} T(t). \end{cases}$$

Les paramètres  $\alpha_i$  sont des taux de dissipation (ex : perte de chaleur, dissipation de  $CO_2$  par absorption...). Les paramètres  $\beta_i$  sont des paramètres de mémoires (ex : stockage de chaleur dans l'océan, cycle du carbone. . .) et enfin les paramètres du type  $\gamma_{i,j}$  sont des paramètres d'interaction (ex : contribution du  $CO_2$  à la température, effet de la température sur l'humidité...).

### Déformation d'une poutre avec relaxation ou hystérésis [109]

Notons  $y(t)$  la déformation d'une poutre à l'instant  $t$ ,  $c(t)$  un coefficient d'amortissement,  $k(t)$  la rigidité de la poutre qui peut être variable dans le temps,  $\alpha$  un coefficient de relaxation et enfin  $F(t)$  la charge extérieure appliquée sur la poutre à l'instant  $t$ . On obtient alors une équation du type :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c(t) \frac{dy(t)}{dt} + k(t) y(t) + \alpha \int_0^t F(s) ds = F(t).$$

Le terme intégral  $\alpha \int_0^t F(s) ds$  modélise un effet de relaxation (comme un effet viscoélastique où la réponse à la force appliquée dépend de l'intégrale de celle-ci).

## 1.3 Approches analytiques et numériques

Les équations différentielles, aux dérivées partielles, intégrales et intégral-différentielles jouent un rôle fondamental dans la modélisation mathématique de nombreux phénomènes physiques, biologiques et techniques. Leur résolution analytique étant souvent difficile, le développement de méthodes numériques et semi-analytiques efficaces est devenu un enjeu central en analyse appliquée et calcul scientifique. En particulier, les systèmes de type Volterra-Fredholm, c'est-à-dire mélangeant des équations de type Volterra et de type Fredholm, ainsi que des équations à noyaux singuliers suscitent un intérêt croissant en raison de leur présence dans des domaines variés tels que la mécanique des structures, l'électromagnétisme, ou encore le contrôle des systèmes dynamiques [133, 40, 42].

De nombreuses approches numériques ont été développées pour approcher les solutions de ces équations complexes. Les *méthodes de collocation*, par exemple, consistent à approximer la solution par une combinaison de fonctions simples (souvent des polynômes) et à forcer cette approximation à satisfaire l'équation en des points précis appelés « points de collocation ». Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux équations intégrales de Volterra ou Fredholm, et s'avèrent efficaces même en présence de noyaux singuliers [129, 176, 35, 48].

Les *méthodes spectrales*, quant à elles, reposent sur l'approximation de la solution à l'aide de fonctions globales, comme les polynômes de Chebyshev ou de Jacobi. Lorsqu'elles sont formulées dans un cadre de collocation, on parle alors de méthodes spectrales de collocation. Elles offrent une convergence rapide pour des solutions régulières et sont souvent privilégiées dans les problèmes où une grande précision est requise avec peu de points [89, 130, 80].

Parmi les approches itératives, les *méthodes multisteps* permettent de calculer les solutions d'équations différentielles ou intégral-différentielles en utilisant plusieurs valeurs précédentes de la solution pour avancer dans le temps. Contrairement aux méthodes à un seul pas (comme *Runge-Kutta* ou *Euler implicite* [40]), elles exploitent une mémoire des itérations passées, ce qui améliore la précision sans alourdir le coût de calcul [46, 43, 151, 45, 41]. Nous renvoyons vers [28, 82] et leurs références pour les méthodes numériques du type Runge-Kutta pour la résolution numérique de systèmes d'équations intégral-différentielles. Pour une implémentation, voir [26].

Une autre classe d'approches semi-analytiques particulièrement puissantes repose sur la *transformation différentielle*. Cette méthode convertit une équation en une suite de relations algébriques sur les coefficients d'une série (similaire à une série de Taylor), facilitant ainsi la résolution de problèmes même non linéaires ou avec retard. Elle a été appliquée avec succès à divers types d'équations de Volterra-Fredholm, qu'elles soient linéaires ou non [125, 91, 100, 4, 118, 120, 174, 177, 127, 5, 149, 150, 22, 147, 167].

Les méthodes de perturbation, enfin, constituent un cadre puissant pour approximer les solutions lorsque le problème dépend d'un petit paramètre  $\varepsilon$ . L'approche consiste à développer la solution en série selon les puissances de ce paramètre, en résolvant d'abord le problème simplifié (non perturbé), puis en introduisant des corrections successives. Ces méthodes sont particulièrement utiles dans le cas de systèmes où une variation faible induit des effets mesurables, comme en mécanique des milieux continus ou en dynamique des fluides. On distingue notamment les perturbations régulières — adaptées aux problèmes lisses — des perturbations singulières, qui nécessitent des techniques comme la *théorie des couches limites* [24, 175, 23].

L'ensemble de ces techniques — numériques, analytiques ou hybrides — offre un large éventail d'outils pour aborder la résolution des équations intégral-différentielles, en particulier celles de type Volterra-Fredholm. De nombreux travaux récents, notamment ceux de Bulatov, Chistyakova, ou encore Behiry [40, 81, 45, 81, 22], ont permis d'enrichir ce champ en développant des schémas numériques précis et robustes, tout en établissant des garanties théoriques sur l'existence, l'unicité et la convergence des solutions.

## 1.4 Approches algébriques et effectives

Les équations différentielles, intégrales et intégral-différentielles sont classiquement étudiées sous des angles analytiques ou numériques. Toutefois, leur formulation en termes d'opérateurs offre une ouverture précieuse vers une approche algébrique, notamment dans le contexte de la théorie des algèbres différentielles ou des anneaux d'opérateurs. Dans cette optique, les opérateurs de dérivation et d'intégration peuvent être formalisés au sein d'algèbres particulières, offrant ainsi un cadre algébrique pour l'étude des équations et la mise en évidence de leurs propriétés structurelles. C'est ce qu'on appelle, en toute généralité, l'*analyse algébrique*. C'est dans ce champ des mathématiques que s'inscrit le travail de cette thèse.

## 1.4.1 Systèmes d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles

### 1.4.1.1 Approches théoriques

Au cœur de l'analyse algébrique se trouve la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules, où  $\mathcal{D}$  est l'initiale de « différentiel ». Cette théorie a pour but l'étude des systèmes différentiels ou systèmes aux dérivées partielles à l'aide des méthodes de la théorie des anneaux d'opérateurs différentiels, la théorie des modules, l'algèbre homologique et la théorie des faisceaux. Voir [73, 99] et leurs références. Elle a été initiée par Malgrange, Bernstein et l'école japonaise de Sato, en particulier par Kashiwara (lauréat du prix Abel 2025). Il s'agit essentiellement de construire une correspondance entre le système que l'on souhaite étudier et les propriétés algébriques du module de présentation finie canoniquement associé au système. Plus précisément, considérons  $R \in \mathcal{D}^{q \times p}$  une matrice d'opérateurs différentiels (on peut prendre  $\mathcal{D}$  comme étant, par exemple, l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux, appelée *l'algèbre de Weyl*). On cherche alors les solutions  $\eta$  du système présenté par  $R$ , c'est-à-dire, les  $\eta \in \mathcal{F}^{p \times 1}$  tels que  $R(\eta) = 0$  (où  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{D}$ -module à gauche; on peut penser à  $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty$  ou  $\mathbb{k}[t]$  avec  $\mathbb{k}$  un corps). Le  $\mathcal{D}$ -module associé à ce système est alors  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathcal{D}}(.R) = \mathcal{D}^{1 \times p} / (\mathcal{D}^{1 \times q} R)$ , autrement dit,  $\mathcal{M}$  est le module finiment présenté par  $R$  et donc de *présentation finie*. Ici se dessine l'importance de la classe des modules de présentation finie dans l'étude des systèmes différentiels. On reviendra plus tard sur ce point dans cette introduction et surtout dans ce mémoire. Un résultat central de cette théorie, dû à Malgrange, énonce que  $\ker_{\mathcal{F}}(R \cdot) = \{\eta \in \mathcal{F}^{p \times 1} \mid R(\eta) = 0\} \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ , où  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  est le groupe abélien ou le  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel des  $\mathcal{D}$ -morphisms de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{F}$ . Cela signifie que l'ensemble des solutions du système, défini en correspondance intrinsèque avec  $R$ , est en bijection avec l'ensemble des applications  $\mathcal{D}$ -linéaires à gauche de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{F}$ . Cette dualité entre l'algèbre et l'analyse est analogue à celle entre l'algèbre et la géométrie, avec d'un côté les équations algébriques écrites dans un système de coordonnées (approche de Descartes) et de l'autre les solutions de l'intersection de polynômes (par exemple, de droites et de cercles) en géométrie telle qu'étudiée par les Grecs. Ce cadre de travail général peut être utilisé avec plusieurs classes d'anneaux  $\mathcal{D}$  en fonction des contextes analytiques. Ces dernières années, l'analyse algébrique a trouvé des applications en physique mathématiques, en théorie du contrôle et en traitement du signal.

Une *algèbre différentielle* est une algèbre commutative munie d'une ou plusieurs dérivations, c'est-à-dire d'opérateurs linéaires satisfaisant la règle de Leibniz. Ce cadre permet d'étudier des systèmes d'équations différentielles polynomiales (en les dérivées) sous une forme purement algébrique. La théorie a été initiée par Ritt dans les années 1930, qui a formalisé les notions de *polynômes et d'idéaux différentiels*. À partir des années 1960, Kolchin approfondit cette approche en développant la notion de *corps différentiels*. Ces travaux fournissent les fondements de l'algèbre différentielle moderne [154, 102, 101]. L'algèbre différentielle peut être vue comme une extension de la géométrie algébrique. Elle permet d'étudier les systèmes d'équations aux dérivées partielles comme des variétés algébriques.

Ajoutons aussi que la théorie de Spencer permet l'étude de l'*intégrabilité formelle* des systèmes d'équations aux dérivées partielles à l'aide de la théorie des jets, de la cohomologie de Spencer, des concepts de prolongations et projections, etc. [169, 131]. Cette approche s'intéresse à la possibilité d'obtenir des solutions sous la forme de séries formelles ou localement convergentes (systèmes involutifs, caractères de Cartan, etc.). Ce cadre théorique permet de prouver rigoureusement des résultats énoncés par E. Cartan sur les systèmes différentiels dans le cadre des systèmes de formes différentielles extérieures et des systèmes de Pfaff, et généralisés par Kuranishi et Kähler [37]. Finalement, notons que les liens entre les bases de Janet [95, 156] et la théorie de Spencer ont été étudiés dans [131].

L'algèbre différentielle trouve une application importante dans l'étude des systèmes différentiel-algébriques (DAE pour « Differential Algebraic Equations »). Un système différentiel-algébrique se présente généralement sous la forme

$$E(x) \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t),$$

où  $E(x)$  est une matrice singulière, c'est-à-dire non inversible. Il peut être linéaire ou non linéaire. La singularité de la matrice  $E(x)$  empêche d'isoler explicitement les dérivées des variables d'état, contrairement aux équations différentielles ordinaires non singulières, et d'appliquer le théorème de Cauchy montrant l'existence et l'unicité des solutions d'un tel système. De manière plus générale, si on considère un système d'équations différentielles

$$F(\dot{x}(t), x(t), t) = \begin{pmatrix} F_1(\dot{x}(t), x(t), t) \\ F_2(\dot{x}(t), x(t), t) \\ \vdots \\ F_n(\dot{x}(t), x(t), t) \end{pmatrix} = 0,$$

avec  $\dot{x}(t), x(t) \in \mathbb{R}^n$ , alors ce système est un système différentiel-algébrique si la matrice jacobienne

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$$

est singulière, c'est-à-dire non inversible. Les DAE combinent ainsi des équations différentielles avec des contraintes algébriques. Une méthode classique consiste à dériver le système un certain nombre de fois pour obtenir un système différentiel sur lequel on puisse appliquer des méthodes numériques, comme par exemple celles de la section 1.3. Cela donne lieu à la notion d'*indice* d'un système différentiel-algébrique. Les DAE trouvent, par exemple, une application en théorie du contrôle, notamment dans l'étude de l'observabilité des systèmes non linéaires, comme le montre par exemple l'article de Diop [79] et ses références.

#### 1.4.1.2 Approche Calcul Formel

Dans le cas des *systèmes fonctionnels*, c'est-à-dire des systèmes dont les inconnues sont des fonctions, les algèbres d'opérateurs fonctionnels, ont été étudiés ces dernières années dans la communauté du calcul formel. Ces travaux sont motivés par des applications à l'étude des fonctions spéciales, de problèmes de combinatoire, de physique mathématiques, de théorie du contrôle, etc. En particulier, de nombreux efforts ont été faits dans l'étude des *bases de Gröbner* et des *bases de Janet* pour les algèbres d'opérateurs fonctionnels (par exemple les *algèbres de Ore*) [49, 85, 60, 111, 155], ainsi que leurs implémentations telles que `Ore_algebra` [55], `JanetOre` [155], LDA (Linear Difference Algebra) [87], développées en `Maple`, `Singular` [111], etc.

Les résultats précédents ont permis le développement effectif de méthodes de théorie des modules, d'algèbre homologique et d'analyse algébrique [57, 8, 64, 71] et leurs implémentations dans les packages `OreModules` [59], `OreMorphisms` [72], `CapAndHomalg` [9], etc.

Une étude effective de l'algèbre différentielle a été développée ces dernières décennies dans la communauté du calcul formel, en particulier par Hubert et Boulier [92, 30]. Le package `DifferentialAlgebra` de `Maple`, contient une implémentation des algorithmes clés de l'algèbre différentielle [27] ainsi que des méthodes d'élimination pour les systèmes différentiels polynomiaux. Avec Lemaire, Boulier a formalisé la notion de *chaîne différentielle régulière* : une suite de polynômes différentiels ordonnée d'une manière rendant le système hiérarchisé et apte à l'élimination [31]. Une alternative consiste à utiliser la *décomposition de Thomas* [6, 156] implémentée dans le package `TDDS` [88]. Enfin, une approche algorithmique de la théorie de l'intégrabilité formelle de Spencer a été développée pour les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles et implantée dans le package `Spencer` développé sous le logiciel `Maple` [51, 52].

### 1.4.2 Les systèmes d'équations intégro-différentiels

#### Algèbre intégro-différentielle

Une extension de l'algèbre différentielle aux systèmes intégro-différentiels a été étudiée ces dernières années, en particulier par Boulier, Lemaire et leurs co-auteurs. Ces travaux ont pour but d'obtenir une théorie de l'élimination pour les systèmes intégro-différentiels polynomiaux, de développer des implémentations dédiées et des applications, en particulier à l'estimation de paramètres (des systèmes biologiques, modèles de réactions chimiques, optimisation de paramètres dans des modèles génétiques, analyse qualitative de réseaux de gènes et de neurones) [32, 146, 110].

#### Anneaux d'opérateurs intégro-différentiels

L'introduction d'une approche symbolique algébrique de l'intégrale via un opérateur est due à Baxter dans son papier [20]. Prenons par exemple une algèbre intégro-différentielle  $(\mathcal{F}, I, \partial)$  sur un corps  $\mathbb{k}$  (penser, par exemple, à  $\mathcal{F} = \mathbb{k}[t]$ ). Ainsi,  $(\mathcal{F}, I, \partial)$  n'est autre que  $\mathcal{F}$  muni de deux applications linéaires  $\partial$  et  $I$  de  $\mathcal{F}$  dans lui-même. Pour que  $\partial$  encode l'opération de dérivation, elle doit satisfaire la règle de Leibniz, c'est-à-dire, pour  $a, b \in \mathcal{F}$ ,  $\partial$  doit vérifier  $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$ . De même, pour que  $I$  encode l'opération d'intégration, elle doit satisfaire l'axiome de *Rota-Baxter* qui consiste à ce que pour un certain  $\lambda \in \mathbb{k}$ , et pour tous  $a, b \in \mathcal{F}$ , on a  $I(a)I(b) = I(I(a)b) + I(aI(b)) + \lambda I(ab)$ . On remarque que l'intégration analytique classique, sur, par exemple  $\mathcal{F} = \mathbb{k}[t]$  ou  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , vérifie l'axiome de Rota-Baxter de poids  $\lambda = 0$ . Si on veut que  $\partial$  et  $I$  symbolisent respectivement la dérivation et l'intégration, il faut poser

$\partial \circ I = 1$ , où 1 désigne l'opérateur identité. Malheureusement, la composition inverse n'est pas l'identité, mais plutôt  $I \circ \partial = 1 - e$ , où  $e$  est alors une application linéaire qui représente l'évaluation en un point fixe correspondant à la borne de l'opérateur intégral  $I$ . Voir aussi les travaux de Bavula [16], Boulier-Lemaire [32], Quadrat [135] et Regensburger [144].

Une contribution majeure est celle de Bavula à travers son concept d'*algèbre de Weyl généralisée* [14]. Cette structure généralise naturellement l'algèbre de Weyl usuelle qui encode l'opérateur de dérivation  $\partial$  et l'identité de Leibniz pour la dérivation d'un produit de fonctions. Cette approche permet d'interpréter les équations intégro-différentielles comme des relations entre éléments d'une algèbre non commutative et d'étudier leurs modules d'équations comme modules sur une algèbre de Weyl généralisée comme expliqué précédemment. L'approche de Bavula fournit alors une base algébrique qui permet la formalisation symbolique. Par ailleurs, Bavula s'intéresse, notamment dans [15], à la *conjecture jacobienne* qui énonce que : si  $f = (f_1, \dots, f_n)$  est un  $n$ -uplet de polynômes en  $n$  variables et le déterminant jacobien  $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = c \neq 0$ , où  $c$  est une constante, alors  $f$  est inversible, avec un inverse également polynomial. Cette conjecture est encore ouverte pour  $n \geq 2$ . Sa motivation est de formuler la conjecture jacobienne comme une propriété algébrique liée au caractère localement nilpotent de certains morphismes polynomiaux. C'est ce qui a motivé Bavula à introduire les algèbres  $\mathbb{I}_n$  [16, 15, 14], les algèbres d'opérateurs intégro-différentiels à coefficients polynomiaux à  $n$  variables. La première algèbre  $\mathbb{I}_1$  (cas ordinaire), et plus particulièrement l'approche constructive de sa propriété de *cohérence* prouvée par Bavula dans [16], est l'objet d'étude de ce mémoire.

## Calcul formel

Rosenkranz et Regensburger ont joué un rôle central dans le développement d'outils algébriques pour le calcul symbolique appliqué aux problèmes aux limites. Avec Korporal, ils ont conçu le package `IntDiffOp`, qui permet de manipuler efficacement des opérateurs intégro-différentiels à l'aide du calcul de formes normales [159, 160, 161]. Ce package intègre la gestion de plusieurs opérateurs d'évaluation, ce qui est essentiel pour traiter efficacement des problèmes aux limites réguliers et singuliers. Par ailleurs, ils ont travaillé sur des approches algébriques pour la résolution symbolique de ces problèmes, notamment en introduisant des opérateurs de Green et des bases de Gröbner paramétrées adaptées à ce contexte [165, 164, 162], etc.

D'autre part, Regensburger a développé, avec Raab, des méthodes symboliques ciblées pour l'algèbre des opérateurs non commutatifs. Il est notamment l'un des auteurs du package `SageMaths OperatorGB`, qui permet de certifier automatiquement des identités d'opérateurs linéaires via des bases de Gröbner non commutatives et travailler sur les problèmes de réécriture [153, 53, 76, 53]. Ses travaux portent également sur le calcul effectif d'annulateurs d'opérateurs et de calcul d'inverses dans le cadre des anneaux intégro-différentiels [144, 152].

Une approche possible pour l'analyse d'un système intégro-différentiel consiste à étudier ses solutions polynomiales. Celles-ci offrent une représentation explicite du comportement du système et facilitent l'analyse symbolique. Elles interviennent également dans plusieurs méthodes numériques, en particulier les méthodes spectrales ou de collocation (voir la section 1.3). Dans ce cadre, on peut citer les travaux de Barkatou-Cluzeau [10], Quadrat-Regensburger [144], qui proposent une approche algébrique pour caractériser et calculer les solutions polynomiales pour les équations intégro-différentielles linéaires.

Le problème d'estimation de paramètres est central pour identifier les caractéristiques internes d'un système à partir de données observées. Il trouve notamment des applications en automatique, où la connaissance précise des paramètres est essentielle pour la commande et la stabilisation de systèmes dynamiques. Ce type de problématique est abordé dans l'article de Chartouny, Cluzeau et Quadrat [50], qui étudie l'inverse du problème de Cauchy (qui s'intéresse à déterminer l'équation différentielle à partir d'une solution générique) dans le cadre des équations différentielles linéaires et ouvre la voie à des extensions vers les systèmes intégro-différentiels.

## 1.5 Contribution

L'objet d'étude de ce mémoire est l'algèbre des opérateurs intégro-différentiels à coefficients polynomiaux  $\mathbb{I}_1$  introduite par Bavula dans [16]. Le fait que  $\partial$  soit un inverse à gauche de  $I$  et non un inverse à droite montre, d'après un résultat de Jacobson [94], que l'anneau  $\mathbb{I}_1$  est nécessairement non noethérien. On rappelle qu'un anneau est noethérien (respectivement, à gauche ou à droite) lorsque tous ses idéaux (à gauche ou à droite) sont de type fini, c'est-à-dire finiment engendrés. Cela semble fortement compromettre une étude effective du point de vue calcul formel de cet anneau. En effet, un ordinateur ne peut gérer qu'un nombre fini de calculs sur un nombre fini d'objets.

Néanmoins, en 2011, Bavula a prouvé dans [16] que bien que non noethérien, l'anneau  $\mathbb{I}_1$  est *cohérent*. Cela signifie que toute matrice d'opérateur  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  de taille  $q \times p$  donnée, a un noyau à gauche et à droite de type fini, c'est-à-dire,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) = \{\lambda \in \mathbb{I}_1^{1 \times q} \mid \lambda R = 0\}$  et  $\ker_{\mathbb{I}_1}(R \cdot) = \{\lambda \in \mathbb{I}_1^{p \times 1} \mid R \lambda = 0\}$  peuvent être engendrés par un nombre fini de générateurs. Ceci est une bonne nouvelle pour le développement d'une théorie de l'élimination intégro-différentielle dans le cas des systèmes linéaires.

Cependant, la preuve de Bavula de la cohérence de  $\mathbb{I}_1$ , donnée dans [16], ne semble pas être constructive. En d'autres termes, elle ne permet pas le calcul explicite des noyaux de matrices d'opérateurs de  $\mathbb{I}_1$ . Le résultat central de cette thèse est d'avoir rendu cette preuve effective. Nous avons ainsi une méthode explicite pour calculer les noyaux de matrices à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ . Cette méthode de calcul est implémentée dans le système de calcul formel Maple dans un prototype nommé Bavula ([69]), utilisant différents packages tels que `OrModules`, `IntDiffOp` et `IntegrableConnections` [59, 12, 103]. À notre connaissance,  $\mathbb{I}_1$  est la première algèbre cohérente non noethérienne implémentée en machine.

Un argument permettant de comprendre l'intérêt du calcul de noyau effectif pour le développement d'une théorie de l'élimination intégro-différentielle est le suivant. Considérons un système de la forme  $R_1(y_1(t)) + R_2(y_2(t)) = 0$ , où  $y_1$  et  $y_2$  sont les inconnues,  $R_1 \in \mathbb{I}_1^{q \times p_1}$ ,  $R_2 \in \mathbb{I}_1^{q \times p_2}$ , et on cherche à avoir un système uniquement en l'inconnue  $y_1$ . Autrement dit, on cherche à *éliminer* l'inconnue  $y_2$  du système précédent. En calculant le noyau à gauche de la matrice  $R_2$ , c'est-à-dire, en calculant une matrice  $S_2$  telle que  $\ker_{\mathcal{A}}(\cdot R_2) = \text{im}_{\mathcal{A}}(\cdot S_2)$  alors, en appliquant  $S_2$  à gauche au système précédent, on obtient le système  $(S_2 R_1)(y_1(t)) = 0$ . Ce processus correspond à l'élimination de la variable  $y_2$ . Donnons un exemple explicite. Pour la définition précise des notations des opérateurs de  $\mathbb{I}_1$  nous invitons le lecteur à lire le début du chapitre 2.

**Exemple 1.5.1.** Considérons le système intégro-différentiel linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} t v_1(t) + \int_0^t v_2(\tau) d\tau = 0, \\ t v_1(t) + \int_0^t (v_2(\tau) - \tau v_1(\tau)) d\tau = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Écrivons alors le système (1.1) sous la forme  $R_1(v_1(t)) + R_2(v_2(t)) = 0$  avec

$$R_1 = \begin{pmatrix} t \\ t - I t \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}.$$

Grâce aux résultats de ce mémoire, nous calculons

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R_2) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot S_2), \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

En éliminant la variable  $v_2$ , c'est-à-dire en multipliant  $R_1 v_1(t) + R_2 v_2(t) = 0$  par  $S_2$  à gauche, nous obtenons

$$S_2 R_1(v_1(t)) = \int_0^t \tau v_1(\tau) d\tau = 0,$$

qui est une équation en la seule inconnue  $v_1$ .

Un autre argument naturel en faveur du calcul du noyau de matrices d'opérateurs intégro-différentiels repose sur l'analyse des *conditions de compatibilité* pour un système linéaire inhomogène. Considérons un système de la forme  $R(y) = z$ , où  $R$  est une matrice d'opérateurs intégro-différentiels,  $y$  est l'inconnue et  $z$  une donnée fixée (par exemple un vecteur polynomial). Supposons que  $L$  soit une matrice telle que le noyau de  $R$  soit donné par l'image de  $L$ , c'est-à-dire  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot L)$ , ce qui implique en particulier que  $L R = 0$ . En appliquant  $L$  à l'équation  $R(y) = z$ , on obtient alors  $(L R)(y) = L(z)$ , d'où la condition nécessaire  $L(z) = 0$ . Les équations  $L(z) = 0$  sont appelées les conditions de compatibilité du système. Illustrons à présent cet argument à l'aide d'un exemple.

**Exemple 1.5.2.** Calculons les conditions de compatibilité du système intégral linéaire inhomogène

$$\begin{cases} t v_1(t) + \int_0^t v_2(\tau) d\tau = w_1(t), \\ t v_1(t) + \int_0^t (v_2(\tau) - \tau v_1(\tau)) d\tau = w_2(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour ce faire, calculons  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , où

$$R = \begin{pmatrix} t & I \\ t - It & I \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_1^{2 \times 2}.$$

Grâce aux résultats de ce mémoire, nous calculons

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.S), \quad S = \begin{pmatrix} e \partial & -e \partial \\ e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système (1.2) admet les conditions de compatibilité suivantes :

$$w'_1(0) - w'_2(0) = 0, \quad w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 0.$$

Pour la preuve de la cohérence, nous avons eu besoin de déterminer les solutions polynomiales d'un système intégral-différentiel inhomogène rectangulaire. Plus précisément, étant donné  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^{l \times 1}$ , on cherche  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  tel que  $P(v) = w$ . À notre connaissance, dans le cadre différentiel, des algorithmes ont été développés pour le traitement des connexions et des modules holonomes (voir [25, 61]). En revanche, le cas général des systèmes intégral-différentiels rectangulaires, homogènes ou inhomogènes, est nouveau. Ce résultat fait donc partie des apports de cette thèse et est un résultat intéressant dans le domaine du calcul formel indépendamment de son utilisation dans la preuve de la propriété de cohérence de  $\mathbb{I}_1$ . Dans la preuve de ce résultat, nous pourrions voir que la résolution du système d'équations homogène  $P(v) = 0$  est étroitement lié au calcul des générateurs du module  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  où  $R = \theta(P)$  et  $\theta$  est l'involution de  $\mathbb{I}_1$ .

**Exemple 1.5.3.** On considère le système d'équations integro-différentielles de Volterra étudié dans [173, Exemple 10.17, p. 335] donné par

$$\begin{cases} u'(t) = 2t^2 + \int_0^t ((t-x)u(x) + (t-x)v(x)) dx, & u(0) = 1, \\ v'(t) = -3t^2 - \frac{1}{10}t^5 + \int_0^t ((t-x)u(x) - (t-x)v(x)) dx, & v(0) = 1, \\ u(0) = 1, & v(0) = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour calculer les solutions polynomiales de ce système, nous appliquons les résultats de ce mémoire aux matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} \partial - tI + It & -tI + It \\ e & 0 \\ -tI + It & \partial + tI - It \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 1 \\ -3t^2 - \frac{1}{10}t^5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet) = \left\{ \begin{pmatrix} t^3 + 1 \\ -t^3 + 1 \end{pmatrix} \right\},$$

et on retrouve ainsi le résultat obtenu dans [173, Exemple 10.17, p. 335] en utilisant la transformée de Laplace.

Au-delà du calcul de noyaux de matrices à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ , nous avons également caractérisé les conditions d'existence d'un inverse à gauche ou à droite pour une matrice donnée, et proposé une méthode effective pour le calcul de ces inverses lorsqu'ils existent. Cela permet notamment de résoudre de manière constructive tout système matriciel de la forme  $AX = B$ , où  $A$  et  $B$  sont des matrices à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ . Cela montre que  $\mathbb{I}_1$  est un anneau de Cramer effectif (ou un *computational ring* au sens de Barakat et Lange-Hegermann [8, 132], ou encore un anneau *fortement discret* au sens de Mines-Richman-Ruitenburg [123]). Ainsi, ce mémoire contient des algorithmes de factorisation et de calcul d'inverse lorsque cela est possible. Ces algorithmes sont les briques élémentaires pour rendre les méthodes d'algèbre homologique effectivement calculables [8, 41]. En particulier, le futur interfaçage du package `Bavula` avec `CapAndHomalg` [9] nous permettra d'accéder aux méthodes d'algèbre homologique développées dans `CapAndHomalg` [8].

## 1.6 Plan du mémoire chapitre par chapitre

Le chapitre 1 donne une brève introduction aux équations intégrales et intégro-différentielles, illustrée par quelques exemples classiques. Il présente ensuite plusieurs méthodes de résolution, tant analytiques que numériques, telles que les méthodes de collocation, de perturbation, etc. Il présente ensuite les différentes approches algébriques pour l'étude des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, ainsi que le point de vue du calcul formel, en particulier la manipulation et l'élimination symboliques. Il aborde également les travaux visant à étendre ces cadres théoriques au cas des systèmes d'équations intégro-différentielles. Enfin, il expose les contributions de ce mémoire de thèse et se conclut par un aperçu du plan détaillé, chapitre par chapitre.

Dans le chapitre 2, nous introduisons les notations nécessaires pour formuler les objets algébriques centraux du mémoire. Nous définissons d'abord l'algèbre de Weyl en une variable, notée  $\mathbb{A}_1$ , ainsi que l'algèbre des opérateurs intégro-différentielle à coefficients polynomiaux, notée  $\mathbb{I}_1$ . Nous introduisons aussi l'unique idéal bilatère de  $\mathbb{I}_1$ , noté  $\langle e \rangle$ , engendré par l'opérateur d'évaluation, ainsi que l'algèbre quotient  $\mathbb{B}_1 := \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$  isomorphe à un anneau de polynômes de Laurent non commutatif. La troisième section est consacrée à une brève introduction à la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules et à l'énoncé du théorème de Malgrange. Nous poursuivons par quelques rappels sur la théorie des modules, indispensables pour la suite. Enfin, la dernière section étudie le caractère effectif de l'algèbre de Weyl  $\mathbb{A}_1$  et du quotient  $\mathbb{B}_1$ , que nous chercherons à reproduire dans le cadre de  $\mathbb{I}_1$ .

Le chapitre 3 présente une méthode de calcul de l'annulateur  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  d'un opérateur  $d \in \mathbb{I}_1$ , dans le cas où  $d \in \langle e \rangle$ . Ce travail complète l'étude entamée dans [144] qui étudiait  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  dans le cas où  $d$  est un opérateur de Fredholm, c'est-à-dire  $d \notin \langle e \rangle$ . Nous généralisons ensuite cette approche au cas matriciel, ce qui permet de calculer explicitement  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  pour une matrice  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$  donnée. Ces résultats constituent une première avancée vers une théorie effective de la cohérence de  $\mathbb{I}_1$ .

Le chapitre 4 résout le problème du calcul des solutions polynomiales du système  $P(v) = w$ , où  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^{l \times 1}$  sont fixés et où l'on cherche  $v \in \mathbb{k}[t]^{m \times 1}$ . Pour cela, on étudie le module finiment présenté par la matrice  $P_N = \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$ , qu'on note  $\mathcal{P}$ . L'existence d'un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^N P \in \mathbb{A}_1$  exprime une idée intuitive : en dérivant suffisamment de fois un système intégro-différentiel, on finit par éliminer les intégrales et les évaluations et obtenir un système purement différentiel. On décompose ensuite ce module  $\mathcal{P}$  en sa partie de torsion et une partie sans torsion pour obtenir

$$\mathcal{P} = t(\mathcal{P}) \oplus \mathcal{P} / t(\mathcal{P}).$$

D'après le théorème de Malgrange, on obtient alors

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\mathcal{P}, \mathbb{k}[t]) \cong \text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(t(\mathcal{P}), \mathbb{k}[t]) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\mathcal{P} / t(\mathcal{P}), \mathbb{k}[t]).$$

Le module  $t(\mathcal{P})$  définit un module *holonome* dont la littérature fournit une méthode de calcul des solutions [25, 12, 126]. La résolution d'un système inhomogène de la forme  $\tilde{P}(v) = w$ , avec  $\tilde{P}$  à coefficients dans  $\langle e \rangle$ , permet alors de calculer les solutions du système intégro-différentiel d'origine. Comme énoncé précédemment, les cas généraux d'un système intégro-différentiel rectangulaire homogène et inhomogène sont nouveaux.

Le chapitre 5 contient une preuve constructive de la cohérence de l'anneau  $\mathbb{I}_1$ , une preuve dont on déduit un algorithme pour calculer, étant donné une matrice  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ , son noyau à gauche  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ . Comme l'anneau  $\mathbb{I}_1$  admet une involution, il nous est alors possible de calculer le noyau à droite  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ . Cet algorithme repose sur le résultat du chapitre 4 qui calcule les solutions polynomiales d'un système intégro-différentiel rectangulaire inhomogène. Ce résultat est le résultat central de cette thèse et rend constructif le théorème énoncé dans [16] démontrant que  $\mathbb{I}_1$  est un anneau cohérent.

Enfin, dans le chapitre 6, nous utilisons le résultat central du chapitre 5 pour résoudre des systèmes linéaires de la forme  $XA = B$  ou  $AX = B$  avec  $A, B, X$  des matrices à coefficients dans  $\mathcal{A} = \mathbb{I}_1$ . Ce problème passe par la résolution des problèmes de factorisation, de calcul d'un inverse à gauche ou à droite. Ce chapitre montre que  $\mathbb{I}_1$  est un anneau de Cramer effectif (ou un *computational ring* au sens de Barakat et Lange-Hegermann [8, 132], ou encore un anneau *fortement discret* au sens de Mines-Richman-Ruitenburt [123]). Ainsi, ce chapitre contient des algorithmes de factorisation et de calcul d'inverse lorsque cela est possible, ce qui représente les briques élémentaires effectives pour rendre les méthodes d'algèbre homologique effectivement calculables [8].

## Chapitre 2

# Les anneaux d'opérateurs différentiels et intégro-différentiels

Ce chapitre motive et présente les anneaux d'opérateurs comme un outil pour l'étude de systèmes linéaires. Les deux premières sections de ce chapitre présentent chacune un anneau d'opérateurs. Le premier est l'*algèbre de Weyl* en une variable, le second est l'anneau des opérateurs intégro-différentiels ordinaires. Ce dernier est l'objet d'étude principal de ce mémoire. Dans ces deux premières sections, on définit leur construction et leurs premières propriétés. La troisième section de ce chapitre est une introduction à l'analyse algébrique pour l'étude de systèmes linéaires. Elle introduit la notion de matrice de présentation d'un système à coefficients dans un anneau d'opérateurs  $\mathcal{A}$ , généralement non commutatif. La quatrième et dernière section de ce chapitre aborde les aspects effectifs et calculatoires de l'algèbre de Weyl  $\mathbb{A}_1$ , introduite en première section, et de l'algèbre quotient  $\mathbb{B}_1$ , introduite en deuxième section.

### 2.1 L'anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux

Soient  $\mathbb{k}$  un corps de caractéristique zéro calculable (par exemple,  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ) et  $\mathbb{k}[t]$  l'anneau des polynômes en la variable  $t$  à coefficients dans  $\mathbb{k}$ . On considère la  $\mathbb{k}$ -algèbre  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  des  $\mathbb{k}$ -endomorphismes de  $\mathbb{k}[t]$ , autrement dit les applications  $\mathbb{k}$ -linéaires de  $\mathbb{k}[t]$  dans lui-même. Par linéarité, un élément de  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  est entièrement déterminé par son action sur la base monomiale  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ainsi, les deux endomorphismes d'algèbre

$$\begin{aligned} m_t : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] & \partial : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] \\ t^n &\longmapsto t^{n+1}, & t^n &\longmapsto n t^{n-1}, \end{aligned} \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

définissent les endomorphismes de  $\mathbb{k}[t]$  suivants :

$$\begin{aligned} m_t : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] & \partial : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] \\ p &\longmapsto t p(t), & p(t) &\longmapsto p'(t) := \frac{dp}{dt}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

**Définition 2.1.1.** On notera  $\mathbb{A}_1(\mathbb{k})$  (ou plus simplement  $\mathbb{A}_1$  lorsqu'il n'y aura aucune confusion sur le corps de base  $\mathbb{k}$ ), la sous- $\mathbb{k}$ -algèbre de  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  engendrée par les endomorphismes  $m_t$  et  $\partial$ . Il est sous-entendu que la loi multiplicative de  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  est la loi de composition entre endomorphismes. L'algèbre  $\mathbb{A}_1$  est appelée *première algèbre de Weyl*.

**Remarque 2.1.1.** De manière analogue, on peut définir  $\mathbb{A}_n$ , l'algèbre de Weyl à  $n$  variables pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Notons  $1$  l'endomorphisme identité de  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$ . Nous avons,

$$\forall p(t) \in \mathbb{k}[t], (\partial \circ m_t)(p(t)) = \partial(m_t(p(t))) = \frac{d}{dt}(t p(t)) = t \frac{dp}{dt} + p(t) = (m_t \circ \partial + 1)(p(t)).$$

Ainsi, dans  $\mathbb{A}_1$ , on a montré l'identité suivante :  $\partial \circ m_t = m_t \circ \partial + 1$ . Pour des soucis de simplification et de clarté, on omettra le symbole  $\circ$  de composition et on notera simplement  $t$  pour désigner  $m_t$ . On écrira alors dans la suite de ce mémoire

$$\partial t = t \partial + 1,$$

ce qui correspond à la *règle de Leibniz* pour la dérivation. Cette règle de commutation est la raison d'être de la proposition suivante.

**Proposition 2.1.1** (Forme normale dans  $\mathbb{A}_1$ ). Voir, par exemple, [73, Prop. 2.1] ou [25].

Tout élément  $a \in \mathbb{A}_1$  peut être écrit de façon unique comme une somme finie de la forme :

$$a = \sum_{(i,j) \in [0,p] \times [0,q]} a_{ij} t^i \partial^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{k}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

On appelle cette somme finie la forme normale de  $a$ . De plus, s'il existe  $i$  tel que  $a_{iq} \neq 0$  et  $j$  tel que  $a_{pj} \neq 0$ , alors, l'entier  $q$  est appelé ordre de  $a$  et l'entier  $p$  son degré en  $t$ .

**Exemple 2.1.1.** L'opérateur  $\partial^2 t^2$  n'est pas sous forme normale. En utilisant la règle de Leibniz  $\partial t = t \partial + 1$ , nous avons :

$$\partial^2 t^2 = \partial(\partial t^2) = \partial(t^2 \partial + 2t) = (\partial t^2) \partial + 2(t \partial + 1) = (t^2 \partial + 2t) \partial + 2(t \partial + 1) = t^2 \partial^2 + 4t \partial + 2.$$

Ainsi, la forme normale de l'opérateur  $\partial^2 t^2$  est  $t^2 \partial^2 + 4t \partial + 2$ , son ordre est 2 et son degré 2.

**Exemple 2.1.2.** Soit  $h := \partial t = t \partial + 1 \in \mathbb{A}_1$ . Alors,  $\partial h = t \partial^2 + 2 \partial = (t \partial + 2) \partial = (h + 1) \partial$ . Ainsi, on obtient l'égalité  $\partial h = (h + 1) \partial$ , qui sera utilisée par la suite.

L'algèbre  $\mathbb{A}_1$  est bien connue et étudiée par les mathématiciens pour l'étude des équations différentielles à coefficients polynomiaux. En mécanique quantique, l'égalité de Heisenberg affirme que  $\partial x = x \partial + i \hbar$ , où  $x$  est l'opérateur « position »,  $\partial$  l'opérateur « quantité de mouvement »,  $\hbar$  est la constante de Planck réduite et  $i$  le nombre imaginaire vérifiant  $i^2 = -1$ . L'algèbre  $\mathbb{A}_1$  a été introduite par Weyl pour l'étude de la mécanique quantique.

**Lemme 2.1.1.** Soit  $a = \sum_{i=1}^n a_i(t) \partial^i \in \mathbb{A}_1$ . Notons  $\frac{\partial a}{\partial t} := \sum_{i=0}^n a'_i(t) \partial^i$  et  $\frac{\partial a}{\partial \partial} = \sum_{i=0}^n a_i(t) i \partial^{i-1}$  avec  $a'(t) \in \mathbb{k}[t]$  le polynôme dérivé de  $a_i(t) \in \mathbb{k}[t]$ .

Nous avons alors

$$[\partial, a] = \partial a - a \partial = \frac{\partial a}{\partial t}, \quad [a, t] = a t - t a = \frac{\partial a}{\partial \partial},$$

où  $[a_1, a_2]$  est le crochet de commutation entre deux opérateurs défini par  $[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1$ .

*Démonstration.* Soit  $a = \sum_{i=1}^n a_i(t) \partial^i \in \mathbb{A}_1$ .

◇ Montrons la première égalité. Nous avons :

$$\partial a = \sum_{i=0}^n \partial a_i(t) \partial^i = \sum_{i=0}^n (a_i(t) \partial + a'_i(t)) \partial^i = \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i(t) \partial^{i+1}}_{= a \partial} + \underbrace{\sum_{i=0}^n a'_i(t) \partial^i}_{= \frac{\partial a}{\partial t}}.$$

Ainsi, on a bien  $[\partial, a] = \partial a - a \partial = \frac{\partial a}{\partial t}$ .

◇ Pour montrer la deuxième égalité, il nous faut d'abord prouver l'identité  $\partial^n t = t \partial^n + n \partial^{n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $p \in \mathbb{k}[t]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \partial^n t(p(t)) &= \partial^n (t p(t)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{(k)}(t) t^{(n-k)} \\ &= \binom{n}{n} p^{(n)}(t) t + \binom{n}{n-1} p^{(n-1)}(t) \\ &= t \partial^n (p(t)) + n \partial^{n-1} (p(t)) \\ &= (t \partial^n + n \partial^{n-1})(p(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien  $\partial^n t = t \partial^n + n \partial^{n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Montrons maintenant que  $[a, t] = at - ta = \frac{\partial a}{\partial \partial}$ . En utilisant  $\partial^i t = t \partial^i + i \partial^{i-1}$ , nous avons :

$$at = \sum_{i=0}^n a_i(t) \partial^i t = \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i(t) t \partial^i}_{=ta} + \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i(t) i \partial^{i-1}}_{=\frac{\partial a}{\partial \partial}}.$$

Ainsi, nous avons montré l'égalité  $[a, t] = at - ta = \frac{\partial a}{\partial \partial}$ . □

**Théorème 2.1.1.** ([73, Théorème 2.1, p. 16]). *L'anneau  $\mathbb{A}_1$  est intègre, simple et noethérien. Ainsi,  $\mathbb{A}_1$  n'a pas de diviseur de zéro, ni d'idéal bilatère non trivial et tous ses idéaux (à droite ou à gauche) sont de type fini.*

*Démonstration.* Donnons un schéma de preuve pour montrer que  $\mathbb{A}_1$  est simple. Pour une preuve détaillée de ce théorème voir, par exemple, [73, Chapitre 3]

Un opérateur  $a \in \mathbb{A}_1$  de degré  $\alpha$  en  $t$  et de degré  $\beta$  en  $\partial$  est un opérateur de  $\mathbb{A}_1$  tel que la plus grande puissance de  $t$  (respectivement de  $\partial$ ) apparaissant dans sa forme normale est  $t^\alpha$  (respectivement  $\partial^\beta$ ). On dit alors que le degré de  $a$  est la longueur du multi-indice  $(\alpha, \beta)$ , c'est-à-dire,  $\alpha + \beta$ .

Soit  $\mathcal{I}$  un idéal bilatère non nul de  $\mathbb{A}_1$ . Si  $\mathcal{I}$  a un élément de degré 0 alors  $\mathcal{I}$  contient une constante non nulle et donc  $\mathcal{I} = \mathbb{A}_1$  et la preuve est terminée.

On suppose alors par l'absurde que  $\mathcal{I}$  contient un opérateur différentiel  $a$  de degré  $k > 0$  minimal. On note  $(\alpha, \beta)$  le multi-indice de  $a$ .

Si  $\alpha \neq 0$ , alors le crochet de commutation de  $a$  avec  $\partial$ , c'est-à-dire,  $[\partial, a] = \partial a - a \partial \in \mathcal{I}$ . L'élément  $[\partial, a]$  appartient alors à  $\mathcal{I}$ , car  $\mathcal{I}$  est un idéal. Par ailleurs,  $[\partial, a] = \frac{\partial a}{\partial t}$  où  $\frac{\partial a}{\partial t} = \sum_{i=0}^{\beta} a'_i(t) \partial^i$  avec  $a = \sum_{i=0}^{\beta} a_i(t) \partial^i$ , autrement dit la dérivée formelle de  $a$  par rapport à  $t$ . Voir le lemme 2.1.1. De plus, le degré en  $t$  de  $[\partial, a]$  est strictement inférieur à  $\alpha$ . Cela contredit la minimalité de  $k$ , donc  $\alpha = 0$ .

Si  $\beta \neq 0$ , la stratégie consiste à regarder le crochet de commutation  $[a', t] = a' t - t a' = \frac{\partial a'}{\partial \partial} \in \mathcal{I}$ , où  $\frac{\partial a'}{\partial \partial} = \sum_{i=0}^{\beta} b_i(t) i \partial^{i-1}$  si  $a' = \sum_{i=0}^{\beta} b_i(t) \partial^i$ . De même,  $\frac{\partial a'}{\partial \partial}$  représente la dérivée formelle de  $a'$  par rapport à  $\partial$  et a un degré en  $\partial$  strictement inférieur à celui  $a'$ . Voir le lemme 2.1.1. Cela contredit de nouveau la minimalité de  $k$ . Ainsi,  $\beta = 0$ .

On en conclut que tout idéal non nul  $\mathcal{I}$  de  $\mathbb{A}_1$  contient une constante non nulle et donc  $\mathcal{I} = \mathbb{A}_1$ . Ainsi,  $\mathbb{A}_1$  est simple. □

**Remarque 2.1.2.** Cette preuve peut être adaptée au cas de plusieurs variables et permet de montrer que  $\mathbb{A}_n$  est simple pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Voir, par exemple, [73, Théorème 2.1, p. 16.].

**Définition 2.1.2.** L'anneau  $\mathbb{k}[t]$  est muni d'une structure de  $\mathbb{A}_1$ -module donnée par l'action

$$\forall a \in \mathbb{A}_1, \forall p \in \mathbb{k}[t], \quad a \cdot p := a(p),$$

où  $a(p)$  est le polynôme obtenu en appliquant l'endomorphisme  $a$  à  $p$  en utilisant (2.1).

**Définition 2.1.3.** Soit  $p \in \mathbb{k}[t]$  un polynôme, on définit son *annulateur à gauche* par :

$$\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot p) = \{a \in \mathbb{A}_1 \mid a \cdot p = a(p) = 0\}.$$

Plus précisément,  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot p)$  est l'idéal à gauche de  $\mathbb{A}_1$  composé de tous les opérateurs différentiels qui annulent  $p$ , c'est-à-dire, dont  $p$  est solution polynomiale de l'équation différentielle ordinaire  $a(p) = 0$ .

**Proposition 2.1.2.** ([50, Section 3.1]). Soit  $p(t) = \sum_{k=0}^m p_k t^k \in \mathbb{k}[t]$ , avec  $p_m \neq 0$ , c'est-à-dire, le polynôme  $p$  est exactement de degré  $m$ . Alors  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(p)$  est un  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche finiment engendré par la famille d'opérateurs différentiels

$$\{\partial^{m+1}\} \cup \left\{ -p^{(m)}(t) \partial^i + p^{(i)}(t) \partial^m, i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket \right\}.$$

*Démonstration.* Clairement  $\partial^r(p(t)) = 0$  pour  $r \geq m+1$ . On cherche maintenant les relations  $\mathbb{k}[t]$ -linéaires entre les dérivées successives de  $p$ , c'est-à-dire, des éléments  $\lambda_0, \dots, \lambda_{m+1} \in \mathbb{k}[t]$  tels que  $\lambda_0 p(t) + \dots + \lambda_{m+1} p^{(m+1)}(t) = 0$ . Posons  $L$  le vecteur de  $\mathbb{k}[t]^{(m+2) \times 1}$  suivant :

$$L := \begin{pmatrix} p(t) \\ p'(t) \\ \vdots \\ p^{(m+1)}(t) \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse alors au calcul de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(L) = \{\lambda \in \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} \mid \lambda L = 0\}$ . De manière équivalente, on cherche les conditions de compatibilités du système linéaire inhomogène  $L\eta = \zeta$ , avec  $\zeta = (\zeta_0 \dots \zeta_{m+1})^T \in \mathbb{k}^{(m+2) \times 1}$  et  $\eta \in \mathbb{k}$ . Nous pouvons alors écrire :

$$L\eta = \zeta \iff \begin{cases} p(t)\eta = \zeta_0 \\ p'(t)\eta = \zeta_1 \\ \vdots \\ p^{(m)}(t)\eta = \zeta_m \\ p^{(m+1)}(t)\eta = \zeta_{m+1}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Exprimons maintenant les dérivées successives de  $p$  en fonction des coefficients de  $p$ . On pose  $p(t) = \sum_{k=0}^m p_k t^k$ . Ainsi, en dérivant successivement, nous avons, pour  $j = 0, \dots, m+1$  :

$$p^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^m p_k \frac{k!}{(k-j)!} t^{k-j} = \sum_{u=0}^{m-j} \frac{(u+j)!}{u!} p_{u+j} t^u.$$

Décalons les indices en posant  $j = m-v$  pour  $v$  entre 0 et  $m$ . Nous obtenons ainsi :

$$p^{(m-v)}(t) = \sum_{u=0}^v \frac{(u+m-v)!}{u!} p_{u+m-v} t^u = \sum_{u=0}^v p'_{u+m-v} t^u,$$

avec  $p'_{u+m-v} = \frac{(u+m-v)!}{u!} p_{u+m-v}$ . Substituons maintenant ces égalités dans le système (2.2) :

$$\begin{cases} p(t)\eta = \zeta_0 \\ \vdots \\ p^{(m-1)}(t)\eta = (p'_{m-1} + p'_m t)\eta = \zeta_{m-1} \\ p^{(m)}(t)\eta = p'_m \eta = \zeta_m \\ p^{(m+1)}(t)\eta = 0 = \zeta_{m+1}. \end{cases}$$

Comme  $p$  est de degré  $m$ , on a  $p^{(m+1)}(t) = 0$  et  $p^{(m)}(t) \neq 0$ .

Ainsi,  $p'_m \neq 0$  et on peut extraire  $\eta$  de l'avant-dernière égalité et écrire  $\eta = \frac{\zeta_m}{p'_m}$ . En substituant la valeur de  $\eta$  dans les égalités précédentes, et en remarquant que  $p^{(m)}(t) = p'_m$ , nous avons :

$$p^{(i)}(t) \frac{\zeta_m}{p'_m} = \zeta_i, \implies p^{(i)}(t) \zeta_m - p^{(m)}(t) \zeta_i = 0, \quad i = 0 \dots m-1.$$

Notons maintenant  $M$  la matrice de  $\mathbb{k}[t]^{(m+1) \times (m+2)}$  suivante :

$$M := \begin{pmatrix} -p^{(m)}(t) & \dots & p(t) & 0 \\ 0 & -p^{(m)}(t) & -p'(t) & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & -p^{(m)}(t) & -p^{(m-1)}(t) & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice définit le noyau de  $L$ . Plus précisément, on a  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot L) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot M)$ . En particulier, nous avons  $M L = 0$ . Par ailleurs,

$$L = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \partial \\ \vdots \\ \partial^{m+1} \end{pmatrix}}_{:= J} \cdot p,$$

où  $\cdot$  est l'action de  $\mathbb{A}_1$  sur  $\mathbb{k}[t]$ . Ainsi,  $M L = 0$  implique  $M L = M \cdot (J \cdot p) = (M J) \cdot p = 0$ . Notons  $G := M J$  et  $G_0, \dots, G_m$  ses lignes. Nous avons alors :

$$G = \begin{pmatrix} -p^{(m)}(t) + p(t) \partial^m \\ -p^{(m)}(t) \partial + p'(t) \partial^m \\ \vdots \\ -p^{(m)}(t) \partial^{m-1} + p^{(m-1)}(t) \partial^m \\ \partial^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{m-1} \\ G_m \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les lignes  $G_i$  de la matrice  $M J$  génèrent  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot p)$ , autrement dit,  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot p) = \sum_{i=0}^m \mathbb{A}_1 G_i$ .  $\square$

**Proposition 2.1.3.** ([50, Section 3.1]). Soit  $p(t) = \sum_{k=0}^m p_k t^k \in \mathbb{k}[t]$ , avec  $p_m \neq 0$ , c'est-à-dire, le polynôme  $p$  est exactement de degré  $m$ . Notons  $Q_1 = p(t) \partial^m - p^{(m)}(t)$  et  $Q_2 = \partial^{m+1}$ , où  $p^{(m)}(t)$  désigne la  $m$ -ème dérivée de  $p$  par rapport à  $t$ .

Alors, l'idéal à gauche  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot p) = \{a \in \mathbb{A}_1 \mid a \cdot p = a(p) = 0\}$  satisfait

$$\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot p) = \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2.$$

*Démonstration.* Reprenons la notation  $G_i$  pour  $i = 0, \dots, m$  de la proposition précédente 2.1.2. De plus, notons  $Q_1 = p(t) \partial^m - p^{(m)}(t) = -G_0$  et  $Q_2 = \partial^{m+1} = G_m$ . Montrons que pour  $i = 0, \dots, m-1$ , on a  $G_i \in \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$ . Autrement dit, que les générateurs  $Q_1$  et  $Q_2$  suffisent à engendrer  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot p)$ .

Procédons par récurrence.

◇ Pour  $i = 0$ , on a  $G_0 = -Q_1 \in \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$ .

◇ Supposons que  $G_i \in \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$  pour un  $i \in \llbracket 0, m-2 \rrbracket$  fixé. Montrons que  $G_{i+1} \in \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \partial G_i - p^{(i)}(t) Q_2 &= \partial \left( -p^{(m)}(t) \partial^i + p^{(i)}(t) \partial^m \right) - p^{(i)}(t) \partial^{m+1} \\ &= \left( -p^{(m)}(t) \partial - p^{(m+1)}(t) \right) \partial^i + \left( p^{(i)}(t) \partial + p^{(i+1)}(t) \right) \partial^m - p^{(i)}(t) \partial^{m+1} \\ &= -p^{(m)}(t) \partial^{i+1} + p^{(i)}(t) \partial^{m+1} + p^{(i+1)}(t) \partial^m - p^{(i)}(t) \partial^{m+1} \\ &= -p^{(m)}(t) \partial^{i+1} + p^{(i+1)}(t) \partial^m \\ &= G_{i+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons  $G_{i+1} \in \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$  et par récurrence  $G_i \in \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$  pour  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ .

De plus, nous avons  $G_m = Q_2 \in \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$ .  $\square$

**Exemple 2.1.3.** Avec les notations précédentes, prenons  $p(t) = t^3 + 2t^2 - 1$ . Alors, on a  $Q_1 = (t^3 + 2t^2 - 1) \partial^3 - 6$  et  $Q_2 = \partial^4$ . On vérifie bien que  $Q_1(p) = (t^3 + 2t^2 - 1) \partial^3(p(t)) - 6(p(t)) = (t^3 + 2t^2 - 1) 6 - 6(t^3 + 2t^2 - 1) = 0$  et  $Q_2(p(t)) = \partial^4(p(t)) = p^{(4)}(t) = 0$ .

**Remarque 2.1.3.** Un résultat dû à Stafford énonce que tout idéal à gauche ou à droite de  $\mathbb{A}_1$  peut être engendré par seulement deux éléments. Pour une preuve de ce résultat, voir [170]. La proposition 2.1.3 rend effectif ce résultat pour les idéaux annulateurs  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot p)$ .

## 2.2 L'anneau des opérateurs intégro-différentiels à coefficients polynomiaux

### 2.2.1 Définition de $\mathbb{I}_1$

De manière similaire à  $\mathbb{A}_1$  défini dans la section 2.1, considérons l'anneau des endomorphismes  $\mathbb{k}$ -linéaires  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  de  $\mathbb{k}[t]$  et les applications  $\mathbb{k}$ -linéaires définies sur la base  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{k}[t]$  suivantes :

$$\begin{aligned} m_t : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & \partial : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & I : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] \\ t^n &\longmapsto t^{n+1}, & t^n &\longmapsto n t^{n-1}, & t^n &\longmapsto \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{aligned} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}.$$

De manière analogue à  $\mathbb{A}_1$ , ces applications linéaires définissent respectivement les endomorphismes de  $\mathbb{k}[t]$  suivants :

$$\begin{aligned} m_t : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & \partial : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & I : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] \\ p(t) &\longmapsto t p(t), & p(t) &\longmapsto p'(t) := \frac{dp}{dt}, & p(t) &\longmapsto I(p(t)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $I(p(t))$  désigne le polynôme  $\int_0^t p(\tau) d\tau$ .

**Définition 2.2.1.** ([16]) On notera  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  (ou plus simplement  $\mathbb{I}_1$  lorsqu'il n'y aura aucune confusion possible sur le corps de base  $\mathbb{k}$ ), la sous- $\mathbb{k}$ -algèbre de  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  engendrée par les endomorphismes  $m_t$ ,  $\partial$  et  $I$ . Il est sous-entendu que la loi multiplicative de  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  est la loi de composition entre endomorphismes. L'algèbre  $\mathbb{I}_1$  est appelée *l'algèbre des opérateurs intégro-différentiels ordinaires*.

**Remarque 2.2.1.** Tout comme pour  $\mathbb{A}_1$ , pour simplifier les notations on omettra le symbole  $\circ$  de composition, on notera 1 l'identité de  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  et  $t$  plutôt que  $m_t$ .

Le *théorème fondamental du calcul intégral* peut alors s'écrire  $\partial I = 1$ . De plus, on peut voir que pour tout  $p \in \mathbb{k}[t]$ ,  $(1 - I\partial)(p) = p(t_0)$ , ce qui montre que  $\mathbb{I}_1$  contient l'évaluation en  $t_0$ , notée  $e$ , définie par :

$$\begin{aligned} e : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] \\ p &\longmapsto p(t_0). \end{aligned}$$

Il est à noter que  $e$  est multiplicative, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{k}[t], \quad e(p_1 p_2) = (p_1 p_2)(t_0) = p_1(t_0) p_2(t_0) = e(p_1) e(p_2).$$

Dans ce qui suit, nous fixerons simplement  $t_0$  à 0. Néanmoins, l'ensemble des résultats de ce mémoire sont vrais pour  $t_0 \neq 0$ ,  $t_0 \in \mathbb{k}$ .

**Remarque 2.2.2.** Nous avons clairement l'inclusion  $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{I}_1$ . Cependant, contrairement à  $\mathbb{A}_1$ , remarquons que  $\mathbb{I}_1$  a des diviseurs de zéro non-nuls, puisque nous avons, par exemple,  $et = 0$  et  $eI = 0$  dans  $\mathbb{I}_1$ . En effet, pour tout  $p \in \mathbb{k}[t]$ , nous avons :

$$et(p(t)) = e(tp(t)) = (0 \times p(0)) = 0, \quad eI(p(t)) = e\left(\int_0^t p(\tau) d\tau\right) = \int_0^0 p(\tau) d\tau = 0.$$

Pour tout  $p \in \mathbb{k}[t]$ , nous pouvons vérifier que nous avons les identités fondamentales suivantes dans  $\mathbb{I}_1$  :

$$\partial p = p\partial + p', \quad \partial I = 1, \quad I\partial = 1 - e, \quad ep = e(p)e = p(0)e. \quad (2.4)$$

**Proposition 2.2.1.** ([139]) Pour  $p \in \mathbb{k}[t]$ , on a les identités dans  $\mathbb{I}_1$  suivantes :

$$e^2 = e, \quad \partial e = 0, \quad I p I = I(p)I - I I(p), \quad I p \partial = p - e(p)e - I p', \quad I p e = I(p)e.$$

*Démonstration.* Ces relations découlent des identités élémentaires (2.4). En effet, en utilisant  $I\partial = 1 - e$  et  $\partial I = 1$ , nous obtenons d'abord

$$e^2 = (1 - I\partial)(1 - I\partial) = 1 - I\partial - I\partial + I(\partial I)\partial = 1 - I\partial = e.$$

puis,

$$\partial e = \partial(1 - I\partial) = \partial - \partial = 0.$$

En utilisant  $p\partial = \partial p - p'$ ,  $I\partial = 1 - e$  et  $ep = e(p)e = p(0)e$ , nous obtenons

$$Ip\partial = I(\partial p - p') = (1 - e)p - Ip' = p - e(p)e - Ip'.$$

En considérant  $\partial q = q\partial + q'$  avec  $q = I(p)$  et  $\partial I = 1$ , nous avons  $\partial I(p) = I(p)\partial + \partial(I(p)) = I(p)\partial + p$ , ce qui donne finalement l'identité suivante :

$$IpI = I(\partial I(p) - I(p)\partial)I = I\partial I(p)I - II(p) = (1 - e)I(p)I - II(p) = I(p)I - II(p) = [I(p), I].$$

Enfin, en combinant  $e = 1 - I\partial$ ,  $IpI = I(p)I - II(p)$  et  $Iq\partial = q - e(q)e - Iq'$  avec  $q = I(p)$ , c'est-à-dire,  $II(p)\partial = II(p) - Ip$ , on trouve :

$$\begin{aligned} Ipe &= Ip(1 - I\partial) \\ &= Ip - IpI\partial \\ &= Ip - (I(p)I - II(p))\partial \\ &= Ip - I(p)(1 - e) + II(p)\partial \\ &= Ip - I(p) + I(p)e + (I(p) - Ip) \\ &= I(p)e. \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.2.3.** L'identité  $Ip\partial = p - e(p)e - Ip'$  correspond à l'intégration par parties.

En posant  $p = 1$  dans l'identité  $IpI = I(p)I - II(p)$  et en utilisant  $I(1) = t$ , nous obtenons  $I^2 = tI - It = [t, I]$ . De manière plus générale, nous pouvons démontrer la proposition suivante.

**Proposition 2.2.2.** L'opérateur  $I^n$  peut être exprimé comme un polynôme de degré 1 en  $I$ . Plus précisément, nous avons :

$$\forall n \geq 1, \quad I^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}. \quad (2.5)$$

*Démonstration.* Les opérateurs  $I^n$  et  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}$  sont deux opérateurs de  $\mathbb{I}_1$ , c'est-à-dire deux opérateurs linéaires déterminés de manière unique par leur valeur sur la base  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{k}[t]$ . Soit  $m$  un entier positif. D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} (t^m) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-1)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} (t^{n-1-k+m}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \frac{(-1)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} I (t^{n-1-k+m}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \frac{(-1)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \frac{t^{n-k+m}}{(n-k+m)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{n+m}}{k! (n-k+m)} \frac{(-1)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$I^n(t^m) = I^{n-1} \left( \frac{t^{m+1}}{m+1} \right) = I^{n-2} \left( \frac{1}{(m+1)} \frac{t^{m+2}}{(m+2)} \right) = \dots = \frac{t^{n+m}}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}.$$

Pour pouvoir conclure, nous devons prouver l'identité suivante :

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{k!(n-1-k)!(n-k+m)}.$$

Pour ce faire, calculons la décomposition en éléments simples de  $C(m) = \frac{1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}$ , c'est-à-dire écrivons  $C(m)$  comme  $\frac{\alpha_1}{m+1} + \dots + \frac{\alpha_n}{m+n}$ , où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ . Le  $k$ -ième coefficient  $\alpha_k$  de cette décomposition est donné par :

$$\alpha_k = [(m+k)C(m)]|_{m=-k} = \frac{1}{(-k+1)(-k+2)\dots(-1)(n-k)!} = \frac{1}{(-1)^{k-1}(k-1)!(n-k)!}.$$

Ainsi, nous avons  $\alpha_{n-k} = \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!k!}$ , ce qui prouve l'identité ci-dessus. Par conséquent, l'identité (2.5) est vérifiée.  $\square$

**Remarque 2.2.4.** L'égalité  $I^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}$  définit le produit de convolution suivant :

$$I^n(p)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} p(\tau) d\tau, \quad p \in \mathbb{k}[t].$$

Nous récapitulons les identités de  $\mathbb{I}_1$  dans le tableau suivant.

#### Identités de $\mathbb{I}_1$

$\partial I = 1$	1 <sup>re</sup> identité fondamentale
$I \partial = 1 - e$	2 <sup>e</sup> identité fondamentale
$\partial p = p \partial + \dot{p}$	Règle de Leibniz
$I p \partial = -I \partial p + p - e(p) e$	Intégration par parties
$I p I = I(p) I - I I(p)$	Double intégration
$e^2 = e, \quad \partial e = 0, \quad e p = e(p) e = p(t_0) e, \quad I p \langle e \rangle = I(p) e$	Identités avec l'évaluation
$I^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}$	Intégration multiple
$\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} e \partial^k + I^{n+1} \partial^{n+1} = 1$	Théorème de Taylor avec reste intégral *

\*Voir lemme 2.2.5 de la section 2.2.2.3.

**Théorème 2.2.1.** ([144, Théorème 1, p. 7], [16, 103]) *Tout opérateur  $d$  de  $\mathbb{I}_1$  peut être écrit de manière unique sous la forme :*

$$d = \sum_{i=0}^m a_i(t) \partial^i + \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j + \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k, \quad a_i, b_j, c_k \in \mathbb{k}[t], m, p, q \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

*Cette écriture est appelée la forme normale de  $d$ .*

Notons que `IntDiffOp` est un package `Maple` dédié aux calculs élémentaires sur  $\mathbb{I}_1$  [103]. En particulier, il calcule les formes normales des éléments de  $\mathbb{I}_1$ .

**Définition 2.2.2.** L'anneau  $\mathbb{k}[t]$  a une structure de  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche donnée par  $(d \cdot)(p) := d(p)$ , où  $d \in \mathbb{I}_1$ ,  $p \in \mathbb{k}[t]$ , et  $d(p)$  est le polynôme obtenu en appliquant l'endomorphisme  $d$  à  $p$  en utilisant (2.3).

**Définition 2.2.3.** De manière analogue à  $\mathbb{A}_1$ , on définit l'idéal à gauche de  $\mathbb{I}_1$  formé par tous les éléments de  $\mathbb{I}_1$  qui annulent le polynôme  $p$  par :

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p) = \{d \in \mathbb{I}_1 \mid d \cdot p = d(p) = 0\}.$$

En d'autres termes,  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p)$  est l'idéal à gauche de  $\mathbb{I}_1$  engendré par tous les opérateurs intégro-différentiels à coefficients polynomiaux qui annulent  $p$ .

## 2.2.2 Premières propriétés de $\mathbb{I}_1$

### 2.2.2.1 L'opérateur évaluation

**Définition 2.2.4.** On note  $\langle e \rangle$  l'idéal bilatère de  $\mathbb{I}_1$  engendré par l'opérateur d'évaluation  $e$ , c'est-à-dire,  $\langle e \rangle = \mathbb{I}_1 e \mathbb{I}_1$ .

**Lemme 2.2.1.** Soit  $P \in \mathbb{I}_1$  et  $d = \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k$ , où  $c_k \in \mathbb{k}[t]$  pour  $k = 0, \dots, q$ . Alors, nous avons

$$P d = \sum_{k=0}^q P(c_k(t)) e \partial^k,$$

où  $P(c_k(t))$  est le polynôme obtenu en appliquant  $P \in \text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  à  $c_k \in \mathbb{k}[t]$  en utilisant (2.3).

*Démonstration.* Soit  $P = \sum_{i=0}^m a_i(t) \partial^i + \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j + \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k \in \mathbb{I}_1$  avec  $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{k}[t]$ .

Notons  $P_1 = \sum_{i=0}^m a_i(t) \partial^i$ ,  $P_2 = \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j$  et  $P_3 = \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k$  tels que  $P = P_1 + P_2 + P_3$ . Par les propriétés de linéarité et d'associativité, il suffit de prouver que  $P_i p e = P_i(p) e$  pour tout  $p \in \mathbb{k}[t]$  et  $i = 1, 2, 3$ .

— Comme  $P_1 = \sum_{i=0}^m a_i(t) \partial^i$ , en utilisant l'identité  $\partial e = 0$ , nous avons :

$$P_1 p e = \sum_{i=0}^m a_i(t) \partial^i p e = \sum_{i=0}^m a_i(t) \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} p^{(s)} \partial^{i-s} e = \sum_{i=0}^m a_i(t) p^{(i)} e = P_1(p) e.$$

— Comme  $P_2 = \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j$ , en utilisant l'identité  $I a e = I(a) e$  pour tout  $a \in \mathbb{k}[t]$ , nous avons :

$$P_2 p e = \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j p e = \sum_{j=0}^p b_j(t) I(t^j p) e = P_2(p) e.$$

— Comme  $P_3 = \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k$ , en utilisant  $e^2 = e$  et  $e g = e(g) e$ , où  $g$  est un opérateur de  $\mathbb{I}_1$ , nous avons :

$$P_3 p e = \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k p e = \sum_{k=0}^q c_k(t) e (\partial^k p) e^2 = P_3(p) e.$$

Ainsi, nous avons  $P_i p e = P_i(p) e$  pour tout  $p \in \mathbb{k}[t]$  et  $i = 1, 2, 3$ , ce qui démontre que pour tout  $P \in \mathbb{I}_1$  et tout  $p \in \mathbb{k}[t]$ ,  $P p e = P(p) e$ .  $\square$

**Remarque 2.2.5.** En utilisant le lemme 2.2.1, nous avons :

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e) = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P p e = 0\} = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P(p) e = 0\} = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P(p) = 0\} = \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p).$$

L'égalité  $P(p) e = 0$  est équivalente à  $P(p) = 0$  car  $P(p) e$  est un élément de  $\mathbb{I}_1$  écrit sous sa forme normale puisque  $P(p) \in \mathbb{k}[t]$ .

**Proposition 2.2.3.** *Nous avons l'égalité suivante :*

$$\langle e \rangle = \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial] = \left\{ d \in \mathbb{I}_1 \mid d = \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k, c_k \in \mathbb{k}[t], q \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Démonstration.* Soit  $d = \sum_{i=0}^m a_i(t) \partial^i + \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j + \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k \in \mathbb{I}_1$ .

D'après la proposition 2.2.1, nous avons  $eI = 0$ ,  $\partial e = 0$ ,  $I t^j e = I(t^j) e$ ,  $e^2 = e$  et  $e p = p(0) e$  pour  $p \in \mathbb{k}[t]$ . Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} e d &= \sum_{i=0}^m e a_i(t) \partial^i + \sum_{j=0}^p e b_j(t) I t^j + \sum_{k=0}^q e c_k(t) e \partial^k \\ &= \sum_{i=0}^m a_i(0) e \partial^i + \sum_{j=0}^p b_j(0) e I t^j + \sum_{k=0}^q c_k(0) e^2 \partial^k \\ &= e \left( \sum_{i=0}^m a_i(0) \partial^i + \sum_{k=0}^q c_k(0) \partial^k \right) \in e \mathbb{k}[\partial]. \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 2.2.1, nous avons :

$$d e = d(1) e = \left( a_0(t) + \sum_{j=0}^p b_j(t) I(t^j) + c_0(t) \right) e \in \mathbb{k}[t] e.$$

Ainsi, nous obtenons  $\langle e \rangle = \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial]$ . □

**Lemme 2.2.2.** *Nous avons les deux assertions suivantes :*

1. Si  $d = \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k \in \langle e \rangle$  et  $N = 1 + \max_{i \in [0, q]} \deg_t c_k$ , alors  $\partial^N d = 0$ .
2. Si  $d = \sum_{i=0}^m a_i(t) \partial^i + \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j + \sum_{k=0}^q c_k(t) e \partial^k \notin \langle e \rangle$  et  $M = 1 + \max \{ \max_{k \in [0, q]} \deg_t c_k, \max_{j \in [0, p]} \deg_t b_j \}$ , alors  $\partial^M d \in \mathbb{A}_1$ .

*Démonstration.* Soit  $d = \sum_{i=0}^n c_i(t) e \partial^i \in \langle e \rangle$  et  $N = 1 + \max_{k \in [0, q]} \deg_t c_k$ . Alors d'après le lemme 2.2.1, on a  $\partial^N d = \sum_{i=0}^n \partial^N(c_i(t)) e \partial^i = \sum_{i=0}^n c_i^{(N)}(t) e \partial^i = 0$ , car pour tout  $k = 0, \dots, q$ ,  $c_k^{(N)}(t) = 0$ . Ceci prouve la première assertion.

Prouvons maintenant la deuxième assertion. Étant donné le premier résultat, on peut sans perte de généralités supposer que  $d = \sum_{i=0}^m a_i(t) \partial^i + \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j$ . De plus, comme  $\sum_{i=0}^m a_i(t) \partial^i \in \mathbb{A}_1$ , on peut uniquement s'intéresser au terme intégral. Ainsi, sans perte de généralités, on suppose  $d = \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j$ .

Calculons  $\partial d$ . On a  $\partial d = \sum_{j=0}^p (b_j(t) \partial + b'_j(t)) I t^j = \sum_{j=0}^p b_j(t) t^j + b'_j(t) I t^j$ , car  $\partial I = 1$ . Le terme  $\sum_{j=0}^p b_j(t) t^j$  étant dans  $\mathbb{A}_1$  on peut uniquement considérer le terme  $\sum_{j=0}^p b'_j(t) I t^j$ . On remarque que le degré du polynôme  $b'_j(t)$  est strictement inférieur à celui de  $b_j(t)$ . En prenant  $D_j = \deg_t b_j(t)$ , on a  $\partial^{D_j} b_j(t) I t^j = d' + b_0 I t^j$  avec  $d' \in \mathbb{k}[t]$  et  $b_0 \in \mathbb{k}$ . Ainsi, en prenant  $N_1 = 1 + \max_{k \in [0, q]} \deg_t c_k$  et  $N_2 = \max_{j \in [0, m]} \deg_t b_j + 1$ , nous obtenons  $\partial^{N_2} \sum_{j=0}^p b_j(t) I t^j \in \mathbb{A}_1$ , ce qui prouve le résultat voulu pour  $M = \max\{N_1, N_2\} + 1$ . □

**Exemple 2.2.1.** Considérons  $d = t^2 e + (t + 1) e \partial^2$ . Alors, nous avons  $c_0(t) = t^2$ ,  $c_1(t) = t + 1$  et  $N = 1 + 2 = 3$ . Ainsi, on peut vérifier  $\partial^3 d = 0$ .

Considérons maintenant  $d = t^2 \partial + \partial^2 + t I - I + t^2 I t + (t + 1) e$ . Alors, nous avons  $N_1 = 1 + 1 = 2$ ,  $b_0(t) = t$ ,  $b_1(t) = t^2$ ,  $N_2 = 2$  et  $M = 3$ . On peut vérifier que  $\partial^M d = 12t + (8t^2 + 3) \partial + (t^3 + t + 6) \partial^2 + 6t \partial^3 + t^2 \partial^4 + \partial^5 \in \mathbb{A}_1$ .

**Proposition 2.2.4.** *L'idéal  $\langle e \rangle = \left\{ d \in \mathbb{I}_1 \mid d = \sum_{j=0}^q c_j(t) e \partial^j, c_j \in \mathbb{k}[t], q \in \mathbb{N} \right\}$  est l'unique idéal bilatère non trivial de  $\mathbb{I}_1$ . Si  $d \in \langle e \rangle \subset \mathbb{I}_1$ , on dit que  $d$  est un opérateur d'évaluation.*

*Démonstration.* Supposons que  $\mathcal{J}$  soit un idéal bilatère de  $\mathbb{I}_1$ . Si  $\mathcal{J} \not\subseteq \langle e \rangle$ , alors il existe  $d \in \mathcal{J} \setminus \langle e \rangle$ . En utilisant le Point (2) du lemme 2.2.2, il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\partial^N d \in \mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$ . Or, comme  $\mathbb{A}_1$  est un anneau simple d'après le théorème 2.1.1 (voir aussi le théorème 1.3.5 de [121]), l'idéal bilatère non nul  $\mathbb{A}_1 \partial^N d \mathbb{A}_1$  de  $\mathbb{A}_1$  est égal à  $\mathbb{A}_1$ , c'est-à-dire qu'il existe  $q, r \in \mathbb{A}_1$  tels que  $q \partial^N d r = 1$ , ce qui montre que  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1$ .

Supposons maintenant que  $\mathcal{J} \subseteq \langle e \rangle$  et soit  $d = \sum_{k=0}^q c_k(t) \partial^k = \sum_{k=0}^q \sum_{j=0}^{\deg_t c_k} c_{j,k} t^j e \partial^k \in \mathcal{J} \setminus \{0\}$ .

Alors, nous avons  $(e \partial^j) d (t^k e) = j! k! c_{j,k} e$ , ce qui montre que  $e \in \mathcal{J}$ , et donc que  $\langle e \rangle \subseteq \mathcal{J}$ . Finalement, on a prouvé que  $\mathcal{J} = \langle e \rangle$ .  $\square$

En utilisant la forme normale (2.6) d'un élément  $d \in \mathbb{I}_1$ , nous pouvons vérifier de nouveau que  $d = d_1 + d_2 + d_3$ , où  $d_1 \in \mathbb{A}_1$ ,  $d_2 \in \mathcal{I} = \{\sum_{i=0}^r a_i I b_i \mid a_i, b_i \in \mathbb{k}[t], r \in \mathbb{N}\}$ , et  $d_3 \in \langle e \rangle = \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial]$ . Remarquons qu'en utilisant l'identité  $I a I = I(a) I - I I(a)$ , nous pouvons voir que  $\mathcal{I}$  est un anneau sans unité.

**Proposition 2.2.5.** ([16], [121, p.22]) *L'anneau  $\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$  est isomorphe à l'anneau des polynômes de Laurent non commutatifs*

$$\mathbb{L}_1 = \mathbb{k}[H] \langle \sigma, \sigma^{-1} \mid \sigma H = (H+1)\sigma, \sigma^{-1} H = (H-1)\sigma^{-1} \rangle,$$

dont les éléments sont de la forme  $\sum_{0 \leq |i| \leq t} p_i(H) \sigma^i$ , où  $p_i \in \mathbb{k}[H]$  et  $t \in \mathbb{N}$ . L'isomorphisme correspondant est donné par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}_1 & \longrightarrow & \mathbb{L}_1 \\ \partial \text{ mod } \langle e \rangle & \longmapsto & \sigma, \\ I \text{ mod } \langle e \rangle & \longmapsto & \sigma^{-1}, \\ h = \partial t \text{ mod } \langle e \rangle & \longmapsto & H. \end{array}$$

*Démonstration.* L'identité

$$\partial h = \partial(t\partial + 1) = t\partial^2 + 2\partial = (t\partial + 1)\partial + \partial = h\partial + \partial = (h+1)\partial$$

entraîne  $\sigma H = (H+1)\sigma$  dans  $\mathbb{L}_1$ . De plus,  $Ih = I\partial t = (1-e)t = t$  implique que l'image de  $t \text{ mod } \langle e \rangle \in \mathbb{B}_1$  dans  $\mathbb{L}_1$  est  $\sigma^{-1}H$ . Enfin,  $(h-1)I = t\partial I = t$  montre que  $(H-1)\sigma^{-1} = \sigma^{-1}H$  dans  $\mathbb{L}_1$ .  $\square$

**Proposition 2.2.6.** *Considérons l'élément  $g = t\partial \in \mathbb{I}_1$ , appelé opérateur d'Euler, et notons  $G$  la classe de  $g$  dans  $\mathbb{L}_1$ . Alors, d'après les notations de la proposition 2.2.5, nous avons  $G = H-1 \in \mathbb{L}_1$ . On a alors l'isomorphisme suivant :*

$$\mathbb{I}_1 / \langle e \rangle = \mathbb{B}_1 \cong \mathbb{k}[G] \langle \sigma, \sigma^{-1} \mid \sigma G = (G+1)\sigma, \sigma^{-1} G = (G-1)\sigma^{-1} \rangle,$$

c'est-à-dire que le quotient  $\mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$  s'identifie à une algèbre de Ore sur  $\mathbb{k}[G]$ , munie de l'automorphisme  $\sigma$  vérifiant la relation de commutation ci-dessus.

*Démonstration.* L'identité  $\partial g = \partial(t\partial) = t\partial^2 + \partial = (t\partial)\partial + \partial = g\partial + \partial = (g+1)\partial$  entraîne la relation  $\sigma G = (G+1)\sigma$  dans  $\mathbb{L}_1$ . Par ailleurs, on a  $Ig = I t \partial = -I + t = -I + (t\partial)I = -I + gI = (g-1)I$ , ce qui montre que  $\sigma^{-1}G = (G-1)\sigma^{-1}$  dans  $\mathbb{L}_1$ . Enfin, l'égalité  $g = t\partial$  implique que la classe de  $t$  dans  $\mathbb{L}_1$  est  $G\sigma^{-1}$ .  $\square$

**Remarque 2.2.6.** Dans ce mémoire, nous identifions  $\mathbb{B}_1$  à  $\mathbb{L}_1$ , c'est-à-dire qu'un élément de  $\mathbb{B}_1$  sera noté sous la forme  $\sum_{0 \leq |i| \leq t} p_i(H) \sigma^i$ , où  $p_i \in \mathbb{k}[H]$  et  $t \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 2.2.7.** Nous avons la suite exacte courte d'algèbres suivante [166] :

$$0 \longrightarrow \langle e \rangle \xrightarrow{i} \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle \longrightarrow 0,$$

où l'épimorphisme  $\pi$  est définie par :

$$\pi(t) = \bar{t}, \quad \pi(\partial) = \sigma := \bar{\partial}, \quad \pi(I) = \bar{I} = \bar{\partial}^{-1} = \sigma^{-1}, \quad \pi(e) = 0. \quad (2.7)$$

On a un isomorphisme  $\mathbb{I}_1 / \langle e \rangle \cong \mathbb{A}_1(\mathbb{k})_{\partial}$ , où  $\mathbb{A}_1(\mathbb{k})_{\partial}$  désigne la localisation de  $\mathbb{A}_1(\mathbb{k})$  par l'ensemble de Ore à gauche  $\{\partial^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Voir la section 2.4.3. Voir aussi [16, p.500], et [121, p.42].

### 2.2.2.2 L'involution de $\mathbb{I}_1$

**Définition 2.2.5.** Soit  $\mathcal{A}$  un anneau. On appelle *involution* de  $\mathcal{A}$  un anti-morphisme d'anneau  $\theta$  vérifiant  $\theta^2 = 1$ . Plus précisément,  $\theta$  vérifie :

$$\forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}, \quad \theta(a_1 a_2) = \theta(a_2) \theta(a_1), \quad \theta(a_1 + a_2) = \theta(a_1) + \theta(a_2), \quad \theta(\theta(a_1)) = a_1, \quad \theta(1) = 1.$$

**Proposition 2.2.7.** ([16]) *L'anneau  $\mathbb{I}_1$  admet l'involution  $\theta$  définie comme suit*

$$\theta(\partial) = I, \quad \theta(I) = \partial, \quad \theta(t) = \partial t \partial = (t \partial + 1) \partial = h \partial,$$

où  $h = \partial t$ .

Une conséquence importante de la proposition 2.2.7 est que  $\theta(e) = e$  et  $\theta(h) = h$ . En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \theta(e) &= \theta(1 - I \partial) = \theta(1) - \theta(\partial) \theta(I) = 1 - I \partial = e, \\ \theta(h) &= \theta(\partial t) = \theta(t) \theta(\partial) = h \partial I = h. \end{aligned}$$

Le fait que  $\mathbb{I}_1$  admette une involution est important dans notre étude car cela implique que les propriétés des modules/idéaux à gauche peuvent être transportées aux modules/idéaux à droite.

### 2.2.2.3 Les opérateurs de Taylor

Nous remarquons que certaines propriétés de  $\mathbb{A}_1$  ne sont plus valables pour  $\mathbb{I}_1$ , comme le montre, par exemple, le corollaire 2.2.1 ci-dessous.

**Théorème 2.2.2.** ([94, Théorème 2 ]) *Un anneau  $\mathcal{A}$  unitaire qui contient deux éléments  $a$  et  $b$  tels que  $ab = 1$ , et  $ba \neq 1$  n'est pas noethérien ni à gauche, ni à droite.*

Nous rappelons que dans  $\mathbb{I}_1$  nous avons les identités  $\partial I = 1$  et  $I \partial = 1 - e$ . Nous pouvons donc énoncer le corollaire au théorème 2.2.2 suivant.

**Corollaire 2.2.1.**  $\mathbb{I}_1$  *n'est ni un anneau noethérien à gauche, ni un anneau noethérien à droite.*

Une manière plus explicite de démontrer le corollaire 2.2.1 consiste à considérer la chaîne d'idéaux à gauche/droite générée par *les opérateurs de Taylor* définis comme suit.

**Définition 2.2.6.** Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on appelle *opérateur de Taylor d'ordre  $N$*  l'opérateur de  $\mathbb{I}_1$  suivant :

$$T_N = \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} e \partial^k. \quad (2.8)$$

On appelle ces opérateurs ainsi, car nous avons

$$\forall p \in \mathbb{k}[t], \quad T_N(p)(t) = \sum_{i=0}^N \frac{t^i}{i!} p^{(i)}(0).$$

Autrement dit, en appliquant l'opérateur  $T_N$  à un polynôme  $p$  de  $\mathbb{k}[t]$  on obtient son développement de Taylor à l'ordre  $N$ .

**Exemple 2.2.2.** Appliquons l'opérateur de Taylor  $T_N$  à un monôme  $t^k$  pour  $N, k \in \mathbb{N}$ .

$$T_N(t^k) = \sum_{i=0}^N \frac{t^i}{i!} e \partial^i(t^k) = \begin{cases} t^k, & 0 \leq k \leq N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

En effet, nous avons,

$$\partial^j(t^k) = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-j+1)t^{k-j}, & k \geq j, \\ 0, & k < j, \end{cases}$$

et en utilisant  $e t = 0$ , nous obtenons :

$$T_N(t^k) = \sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} e \partial^j(t^k) = t^k, \quad k = 0, \dots, N.$$

De plus, si  $p_k(\partial) \in \mathbb{k}[\partial]$  pour  $k = 0, \dots, r$ , alors en appliquant le lemme 2.2.1, nous obtenons :

$$T_N \left( \sum_{k=0}^r t^k e p_k(\partial) \right) = \sum_{k=0}^r T_N(t^k) e p_k(\partial) = \sum_{k=0}^{\min\{r, N\}} t^k e p_k(\partial).$$

En particulier, si  $p_k(\partial) = \frac{\partial^k}{k!}$ , alors  $T_N T_r = T_{\min\{r, N\}}$ .

**Proposition 2.2.8.** *Nous avons :*

1. Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $T_N T_{N+1} = T_N$  de sorte que  $\mathbb{I}_1 T_N \subseteq \mathbb{I}_1 T_{N+1}$ .
2. Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{I}_1 T_N \neq \mathbb{I}_1 T_{N+1}$ .
3. Pour tout  $N, r \in \mathbb{N}$ ,  $T_N T_r = T_{\min\{r, N\}}$

**Exemple 2.2.3.** Par exemple, nous avons  $T_0 = e$ ,  $T_1 = e + t e \partial$ . Notons que  $T_0 T_1 = e(e + t e \partial) = e^2 + e t e \partial = e^2 + 0 = e = T_0$ , et donc,  $T_0 \in \mathbb{I}_1 T_1$ , où  $\mathbb{I}_1 T_1 = \{d T_1 \mid d \in \mathbb{I}_1\}$  est l'idéal à gauche de  $\mathbb{I}_1$  engendré par  $T_1$ , ce qui donne  $\mathbb{I}_1 T_0 \subseteq \mathbb{I}_1 T_1$ .

*Démonstration.* 1. Puisque  $T_{N+1} \in \langle e \rangle$ , selon le lemme 2.2.1,  $T_N T_{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{T_N(t^k)}{k!} e \partial^k$ . Calculons donc  $T_N(t^k)$  pour  $k \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$ . Nous avons, d'après l'exemple 2.2.2,

$$T_N(t^k) = \sum_{i=0}^N \frac{t^i}{i!} e \partial^i(t^k) = \begin{cases} t^k, & 0 \leq k \leq N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Ainsi, en substituant l'expression de  $T_N(t^k)$  dans  $T_N T_{N+1}$ , nous obtenons finalement :

$$T_N T_{N+1} = \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} e \partial^k = T_N.$$

2. Supposons que  $T_{N+1} \in \mathbb{I}_1 T_N$ . Alors, il existe  $\alpha \in \mathbb{I}_1$  tel que  $T_{N+1} = \alpha T_N$ . D'une part, puisque  $T_N \in \langle e \rangle$ ,  $\alpha T_N = \sum_{k=0}^N \alpha \left( \frac{t^k}{k!} \right) e \partial^k$ . D'autre part,  $T_{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{t^k}{k!} e \partial^k$ . En comparant ces deux formes normales, nous obtenons  $t^{N+1} = 0$  dans  $\mathbb{k}[t]$ , ce qui conduit à une contradiction et prouve que  $\mathbb{I}_1 T_N \neq \mathbb{I}_1 T_{N+1}$ . □

La proposition 2.2.8 prouve que  $\mathbb{I}_1 T_0 \subsetneq \mathbb{I}_1 T_1 \subsetneq \mathbb{I}_1 T_2 \subsetneq \dots$  est une chaîne strictement ascendante d'idéaux à gauche de  $\mathbb{I}_1$ . Par conséquent,  $\mathbb{I}_1$  n'est pas un anneau noethérien à gauche.

On remarque que si la chaîne ascendante ci-dessus avait été stabilisée, c'est-à-dire si  $T_{N+1} = \alpha T_N$  pour un certain  $\alpha \in \mathbb{I}_1$  et  $N \geq 0$ , alors un développement de Taylor à l'ordre  $N$  aurait déterminé un développement de Taylor à chaque ordre  $M \geq N$ , ce qui n'est pas vrai.

**Remarque 2.2.8.** Si nous ne voulons pas raisonner par l'absurde, nous pouvons utiliser la décomposition en somme directe suivante :

$$\mathbb{I}_1 T_N = \bigoplus_{k=0}^N \mathbb{k}[t] e \partial^k \cong \mathbb{k}[t]^{N+1}. \quad (2.9)$$

En effet, en utilisant le point 3 du lemme 2.2.8, pour tout  $i = 0, \dots, N$ , nous avons  $T_i = T_i T_N \in \mathbb{I}_1 T_N$ . Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} T_{i+1} - T_i &= \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} e \partial^{i+1} \in \mathbb{I}_1 T_N \\ \implies \sum_{k=0}^N \mathbb{I}_1 \frac{t^k}{k!} e \partial^k &\subset \mathbb{I}_1 T_N \subset \sum_{k=0}^N \mathbb{I}_1 \frac{t^k}{k!} e \partial^k. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons  $\mathbb{I}_1 T_N = \sum_{k=0}^N \mathbb{I}_1 \frac{t^k}{k!} e \partial^k$ . Notons de plus que  $\mathbb{I}_1 \frac{t^k}{k!} e \partial^k = \mathbb{I}_1 e \partial^k = \mathbb{k}[t] e \partial^k$ . En effet, d'après le lemme 2.2.1, nous avons

$$\partial^k \frac{t^k}{k!} e \partial^k = \partial^k \left( \frac{t^k}{k!} \right) e \partial^k = e \partial^k \in \mathbb{I}_1 \frac{t^k}{k!} e \partial^k \subset \mathbb{I}_1 e \partial^k.$$

Ainsi, on a bien montré l'égalité (2.9).

De même, nous avons

$$\mathbb{I}_1 T_{N+1} = \bigoplus_{k=0}^{N+1} \mathbb{k}[t] e \partial^k \cong \mathbb{k}[t]^{N+2}.$$

Ainsi, on obtient  $\mathbb{I}_1 T_N \subsetneq \mathbb{I}_1 T_{N+1}$ .

Enfin, en utilisant l'involution  $\theta$  de  $\mathbb{I}_1$  définie dans la proposition 2.2.7, nous obtenons que la chaîne strictement ascendante  $\theta(T_0) \mathbb{I}_1 \subsetneq \theta(T_1) \mathbb{I}_1 \subsetneq \theta(T_2) \mathbb{I}_1 \subsetneq \dots$  des idéaux à droite de  $\mathbb{I}_1$  ne se stabilise pas, ce qui montre que  $\mathbb{I}_1$  n'est pas non plus un anneau noethérien à droite, et donc, ce n'est pas un anneau noethérien.

Montrons maintenant que les opérateurs de Taylor sont stables par l'involution  $\theta$ .

**Proposition 2.2.9.** *Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , nous avons  $\theta(T_N) = T_N$ .*

Prouvons, tout d'abord, un lemme calculatoire utile pour prouver la proposition 2.2.9.

**Lemme 2.2.3.** *Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Alors,  $e(\partial t \partial)^k = k! e \partial^k$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence. Si  $k = 0$  alors  $e(\partial t \partial)^0 = e = 0! e \partial^0$ . Si on suppose que pour  $k$  fixé nous avons  $e(\partial t \partial)^k = k! e \partial^k$ . Alors

$$e(\partial t \partial)^{k+1} = e(\partial t \partial)^k (\partial t \partial) = e(k! e \partial^k) (\partial t \partial) = k! e^2 (\partial^{k+1} t \partial) = k! e (\partial^{k+1} t \partial).$$

On utilise maintenant l'identité  $\partial^n t = t \partial^n + n \partial^{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  (voir preuve du lemme 2.1.1). Ainsi :

$$e(\partial t \partial)^{k+1} = k! e (t \partial^{k+1} + (k+1) \partial^k) \partial = e(k+1)! \partial^{k+1}.$$

□

Montrons maintenant la proposition 2.2.9.

*Démonstration.* Par linéarité, il nous suffit de prouver que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\theta\left(\frac{t^k}{k!} e \partial^k\right) = \frac{t^k}{k!} e \partial^k$ . En utilisant la proposition 2.2.1 nous obtenons :

$$\theta\left(\frac{t^k}{k!} e \partial^k\right) = \theta(\partial)^k \theta(e) \theta\left(\frac{t^k}{k!}\right) = I^k e \frac{(\partial t \partial)^k}{k!} = I^k (1) e \partial^k = \frac{t^k}{k!} e \partial^k.$$

Ainsi, nous avons  $\theta(T_N) = T_N$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ .

□

**Définition 2.2.7.** Soient  $a \in \mathbb{k}[\partial]$  et  $b \in \mathbb{k}[t]$ . On note alors :

- $\check{a}$  l'élément de  $\mathbb{k}[t]$  obtenu en remplaçant chaque  $\partial^i$  par  $\frac{t^i}{i!}$  dans  $a(\partial)$ .
- $\hat{b}$  l'élément de  $\mathbb{k}[\partial]$  obtenu en remplaçant chaque  $t^i$  par  $i! \partial^i$  dans  $b(t)$ .

**Exemple 2.2.4.** Soient  $a(\partial) = 1 + \partial^2 + 2\partial^3 \in \mathbb{k}[\partial]$  et  $b(t) = 2t + t^4 \in \mathbb{k}[t]$ . Alors,

$$\check{a}(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + 2\frac{t^3}{6} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}, \quad \hat{b}(\partial) = 2\partial + 4!\partial^4.$$

Le prochain lemme est une conséquence directe du lemme 2.2.3 utile pour la suite.

**Lemme 2.2.4.** Soient  $a \in \mathbb{k}[\partial]$  et  $b \in \mathbb{k}[t]$ . Alors, nous avons

$$\theta(a(\partial))e = \check{a}(t)e \quad \text{et} \quad e\theta(b(t)) = e\hat{b}(\partial).$$

*Démonstration.* Soient  $a = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i \in \mathbb{k}[\partial]$  et  $b = \sum_{j=0}^m b_j t^j \in \mathbb{k}[t]$ . Alors, en utilisant  $I^i e = \frac{t^i}{i!} e$  (voir lemme 2.2.1), nous avons :

$$\theta(a(\partial))e = \theta\left(\sum_{i=0}^n a_i \partial^i\right)e = \sum_{i=0}^n a_i \theta(\partial^i)e = \sum_{i=0}^n a_i I^i e = \sum_{i=0}^n a_i \frac{t^i}{i!} e = \check{a}(t)e.$$

Par ailleurs, en utilisant le lemme 2.2.3 et  $\theta(t) = \partial t \partial$ , nous avons :

$$e\theta(b(t)) = e\theta\left(\sum_{j=0}^m b_j t^j\right) = \sum_{j=0}^m b_j e\theta(t^j) = \sum_{j=0}^m b_j e\theta(t)^j = \sum_{j=0}^m b_j j! e \partial^j = e\left(\sum_{j=0}^m b_j j! \partial^j\right) = e\hat{b}(\partial).$$

□

**Lemme 2.2.5.** ([66]) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons l'égalité de  $\mathbb{I}_1$  suivante :

$$1 = T_{n-1} + I^n \partial^n.$$

Ces égalités correspondent au théorème de Taylor avec reste intégral. En effet,

$$\forall p \in \mathbb{k}[t], \quad p(t) = p(0) + \dot{p}(0)t + \dots + p^{(n-1)}(0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} p^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Ainsi, pour tout  $P \in \mathbb{I}_1$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P = I^N \partial^N P + T_{N-1} P$ , où  $\partial^N P \in \mathbb{A}_1$ , et  $T_{N-1} P \in \langle e \rangle$ .

*Démonstration.* Montrons l'égalité  $1 = T_{n-1} + I^n \partial^n$  par récurrence.

◇ Pour  $n = 1$  nous avons  $I \partial = 1 - e = 1 - T_0$ .

◇ Supposons maintenant que  $1 = T_{n-1} + I^n \partial^n$  pour un  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et montrons que  $1 = T_n + I^{n+1} \partial^{n+1}$ .

$$\begin{aligned} I^{n+1} \partial^{n+1} &= I (I^n \partial^n) \partial \\ &= I (1 - T_{n-1}) \partial \\ &= 1 - e - \sum_{k=0}^{n-1} I \frac{t^k}{k!} e \partial^k p \\ &= 1 - e - \sum_{k=0}^{n-1} I \left(\frac{t^k}{k!}\right) e \partial^{k+1} \quad \text{d'après le lemme 2.2.1} \\ &= 1 - e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} e \partial^{k+1} \\ &= 1 - e - \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} e \partial^k \quad \text{changement d'indice } k \leftarrow k+1 \\ &= 1 - T_n. \end{aligned}$$

La deuxième affirmation du lemme est une conséquence directe de la définition 2.2.6, de la proposition 2.2.2, de l'égalité  $1 = T_{n-1} + I^n \partial^n$  et du lemme 2.2.2. □

**Corollaire 2.2.2.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons  $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_1 \partial^n \oplus \mathbb{I}_1 T_{n-1} = \mathbb{I}_1 \partial^n \oplus \mathbb{I}_1 e \oplus \mathbb{I}_1 e \partial \oplus \dots \oplus \mathbb{I}_1 e \partial^{n-1}$ .*

*Démonstration.*  $\diamond$  Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'égalité  $1 = I^n \partial^n + T_{n-1}$  implique  $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_1 I^n \partial^n + \mathbb{I}_1 T_{n-1}$ . Or,  $\mathbb{I}_1 I^n = \mathbb{I}_1$  car  $\partial^n I^n = 1$ . Ainsi, nous avons :  $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_1 \partial^n + \mathbb{I}_1 T_{n-1}$ .

$\diamond$  Montrons que cette somme est une somme directe. Soit  $\alpha \in \mathbb{I}_1 \partial^n \cap \mathbb{I}_1 T_{n-1}$ . Alors, il existe  $\beta, \gamma \in \mathbb{I}_1$  tels que  $\alpha = \beta \partial^n = \gamma T_{n-1}$ . De plus, comme  $T_{n-1}^2 = T_{n-1}$ , nous avons  $\alpha T_{n-1} = \beta \partial^n T_{n-1} = \gamma T_{n-1}^2 = \gamma T_{n-1} = 0$ , car  $\partial^n T_{n-1} = 0$ . On en déduit que  $\alpha T_{n-1} = \gamma T_{n-1} = \alpha = 0$  et la somme directe suivante :  $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_1 \partial^n \oplus \mathbb{I}_1 T_{n-1}$ .

D'après la remarque 2.2.8, nous avons  $\mathbb{I}_1 T_{n-1} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_1 e \partial^{n-1-k}$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Dans le prochain chapitre, nous introduirons la notion d'anneau cohérent. Il est à noter que tout anneau noethérien est un anneau *cohérent* (voir [166, Exemple 3.64, p.142]). Il s'agit ainsi d'une propriété algébriquement plus faible.

## 2.3 Analyse algébrique des systèmes intégro-différentiels linéaires

Autour des années 1970, plusieurs approches algébriques des équations différentielles émergent de manière parallèle. Malgrange travaille sur l'anneau  $D = \mathbb{k}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ , dans le cadre des équations aux dérivées partielles à coefficients constants. De son côté, Bernstein introduit et étudie l'algèbre de Weyl, élargissant le cadre à des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. En parallèle, au Japon, Sato, Kashiwara et Kawai développent une approche fondée sur l'anneau  $D = \mathcal{O}_X[\partial_1, \dots, \partial_n]$ , où  $\mathcal{O}_X$  est l'anneau des fonctions analytiques sur une variété complexe. Enfin, Schapira collabore étroitement avec Kashiwara dans le développement de cette théorie.

Pour un aperçu des différentes contributions à cette théorie, voir l'introduction à la thèse de master de Kashiwara écrite par Schapira dans la réédition [98].

Dans cette section, nous donnons essentiellement une preuve du théorème de Malgrange qui permet de faire le lien entre les solutions d'un système linéaire donné et le module à gauche de présentation finie défini par le système. Cela va ainsi nous permettre d'introduire des notations de théorie des modules. Pour plus de détails, voir [25, 99, 73, 135, 119].

### 2.3.1 Le théorème de Malgrange

Notons  $\mathcal{A}$  un anneau et  $\mathcal{A}^{q \times p}$  l'ensemble des matrices à coefficients dans  $\mathcal{A}$  de taille  $q \times p$ . On considère alors  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$  ainsi qu'un  $\mathcal{A}$ -module à gauche noté  $\mathcal{F}$ . On peut par exemple penser à  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1$  ou  $\mathbb{I}_1$  et  $\mathcal{F} = \mathbb{k}[t]$  ou  $C^\infty(\mathbb{R})$ . La matrice  $R$  définit alors le système d'équations linéaires suivant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_{11} & \dots & R_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{q1} & \dots & R_{qp} \end{pmatrix}}_R \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

où  $h = (h_1 \dots h_p)^T \in \mathcal{F}^{p \times 1}$  est un vecteur colonne à coefficients dans  $\mathcal{F}$ . Un vecteur  $h \in \mathcal{F}^{p \times 1}$  qui satisfait le système linéaire (2.10) est appelé une *solution* de (2.10). Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel, alors l'espace des solutions de (2.10) est un sous- $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de  $\mathcal{F}$ . Une idée classique en analyse algébrique (en particulier en théorie des  $\mathcal{D}$ -modules) est de considérer le  $\mathcal{A}$ -morphisme à gauche suivant :

$$\begin{aligned} .R : \quad \mathcal{A}^{1 \times q} &\longrightarrow \mathcal{A}^{1 \times p} \\ \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_q) &\longmapsto \lambda R. \end{aligned}$$

L'image de  $.R$ , notée  $\text{im}_{\mathcal{A}}(.R) = \mathcal{A}^{1 \times q} R$ , est alors un sous- $\mathcal{A}$ -module à gauche de  $\mathcal{A}^{1 \times p}$  formé par toutes les combinaisons  $\mathcal{A}$ -linéaires à gauche des lignes de la matrice  $R$ . On peut alors définir le  $\mathcal{A}$ -module à gauche quotient suivant :

$$\mathcal{M} = \mathcal{A}^{1 \times p} / (\mathcal{A}^{1 \times q} R). \quad (2.11)$$

**Exemple 2.3.1.** Considérons  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1 = \mathbb{Q}[t]\langle \partial \rangle$  l'algèbre de Weyl à une variable, autrement dit les opérateurs différentiels en une variable avec la relation  $\partial t = t \partial + 1$ . Voir Section 2.1 pour la définition de cet anneau. On peut alors considérer l'équation différentielle ordinaire  $y'(t) - y(t) = 0$ . On a alors  $R = \partial - 1$  et  $\mathcal{M} = \mathbb{A}_1 / (\mathbb{A}_1 (\partial - 1)) = \mathbb{A}_1 / (\mathbb{A}_1 R)$ .

**Exemple 2.3.2.** Considérons  $R = 1 - I \in \mathbb{I}_1$ . Alors, nous avons  $\mathcal{M} = \mathbb{I}_1 / (\mathbb{I}_1 (1 - I))$  correspondant à l'équation  $u(t) - \int_0^t u(\tau) d\tau = 0$ .

Le  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $\mathcal{M}$  ainsi construit (voir (2.11)) joue un rôle fondamental dans l'étude du système (2.10). Donnons une description explicite de ce module  $\mathcal{M}$  par *générateurs et relations*.

**Proposition 2.3.1.** Soit  $\mathcal{A}$  un anneau,  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$  et  $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{1 \times p} / (\mathcal{A}^{1 \times q} R)$ . Notons  $\{e_i\}_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  la base canonique de  $\mathcal{A}^{1 \times p}$ , c'est-à-dire les vecteurs ligne de taille  $p$  avec un 1 en position  $i$  et des 0 ailleurs. Notons également  $g_i = \pi(e_i)$  pour  $i = 1, \dots, p$  où  $\pi$  est la projection canonique de  $\mathcal{A}^{1 \times p}$  dans  $\mathcal{M}$ . Alors,  $\{g_i\}_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est un ensemble générateur de  $\mathcal{M}$  et les relations  $\mathcal{A}$ -linéaires entre ces générateurs s'écrivent

$$Rg = 0,$$

avec  $g = (g_1 \dots g_p)^T$ .

*Démonstration.* Soit  $\pi : \mathcal{A}^{1 \times p} \rightarrow \mathcal{M}$  l'épimorphisme qui envoie  $\mu \in \mathcal{A}^{1 \times p}$  sur sa classe d'équivalence modulo  $\mathcal{M}$ , notée  $\pi(\mu)$ .

On rappelle que  $\pi(\mu') = \pi(\mu)$  pour un certain  $\mu' \in \mathcal{A}^{1 \times p}$  si  $\mu' - \mu \in \text{im}_{\mathcal{A}}(.R) = \mathcal{A}^{1 \times q} R$ , c'est-à-dire, s'il existe  $\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times q}$  tel que  $\mu' - \mu = \lambda R$ , c'est-à-dire,  $\mu' = \mu + \lambda R$ . L'application  $\pi$  est alors un  $\mathcal{A}$ -morphisme.

Désignons maintenant par  $\{e_i\}_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  la base canonique de  $\mathcal{A}^{1 \times p}$  et par  $\{f_j\}_{j \in \llbracket 1, q \rrbracket}$  la base canonique de  $\mathcal{A}^{1 \times q}$ , c'est-à-dire,  $e_i$  est le vecteur ligne de taille  $p$  avec un 1 en position  $i$  et des 0 ailleurs et, de même,  $f_j$  est la ligne de taille  $q$  avec un 1 en position  $j$  et des 0 ailleurs. De plus, notons  $g_i = \pi(e_i)$  pour  $i = 1, \dots, p$ . Par définition de  $\mathcal{M}$ , chaque élément  $m \in \mathcal{M}$  est de la forme  $m = \pi(\mu)$  pour un certain  $\mu = (\mu_1 \dots \mu_p) = \sum_{i=1}^p \mu_i e_i \in \mathcal{A}^{1 \times p}$ . La  $\mathcal{A}$ -linéarité à gauche de  $\pi$  entraîne  $m = \sum_{i=1}^p \mu_i \pi(e_i) = \sum_{i=1}^p \mu_i g_i$ , ce qui montre que  $\{g_i\}_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est un ensemble de générateurs de  $\mathcal{M}$ .

Déterminons maintenant les relations  $\mathcal{A}$ -linéaires à gauche vérifiées par la famille  $\{g_i\}_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ . Si  $R_{j\bullet} = (R_{j1} \dots R_{jp})$  désigne la  $j$ -ème ligne de  $R$  pour  $j = 1, \dots, q$ , alors  $R_{j\bullet} = f_j R \in \text{im}_{\mathcal{A}}(.R)$  c'est-à-dire,  $\pi(R_{j\bullet}) = 0$ . La  $\mathcal{A}$ -linéarité de  $\pi$  à gauche entraîne alors :

$$\pi \left( \sum_{i=1}^p R_{ji} e_i \right) = \sum_{i=1}^p R_{ji} \pi(e_i) = \sum_{i=1}^p R_{ji} g_i = 0, \quad j = 1, \dots, q.$$

Ainsi, si l'on note  $g = (g_1 \dots g_p)^T$ , la famille génératrice de  $\mathcal{M}$ ,  $\{g_i\}_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ , satisfait l'équation

$$Rg = 0,$$

et aucune autre relation  $\mathcal{A}$ -linéaire qui ne soit pas une conséquence de  $Rg = 0$ . □

**Remarque 2.3.1.** Il est important de noter que  $g \in \mathcal{M}^{p \times 1}$ , autrement dit que  $g$  n'est pas un élément de  $\mathcal{F}^{p \times 1}$  quand  $\mathcal{F} \neq \mathcal{M}$ . Si on veut passer de  $g \in \mathcal{M}^{p \times 1}$  à  $h \in \mathcal{F}^{p \times 1}$ , on doit regarder les  $\mathcal{A}$ -morphisms à gauche de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{F}$ .

Soit  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  le groupe abélien formé par tous les  $\mathcal{A}$ -morphisms de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{F}$ . Notons que de manière générale,  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  n'est pas un  $\mathcal{A}$ -module à gauche.

En effet, pour  $a \in \mathcal{A}$  et  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ , on peut définir  $af \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  de la façon suivante :  $(af)(m) = f(am)$  pour tout  $m \in \mathcal{M}$ . Mais alors, en utilisant  $(a_1 a_2) f = a_1 (a_2 f)$ , on aurait  $((a_1 a_2) f)(m) = f(a_1 a_2 m)$  et  $(a_1 (a_2 f))(m) = (a_2 f)(a_1 m) = f(a_2 a_1 m)$ . Comme  $\mathcal{A}$  n'est pas nécessairement un anneau commutatif, il n'y a aucune raison pour, qu'en toute généralité, on ait  $a_1 a_2 m = a_2 a_1 m$ . Donc  $f(a_1 a_2 m)$  et  $f(a_2 a_1 m)$  sont généralement différents et donc  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  n'a généralement pas une structure de  $\mathcal{A}$ -module à gauche si  $\mathcal{A}$  est un anneau non commutatif.

Si  $\mathcal{A}$  est commutatif, nous avons alors que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  est un  $\mathcal{A}$ -module.

On peut maintenant établir le lien entre le  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $\mathcal{M}$  et l'espace des solutions dans  $\mathcal{F}$  du système d'équations intégro-différentielles (2.10), noté

$$\ker_{\mathcal{F}}(R\bullet) = \{h \in \mathcal{F}^{p \times 1} \mid R\bullet h = 0\}.$$

**Théorème 2.3.1.** ([119, 98, 135]) Avec les notations précédentes, on a l'isomorphisme de groupes abéliens suivant :

$$\ker_{\mathcal{F}}(R\bullet) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F}). \quad (2.12)$$

Plus précisément, si  $\pi$  est la projection canonique de  $\mathcal{A}^{1 \times p}$  dans  $\mathcal{M}$ ,  $\{e_i\}_{i \in [1, p]}$  la base canonique de  $\mathcal{A}^{1 \times p}$ , c'est-à-dire les vecteurs ligne de taille  $p$  avec un 1 en position  $i$  et des 0 ailleurs, alors nous avons les isomorphismes inverses l'un de l'autre suivants,

$$\begin{array}{ccc} \ker_{\mathcal{F}}(R\bullet) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \ker_{\mathcal{F}}(R\bullet) \\ h & \longmapsto & \phi_h, & & \phi \longmapsto (\phi(g_1) \dots \phi(g_p))^T, \end{array}$$

avec  $\phi_h(\pi(\mu)) = \mu h$  pour tout  $\mu \in \mathcal{A}^{1 \times p}$  et  $g_i = \pi(e_i)$  pour  $i = 1, \dots, p$ .

*Démonstration.*

◇ Considérons d'abord  $h \in \ker_{\mathcal{F}}(R\bullet)$  et  $\phi_h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  défini par  $\phi_h(\pi(\mu)) = \mu h$  pour tout  $\mu \in \mathcal{A}^{1 \times p}$ . Remarquons que  $\phi_h$  est bien définie car si  $\pi(\mu) = \pi(\mu')$  pour un certain  $\mu' \in \mathcal{A}^{1 \times p}$ , alors, on a  $\mu' = \mu + \lambda R$  pour un certain  $\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times p}$ . Ainsi,  $\mu' h = \mu h + \lambda(R h) = \mu h$ .

◇ Par ailleurs, soit  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ , posons alors  $h_\phi := (\phi(g_1) \dots \phi(g_p))^T \in \mathcal{F}^{p \times 1}$ . Nous avons ainsi

$$\sum_{i=1}^p R_{ji} \phi(g_i) = \phi \left( \sum_{j=1}^p R_{ji} g_i \right) = \phi(0) = 0,$$

pour  $j = 1, \dots, q$  ou, en d'autres termes,  $R h_\phi = 0$ , c'est-à-dire  $h_\phi \in \ker_{\mathcal{F}}(R\bullet)$ .

Remarquons que  $h_{\phi_h} = (\phi_h(g_1) \dots \phi_h(g_p))^T = (h e_1 \dots h e_p) = h$  pour tout  $h \in \ker_{\mathcal{F}}(R\bullet)$ , et pour tout  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ ,  $\phi_{h_\phi}$  est défini par

$$\begin{aligned} \phi_{h_\phi}(\pi(\mu)) &= \mu h_\phi = \mu (\phi(g_1) \dots \phi(g_p))^T = \sum_{i=1}^p \mu_i \phi(g_i) = \phi \left( \sum_{i=1}^p \mu_i g_i \right) \\ &= \phi \left( \sum_{i=1}^p \mu_i \pi(e_i) \right) = \phi \left( \pi \left( \sum_{i=1}^p \mu_i e_i \right) \right) = \phi(\pi(\mu)), \end{aligned}$$

pour tout  $\mu \in \mathcal{A}^{1 \times p}$ , ce qui prouve finalement l'isomorphisme (2.12).  $\square$

**Remarque 2.3.2.** Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel, alors l'isomorphisme (2.12) est aussi un isomorphisme de  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels. Par exemple, on a  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(R\bullet) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathbb{k}[t])$  où  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(R\bullet)$  est le  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel des solutions polynomiales du système intégro-différentiel (2.10).

Le théorème 2.3.1 peut également être compris comme une conséquence de l'*exactitude à gauche* du foncteur *contravariant*  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, \mathcal{F})$  (voir, par exemple, [166]). En effet, à partir de la définition de  $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{1 \times p} / \text{im}_{\mathcal{A}}(R)$ , nous avons la *suite exacte* suivante de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche :

$$\mathcal{A}^{1 \times q} \xrightarrow{\cdot R} \mathcal{A}^{1 \times p} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire,  $\pi$  est surjective et  $\ker \pi = \text{im}_{\mathcal{A}}(R)$ . Cette suite exacte est appelée *présentation finie* du  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{M}$ .

De plus, si  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ , alors nous pouvons définir  $\pi^*(\phi) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times p}, \mathcal{F})$  par  $\pi^*(\phi) = \phi \circ \pi$ . De même, si  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times q}, \mathcal{F})$ , nous pouvons définir  $(\cdot R)^*(\psi) = \psi \circ \cdot R \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times q}, \mathcal{F})$ .

Ainsi, nous obtenons le *complexe* de groupes abéliens suivant :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times p}, \mathcal{F}) \xrightarrow{(\cdot R)^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times q}, \mathcal{F}), \quad (2.13)$$

c'est-à-dire  $(\cdot R)^* \circ \pi^* = 0$  puisque  $((\cdot R)^* \circ \pi^*)(\phi) = (\cdot R)^*(\phi \circ \pi) = \phi \circ \pi \circ (\cdot R) = 0$  car, par construction,  $\pi \circ (\cdot R) = 0$ . Par conséquent, nous avons  $\text{im}(\pi^*) \subseteq \ker((\cdot R)^*)$ . Montrons que  $\ker((\cdot R)^*) = \text{im}(\pi^*)$ . Soit  $\psi \in \ker((\cdot R)^*)$ , c'est-à-dire  $\psi \circ \cdot R = 0$ , où  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times q}, \mathcal{F})$ . Ainsi, nous avons  $\psi(\text{im}_{\mathcal{A}}(\cdot R)) = 0$ , c'est-à-dire que  $\psi$  s'annule sur  $\text{im}_{\mathcal{A}}(\cdot R)$ . Par conséquent, nous pouvons définir  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  par  $\varphi(\pi(\mu)) = \psi(\mu)$  pour tout  $\mu \in \mathcal{A}^{1 \times p}$ .

Remarquons que  $\varphi$  est bien définie, c'est-à-dire que  $\phi$  ne dépend pas de la pré-image  $\mu$  de la classe  $\pi(\mu)$  choisie. En effet, si  $\pi(\mu') = \pi(\mu)$ , alors, comme expliqué ci-dessus, nous avons  $\mu' = \mu + \lambda R$  pour un certain  $\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times q}$ , ce qui donne  $\psi(\mu') = \psi(\mu) + \psi(\lambda R) = \psi(\mu)$  puisque  $\lambda R \in \text{im}_{\mathcal{A}}(.R)$  et  $\psi(\text{im}_{\mathcal{A}}(.R)) = 0$ . Clairement, nous avons  $\psi = \varphi \circ \pi$ , ce qui prouve que  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times p}, \mathcal{F})$  satisfait  $\pi^*(\varphi) = \psi$ , c'est-à-dire  $\psi \in \text{im}(\pi^*)$ , ce qui implique  $\ker((.R)^*) \subseteq \text{im}(\pi^*)$ , et ainsi,  $\ker((.R)^*) = \text{im}(\pi^*)$ .

Enfin, donnons une forme plus explicite de la suite exacte (2.13). Tout d'abord, écrivons les isomorphismes de groupes abéliens suivants

$$\begin{aligned} \kappa_p : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times p}, \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{F}^{p \times 1} & \kappa_q : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times q}, \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{F}^{q \times 1} \\ \phi &\longmapsto h_\phi = \begin{pmatrix} \phi(e_1) \\ \vdots \\ \phi(e_p) \end{pmatrix}, & \theta &\longmapsto h_\theta = \begin{pmatrix} \theta(f_1) \\ \vdots \\ \theta(f_q) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dont les applications inverses respectives sont définies par

$$\begin{aligned} \kappa_p^{-1} : \mathcal{F}^{p \times 1} &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times p}, \mathcal{F}) & \kappa_q^{-1} : \mathcal{F}^{q \times 1} &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times q}, \mathcal{F}) \\ h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} &\longmapsto \phi_h, & \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_q \end{pmatrix} &\longmapsto \phi_\ell, \end{aligned}$$

où  $\phi_h$  et  $\phi_\ell$  sont respectivement définies par :

$$\begin{aligned} \phi_h : \mathcal{A}^{1 \times p} &\longrightarrow \mathcal{F} & \phi_\ell : \mathcal{A}^{1 \times q} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ (\mu_1 \ \dots \ \mu_p) &\longmapsto (\mu_1 \ \dots \ \mu_p) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} & (\nu_1 \ \dots \ \nu_q) &\longmapsto (\nu_1 \ \dots \ \nu_q) \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_q \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^p \mu_i h_i, & &= \sum_{j=1}^q \nu_j \ell_j. \end{aligned}$$

Caractérisons maintenant  $\kappa_q \circ (.R)^* \circ \kappa_p^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}^{p \times 1}, \mathcal{F}^{q \times 1})$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathcal{F}^{p \times 1}, \quad (\kappa_q \circ (.R)^* \circ \kappa_p^{-1})(h) &= (\kappa_q \circ (.R)^*)(\phi_h) = \kappa_q(\phi_h \circ .R) = \begin{pmatrix} (\phi_h \circ .R)(f_1) \\ \vdots \\ (\phi_h \circ .R)(f_q) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_h(f_1 R) \\ \vdots \\ \phi_h(f_q R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_h(\sum_{i=1}^p R_{1i} e_i) \\ \vdots \\ \phi_h(\sum_{i=1}^p R_{qi} e_i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p R_{1i} \phi_h(e_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p R_{qi} \phi_h(e_i) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \phi_h(e_1) \\ \vdots \\ \phi_h(e_p) \end{pmatrix} \\ &= R(h). \end{aligned}$$

On peut ainsi résumer la situation par le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\pi^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times p}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{(.R)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{1 \times q}, \mathcal{F}) \\ & & & & \kappa_p^{-1} \uparrow & & \downarrow \kappa_q \\ & & & & \mathcal{F}^{p \times 1} & \xrightarrow{R \bullet} & \mathcal{F}^{q \times 1}, \end{array}$$

où  $R \bullet = \kappa_q \circ (.R)^* \circ \kappa_p^{-1}$  est défini par :

$$\begin{aligned} R \bullet : \mathcal{F}^{p \times 1} &\longrightarrow \mathcal{F}^{q \times 1} \\ h &\longmapsto R(h). \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant le fait que  $\kappa_p$  et  $\kappa_q$  sont deux isomorphismes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \ker_{\mathcal{F}}(R \bullet) &= \ker_{\mathcal{F}}(\kappa_q \circ (.R)^* \circ \kappa_p^{-1}) \cong \ker_{\mathcal{F}}((.R)^* \circ \kappa_p^{-1}) \cong \ker((.R)^*) \\ &= \pi^*(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{F})) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

L'isomorphisme (2.12) joue un rôle fondamental dans la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules et l'analyse algébrique [25, 99, 135]. En effet, il montre que les systèmes linéaires (d'équations différentielles ou intégro-différentielles, en fonction du choix de  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1, \mathbb{I}_1 \dots$  voir sections 2.3 et 2.2) peuvent être étudiés grâce aux propriétés des  $\mathcal{A}$ -modules à gauche  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{F}$ .

Le  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $\mathcal{M}$  définit le système linéaire, tandis que le  $\mathcal{A}$  module à gauche  $\mathcal{F}$  définit l'espace fonctionnel où les solutions de (2.10) sont recherchées. Le théorème 2.3.1, montre que l'espace des solutions  $\ker_{\mathcal{F}}(R \bullet)$  peut être caractérisé à l'aide de  $\mathcal{M}$  et donc, à un isomorphisme près, ne dépend pas du choix de la présentation finie de  $\mathcal{M}$ . Ainsi, si  $\mathcal{M} \cong \mathcal{P} = \text{coker}_{\mathcal{A}}(.R')$  avec  $R' \in \mathcal{A}^{q' \times p'}$ , alors  $\ker_{\mathcal{F}}(R \bullet) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{F}) \cong \ker_{\mathcal{F}}(R' \bullet)$ .

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur les aspects algébriques des systèmes linéaires d'équations intégro-différentielles, c'est-à-dire sur les propriétés algébriques de  $\mathcal{M}$  associée à (2.10). En particulier, si  $\mathcal{A}$  peut être rendu calculable alors les propriétés algébriques de  $\mathcal{M}$  (par exemple, les propriétés du module, les invariants homologiques) peuvent être étudiées de manière effective à l'aide de méthodes de calcul formel pour certains modules  $\mathcal{F}$ . Les propriétés analytiques de (2.10) ne seront pas abordées ici.

**Exemple 2.3.3.** Continuons l'exemple 2.3.2. Nous avons  $R = 1 - I$  présentant le module  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R)$  correspondant à l'équation  $u(t) - \int_0^t u(\tau) d\tau = 0$ . Montrons alors l'équivalence suivante :

$$R \bullet u = 0 \iff \begin{cases} (1 - \partial) \bullet u = 0 \\ e \bullet u = 0. \end{cases}$$

Si  $R \bullet u = (1 - I) \bullet u = 0$ , alors en composant par  $\partial$  à gauche, nous avons  $(\partial - 1) \bullet u = 0$ . D'autre part, si on compose par  $e$  à gauche l'égalité  $(1 - I) \bullet u = 0$ , nous obtenons  $e \bullet u = 0$ . Réciproquement, si  $(1 - \partial) \bullet u = 0$  et  $e \bullet u = 0$ , alors en composant par  $I$  à gauche, nous avons  $I(\partial - 1) \bullet u = (1 - e - I) \bullet u = 0$ . Ainsi, nous avons  $(1 - I) \bullet u = e \bullet u = 0$ , car  $e \bullet u = 0$ . L'équivalence est ainsi démontrée.

Cette équivalence est un exemple de représentation d'un problème de Cauchy comme un opérateur intégral.

Montrons que l'équation  $R \bullet u = 0$  n'admet pas de solution régulière. L'égalité  $(1 - I) \bullet u = 0$  implique  $(1 - \partial) \bullet u = 0$ , c'est-à-dire,  $u'(t) = u(t)$ . Ainsi, nous avons  $u(t) = c e^t$  pour un certain  $c \in \mathbb{k}$ . Comme  $e \bullet u = 0$ , nécessairement  $c = 0$  et donc  $u = 0$ .

On en conclut que  $\mathcal{M} = \mathbb{I}_1 / (\mathbb{I}_1 (1 - I)) \neq 0$  car  $(1 - I)$  n'admet pas d'inverse à gauche (voir chapitre 6), par contre nous avons :

$$\ker_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}(R \bullet) \cong \text{Hom}_{\mathbb{I}_1}(\mathcal{M}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})) = 0, \quad \ker_{\mathbb{k}[t]}(R \bullet) \cong \text{Hom}_{\mathbb{I}_1}(\mathcal{M}, \mathbb{k}[t]) = 0.$$

## 2.3.2 Théorie des modules

La section précédente montre l'utilité de la théorie des modules dans l'étude des systèmes linéaires différentiels et intégro-différentiels. Dans cette section, nous rappelons certains résultats de théorie des modules utiles pour la suite de ce mémoire.

**Définition 2.3.1.** ([166, 108]) Soit  $\mathcal{A}$  un anneau et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module.

On dit que  $\mathcal{M}$  est un module *libre* de base  $\mathcal{B}$  si  $\mathcal{B}$  est un sous ensemble de  $\mathcal{M}$  libre et générateur, c'est-à-dire, vérifiant la propriété suivante

$$\forall m \in \mathcal{M}, \quad \exists (g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{B}^p, \quad \exists (a_1, \dots, a_p) \in (\mathcal{A}^*)^p, \quad m = \sum_{i=0}^p a_i g_i,$$

et  $m = \sum_{i=0}^p a_i g_i = 0$  implique  $g_1 = \dots = g_p = 0$ .

**Définition 2.3.2.** Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module de type fini (voir définition A.1.5) et libre alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{A}^n.$$

Si l'anneau  $\mathcal{A}$  est commutatif ou bien noethérien, alors l'entier  $n$  est unique et est appelé le *rang* du module  $\mathcal{M}$ .

**Définition 2.3.3.** Un  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{P}$  est *projectif* si, pour tout épimorphisme de  $\mathcal{A}$ -modules  $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  et tout morphisme  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$ , il existe un morphisme  $\tilde{f} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  tel que

$$g \circ \tilde{f} = f,$$

où  $\oplus$  désigne la somme directe de  $\mathcal{A}$ -modules.

Cela signifie que le morphisme  $f$  se *relève* à  $\mathcal{M}$ , comme illustré dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} & \\ \tilde{f} \swarrow & \downarrow f & \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{g} & \mathcal{N} \longrightarrow 0. \end{array}$$

De manière équivalente,  $\mathcal{P}$  est un module projectif s'il est facteur direct d'un module libre, c'est-à-dire, s'il existe  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{A}$ -module libre et  $\mathcal{Q}$  un  $\mathcal{A}$ -module tels que :

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{L}.$$

Si  $\mathcal{L}$  est de type fini, alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{L} \cong \mathcal{A}^n$ , ainsi nous avons  $\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{A}^n$ .

**Exemple 2.3.4.** Soit  $R \in \mathbb{I}_1^{p \times p}$  tel que  $R^2 = R$ . Nous avons,  $\mathbb{I}_1^{1 \times p} = \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) \oplus \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.R)$ . Ainsi,  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(.R)$  est un  $\mathbb{I}_1$ -module projectif à gauche. De plus,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.I_p - R)$  et nous avons

$$\text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1^{1 \times p} / \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.R) \cong \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.I_p - R).$$

Or,  $I_p - R$  est un idempotent de  $\mathbb{I}_1$ , c'est-à-dire qu'on a l'égalité  $(I_p - R)^2 = I_p - R$ . Ainsi, on peut écrire  $\mathbb{I}_1^{1 \times p} = \ker_{\mathbb{I}_1}(.I_p - R) \oplus \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.I_p - R)$  et  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(.I_p - R)$  est un  $\mathbb{I}_1$ -module projectif à gauche. Ainsi,  $\text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R)$  est un  $\mathbb{I}_1$ -module projectif à gauche.

**Exemple 2.3.5.** D'après le corollaire 2.2.2, nous avons,  $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_1 \partial^n \oplus \mathbb{I}_1 T_{n-1} = \mathbb{I}_1 \partial^n \oplus \mathbb{I}_1 e \oplus \mathbb{I}_1 e \partial \oplus \dots \oplus \mathbb{I}_1 e \partial^{n-1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi,  $\mathbb{I}_1 \partial^n$ ,  $\mathbb{I}_1 e \partial^n$  et  $\mathbb{I}_1 T_{n-1}$  sont des  $\mathbb{I}_1$ -modules projectifs à gauche pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Dans toute la suite de cette section,  $\mathcal{A}$  désigne un anneau noethérien et intègre.

**Proposition 2.3.2.** ([145, Lemme 17]) Soient  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$  et  $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{1 \times p} / (\mathcal{A}^{1 \times q} R)$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche de présentation finie. Alors  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module libre à gauche si et seulement s'il existe des matrices  $Q \in \mathcal{A}^{p \times m}$  et  $T \in \mathcal{A}^{m \times p}$  telles que :

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{A}^{1 \times p} Q \quad \text{et} \quad T Q = I_m.$$

**Définition 2.3.4.** Un  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{M}$  est dit *stablement libre* s'il existe un  $\mathcal{A}$ -module libre de rang fini  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{F}$  soit un  $\mathcal{A}$ -module libre de rang fini. Plus précisément, si  $\mathcal{F}$  est libre de rang  $n \in \mathbb{N}$  alors il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$\mathcal{M} \oplus \mathcal{A}^n = \mathcal{A}^m.$$

En particulier  $\mathcal{M}$  est projectif.

**Proposition 2.3.3.** ([96 p. 8, 108 p. 137])

Soit  $\mathcal{P}$  un  $\mathcal{A}$ -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{P}$  est projectif.

2. Pour tout  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{M}$ , toute suite exacte de la forme  $\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{P} \xrightarrow{g} 0$  se scinde.
3. Le foncteur  $\mathcal{M} \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{M})$  est exact. (Voir A.1.5.)

**Proposition 2.3.4.** ([121, Proposition 11.1.7]) Un  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $\mathcal{M}$  est stablement libre si, et seulement si, il existe une matrice  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$  admettant une inverse à droite  $S \in \mathcal{A}^{p \times q}$ , c'est-à-dire telle que  $RS = I_q$ , et telle que :

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{A}^{1 \times p} / (\mathcal{A}^{1 \times q} R).$$

**Définition 2.3.5.** ([166, p. 161]) Un anneau  $\mathcal{A}$  est dit *héréditaire à gauche* (respectivement *héréditaire à droite*), si tout idéal à gauche (respectivement à droite) est projectif. L'anneau  $\mathcal{A}$  est *héréditaire* s'il est héréditaire à gauche et à droite.

Un anneau  $\mathcal{A}$  est de *Dedekind*, s'il est intègre, c'est-à-dire sans diviseur de zéro, et héréditaire.

**Exemple 2.3.6.** ([166, p. 161]) L'anneau des polynômes en deux variables non commutatives  $\mathbb{k}\langle x, y \rangle$  est héréditaire mais non noethérien.

**Proposition 2.3.5.** ([166, Corollaire 4.23, p. 163]) *Tout anneau de Dedekind est noethérien.*

**Proposition 2.3.6.** ([166, Théorème 4.19, p. 163]) *Un anneau  $\mathcal{A}$  est héréditaire si, et seulement si, tout sous- $\mathcal{A}$ -module d'un  $\mathcal{A}$ -module projectif est projectif.*

**Définition 2.3.6.** ([108, p. 146]) Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche.

- Un élément  $m \in \mathcal{M}$  est dit *de torsion* s'il existe un élément non nul  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $am = 0$ .
- On note  $t(\mathcal{M})$  l'ensemble des éléments de torsion de  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire,

$$t(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M} \mid \exists a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}, am = 0\}.$$

- Si  $t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ , on dit que  $\mathcal{M}$  est un  *$\mathcal{A}$ -module de torsion*.
- Si  $t(\mathcal{M}) = 0$ , on dit que  $\mathcal{M}$  est un  *$\mathcal{A}$ -module sans torsion*.

De manière générale, il suffit qu'un anneau  $\mathcal{A}$  soit intègre et possède la *propriété de Ore* à gauche pour que  $t(\mathcal{M})$  ait une structure de  $\mathcal{A}$ -module. C'est ce résultat que montre la proposition suivante.

**Proposition 2.3.7.** *Soient  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module et  $\mathcal{A}$  un domaine possédant la propriété de Ore à gauche, c'est-à-dire vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall (a, b) \in \mathcal{A}^2, \exists (c, d) \neq (0, 0) \in \mathcal{A}^2, ca = db.$$

*Alors, l'ensemble  $t(\mathcal{M})$  a une structure de  $\mathcal{A}$ -module.*

*Démonstration.* Soient  $m_1, m_2 \in t(\mathcal{M})$  et  $b_1, b_2 \in \mathcal{A}$ . Montrons que  $b_1 m_1 + b_2 m_2 \in t(\mathcal{M})$ . Comme  $m_1, m_2 \in t(\mathcal{M})$ , il existe  $a_1, a_2 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$  tels que :

$$\begin{cases} a_1 m_1 = 0, \\ a_2 m_2 = 0. \end{cases}$$

Par la propriété de Ore, il existe  $(c_1, c_2) \neq (0, 0) \in \mathcal{A}^2$  tel que :

$$c_1 a_1 = c_2 b_1.$$

De même, il existe  $(d_1, d_2) \neq (0, 0) \in \mathcal{A}^2$  tel que :

$$d_1 a_2 = d_2 b_2.$$

De plus, il existe  $(e_1, e_2) \neq (0, 0) \in \mathcal{A}^2$  tel que :

$$e_1 c_2 = e_2 d_2.$$

Nous avons alors :

$$(e_1 c_2)(b_1 m_1 + b_2 m_2) = e_1 \underbrace{(c_2 b_1)}_{=c_1 a_1} m_1 + \underbrace{(e_1 c_2)}_{=e_2 d_2} (b_2 m_2) = e_1 c_1 \underbrace{(a_1 m_1)}_{=0} + e_2 \underbrace{(d_2 b_2)}_{=d_1 a_2} m_2 = e_2 d_1 \underbrace{(a_2 m_2)}_{=0} = 0.$$

Ainsi,  $b_1 m_1 + b_2 m_2 \in t(\mathcal{M})$  et donc  $t(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{A}$ -module. □

**Remarque 2.3.3.** Un anneau commutatif ou noethérien possède la propriété de Ore à gauche et à droite.

On continue de supposer que  $\mathcal{A}$  est un anneau intègre et noethérien.

**Théorème 2.3.2.** ([140])

*Nous avons les assertions suivantes.*

1.

$$\text{libre} \Rightarrow \text{stablement libre} \Rightarrow \text{projectif} \Rightarrow \text{sans torsion}.$$

2. ([166, Corollaire 4.16, p. 163]) Si  $\mathcal{A}$  est un anneau principal et intègre alors :

$$\text{sans torsion} = \text{libre}.$$

3. Si  $\mathcal{A}$  est un anneau héréditaire, alors pour un module de type fini :

$$\text{sans torsion} = \text{projectif}.$$

4. ([166, Théorème 4.100, p. 169]) Si  $\mathcal{A} = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  alors pour un module de type fini :

$$\text{projectif} = \text{libre}.$$

5. ([145], [170, Théorème 2.2]) Si  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1$ , alors,

$$\text{stablement libre} = \text{projectif},$$

et pour tous les modules de rang au moins 2 :

$$\text{projectif} = \text{libre}.$$

**Définition 2.3.7.** ([135, p. 17]) Soient  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathcal{A}}(\cdot R_1)$  un module de présentation finie et le complexe de  $\mathcal{A}$ -modules suivant

$$\dots \xleftarrow{R_{i+1}\cdot} \mathcal{F}^{r_i} \xleftarrow{R_i\cdot} \mathcal{F}^{r_{i-1}} \dots \xleftarrow{R_2\cdot} \mathcal{F}^{r_1} \xleftarrow{R_1\cdot} \mathcal{F}^{r_0} \xleftarrow{\quad} 0,$$

avec  $(R_i)(\eta) = R_i \eta$  pour tout  $i$ . On définit alors :

$$\begin{cases} \text{ext}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \cong \ker_{\mathcal{F}}(R_1\cdot) \\ \text{ext}_{\mathcal{A}}^i(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \cong \ker_{\mathcal{F}}(R_{i+1}\cdot) / \text{im}_{\mathcal{F}}(R_i\cdot), \quad i \geq 1. \end{cases}$$

**Remarque 2.3.4.** Cette définition est bien posée, car  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^i(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  ne dépend que du module à gauche  $\mathcal{M}$  et non pas du choix d'une résolution. Voir, par exemple, ([166, Proposition 6.40, p. 365]).

**Définition 2.3.8.** Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module finiment présenté par  $R \in \mathcal{A}^{m \times l}$ , c'est-à-dire, tel que  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathcal{A}}(.R) = \mathcal{A}^{1 \times l} / (\mathcal{A}^{1 \times m} R)$ . On appelle le *transposé d'Auslander* de  $\mathcal{M}$ , noté  $T(\mathcal{M})$ , le module suivant :

$$T(\mathcal{M}) = \mathcal{A}^{m \times 1} / (R \mathcal{A}^{l \times 1}).$$

On a ainsi la suite exacte de  $\mathcal{A}$ -modules à droite suivante :

$$0 \longleftarrow T(\mathcal{M}) \longleftarrow \mathcal{A}^{m \times 1} \xleftarrow{R} \mathcal{A}^{l \times 1}.$$

**Théorème 2.3.3.** ([135]) Soient  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$  et  $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{1 \times p} / (\mathcal{A}^{1 \times q} R)$ .

Les trois assertions suivantes sont vérifiées :

1. Il existe un  $\mathcal{A}$ -isomorphisme à gauche entre  $t(\mathcal{M})$  et  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^1(T(\mathcal{M}), \mathcal{A})$ , i.e.,

$$t(\mathcal{M}) \cong \text{ext}_{\mathcal{A}}^1(T(\mathcal{M}), \mathcal{A}).$$

2. Le module  $\mathcal{M}$  est un module à gauche sans torsion si, et seulement si,  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^1(T(\mathcal{M}), \mathcal{A}) = 0$ .
3. Le module  $\mathcal{M}$  est projectif si, et seulement si,  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^i(T(\mathcal{M}), \mathcal{A}) = 0$ , pour  $i = 0, 1$ .

**Définition 2.3.9.** Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche. On dit que  $\mathcal{M}$  est *plat* si le foncteur

$$\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$$

est exact à gauche, c'est-à-dire qu'il transpose toute suite exacte courte de  $\mathcal{A}$ -modules à droite

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'' \longrightarrow 0,$$

sur une suite exacte de groupes abéliens (c'est-à-dire, de  $\mathbb{Z}$ -modules)

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}'' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

## 2.4 Aspects effectifs

### 2.4.1 Une théorie de l'élimination effective

Dans la théorie des systèmes linéaires, une question importante est l'étude de l'existence d'une solution  $h \in \mathcal{F}^{p \times 1}$  d'un système linéaire inhomogène de la forme  $Rh = g$ , où  $g \in \mathcal{F}^{q \times 1}$  et  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$  sont fixés. Notez que tous ces systèmes linéaires inhomogènes n'admettent pas nécessairement de solution, car si  $\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times q}$  est tel que  $\lambda R = 0$ , alors il faut que  $\lambda g = \lambda R h = 0$ , c'est-à-dire que  $g$  doit satisfaire  $\lambda g = 0$ . Cette équation est appelée une *condition de compatibilité* du système linéaire inhomogène  $Rh = g$ .

Par conséquent, pour étudier les conditions de compatibilité de  $Rh = g$ , nous devons caractériser le noyau à gauche de la matrice  $R$ , c'est-à-dire  $\ker_{\mathcal{A}}(.R) = \{\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times q} \mid \lambda R = 0\}$ . Une question naturelle est de déterminer si  $\ker_{\mathcal{A}}(.R)$  est un module à gauche sur  $\mathcal{A}$  de type fini, c'est-à-dire, finiment engendré. Si ce module n'est pas de type fini, il est alors impossible d'obtenir une description finie et explicite d'un ensemble de générateurs de  $\ker_{\mathcal{A}}(.R)$ , et donc des conditions de compatibilité. Si  $\mathcal{A}$  peut être prouvé comme étant un anneau noethérien à gauche, alors un résultat classique de la théorie des modules ([171, 166]) implique que  $\ker_{\mathcal{A}}(.R)$  est de type fini car sous- $\mathcal{A}$ -module du module noethérien  $\mathcal{A}^{1 \times q}$ .

Un autre point montrant l'importance du calcul explicite du noyau à gauche de matrices d'opérateurs est le suivant. Imaginons que l'on s'intéresse à un système de la forme suivante

$$R_1 y_1(t) + R_2 y_2(t) = 0, \quad R_1 \in \mathcal{A}^{q \times p_1}, \quad R_2 \in \mathcal{A}^{q \times p_2}, \quad (2.14)$$

où  $y_1$  et  $y_2$  sont deux ensembles de vecteurs inconnus et que l'on cherche à déterminer un système faisant intervenir uniquement l'inconnue  $y_1$ . Autrement dit, on cherche à *éliminer* l'inconnue  $y_2$  du système (2.14). Si on peut calculer

explicitement un ensemble de générateurs de  $\ker_{\mathcal{A}}(.R_2)$  concaténés dans une matrice  $S_2 \in \mathcal{A}^{r \times q}$ , c'est-à-dire,  $\ker_{\mathcal{A}}(.R_2) = \text{im}_{\mathcal{A}}(.S_2)$ , alors on peut appliquer  $S_2$  au système (2.14) et obtenir le système en  $y_1$  uniquement :

$$S_2 R_1 y_1(t) + S_2 R_2 y_2(t) = 0 \implies S_2 R_1 y_1(t) = 0.$$

Ainsi, calculer des noyaux à gauche de matrices permet de faire de l'élimination d'inconnues. Voir [140] pour plus de détails.

Notons que la recherche des conditions de compatibilités du système inhomogène  $Rh = g$  est un cas particulier du problème d'élimination précédent : cas où  $R_1 = R$  et  $R_2 = I_q$ .

Le but de ce mémoire est de développer une telle théorie de l'élimination effective pour  $\mathcal{A} = \mathbb{I}_1$ . Une telle théorie n'existe pas contrairement au cas  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1$  que nous allons maintenant rappeler.

## 2.4.2 Calcul effectif dans l'anneau $\mathbb{A}_1$

Les *bases de Gröbner* ont été introduites par Buchberger dans les années 1960 pour l'étude des systèmes polynomiaux à plusieurs variables. L'objectif était de généraliser la division euclidienne sur  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{k}[x]$  à l'anneau  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$  où  $\mathbb{k}$  est un corps commutatif. En effet, en raison du caractère non euclidien de  $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$ , le reste  $R$  obtenu lors de la division multivariée d'un polynôme  $Q$  par plusieurs polynômes  $P_1, \dots, P_r$  n'est en général pas unique, et ne permet pas de déterminer directement si  $Q$  appartient à l'idéal engendré par  $P_1, \dots, P_r$ . Pour plus d'informations, voir, par exemple, [21].

Une base de Gröbner pour un idéal  $I \subset \mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$  est alors une famille de polynômes  $B$  telle que  $Q \in I$  si, et seulement si, tout reste de la division multivariée de  $Q$  par  $B$  est nul. De cette manière, les bases de Gröbner généralisent la division euclidienne au cas multivarié.

L'existence et le calcul effectif de telles bases reposent sur l'*algorithme de Buchberger*, qui a été depuis largement approfondi, optimisé et implémenté dans de nombreux systèmes de calcul formel.

Dans les années 1980 et 1990, la théorie a été étendue aux *algèbres non commutatives*, telles que les algèbres libres non commutatives  $\mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  ou encore les *algèbres de Ore*, dont font partie les *algèbres de Weyl* (voir [124, 56, 117]).

Dans les années 2000–2010, Apel et Levandovskyy ont développé une théorie des bases de Gröbner adaptée à une classe d'algèbres plus générale, les *G-algèbres*, qui englobent notamment les algèbres libres non commutatives et les algèbres de Ore (voir [112, 111, 113]).

Dans cette section, nous nous concentrerons exclusivement sur le cas particulier de l'algèbre de Weyl en une variable  $\mathbb{A}_1$ . Voir, par exemple, [85, 49]. Pour une approche pédagogique et effective des bases de Gröbner sur les algèbres de Weyl, le lecteur peut se référer à [34].

Nous allons commencer par introduire une relation d'ordre sur  $\mathbb{A}_1$ .

**Définition 2.4.1.** ([34, Définition 12.2]) Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble quelconque. Un *ordre total* sur  $\mathcal{E}$  est une relation d'ordre total  $\leq$  sur  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire, une relation binaire vérifiant pour tous  $a, b, c \in \mathcal{E}$  :

- (a) (*Réflexivité*)  $a \leq a$ .
- (b) (*Antisymétrie*) Si  $a \leq b$  et  $b \leq a$ , alors  $a = b$ .
- (c) (*Transitivité*) Si  $a \leq b$  et  $b \leq c$ , alors  $a \leq c$ .
- (d) (*Totalité*) Pour tous  $a$  et  $b$ , soit  $a \leq b$ , soit  $b \leq a$ .

**Remarque 2.4.1.** Si  $\leq$  est un ordre total et  $a, b \in \mathcal{E}$ , on écrit  $a < b$  si  $a \leq b$  et  $a \neq b$ ,  $b \geq a$  si  $a \leq b$ , et  $a > b$  si  $b < a$ .

**Définition 2.4.2.** Un ordre total  $\leq$  sur l'ensemble des opérateurs différentiels élémentaire (c'est-à-dire,  $t^\nu \partial^\mu$  pour tous  $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ ) est appelé un *ordre admissible* s'il satisfait les conditions suivantes :

- (a)  $1 \leq t^\nu \partial^\mu$  pour tous  $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ .

(b) (*Compatibilité avec le produit*) Pour tous  $\lambda, \lambda', \kappa, \kappa', \nu, \mu \in \mathbb{N}$ , si  $t^\lambda \partial^\kappa \leq t^{\lambda'} \partial^{\kappa'}$ , alors on a

$$t^{\lambda+\nu} \partial^{\kappa+\mu} \leq t^{\lambda'+\nu} \partial^{\kappa'+\mu}.$$

**Exemple 2.4.1.** Nous définissons un ordre admissible  $\leq$  sur les monômes  $t^i \partial^j$  par :

- On compare d'abord le degré total  $i + j$  : un monôme de plus petit degré total est considéré comme plus petit.
- En cas d'égalité du degré total, on compare le nombre de dérivées : plus il y a de dérivées  $\partial$ , plus le monôme est considéré petit.

Formellement, nous avons :

$$t^i \partial^j \leq t^{i'} \partial^{j'} \quad \text{si} \quad \begin{cases} i + j < i' + j' \\ \text{ou} \\ i + j = i' + j' \quad \text{et} \quad j > j'. \end{cases}$$

Ainsi,  $t^2 < t^3$ ,  $\partial^3 < \partial^2$ ,  $t^2 \partial^2 < t^2 \partial^3$  et  $t \partial^3 < t^2 \partial^2$ .

**Définition 2.4.3.** Soit  $a = \sum_{j=0}^n a_j(t) \partial^j \in \mathbb{A}_1$  écrit sous forme normale. En développant les polynômes  $a_j$  on peut écrire

$$a = \sum_{i,j} a_{i,j} t^i \partial^j.$$

Alors, on appelle *support de a*, noté  $\text{supp}(a)$ , la quantité suivante :

$$\text{supp}(a) = \{(i, j) \mid a_{i,j} \neq 0\}.$$

**Exemple 2.4.2.** Prenons  $a = (1 + t^2) \partial = 1 \partial + t^2 \partial$  alors nous avons  $\text{supp}(a) = \{(0, 1), (2, 1)\}$ .

**Définition 2.4.4.** ([56, p. 36]) Soit  $\leq$  un ordre admissible sur les monômes  $t^i \partial^j$  de  $\mathbb{A}_1$  et  $a \in \mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$ . On définit :

- le *monôme dominant* de  $a$  relativement à  $\leq$  par :

$$\text{LM}_{\leq}(a) := \max\{t^i \partial^j \mid (i, j) \in \text{supp}(a)\},$$

de sorte que  $\text{LM}_{\leq}(a) = t^{i_0} \partial^{j_0}$  avec  $(i_0, j_0) \in \text{supp}(a)$  et  $e \leq \text{LM}_{\leq}(a)$  pour tout  $e = t^i \partial^j$  avec  $(i, j) \in \text{supp}(a)$ .

- le *coefficient dominant*  $\text{LC}_{\leq}(a)$  de  $a$  relativement à  $\leq$  comme le coefficient de  $\mathbb{k}$  correspondant à  $\text{LM}_{\leq}(a)$ ,
- le *terme dominant*  $\text{LT}_{\leq}(a)$  de  $a$  relativement à  $\leq$  est défini par

$$\text{LT}_{\leq}(a) = \text{LC}_{\leq}(a) \text{LM}_{\leq}(a).$$

Ainsi, nous avons :

$$\text{LM}_{\leq}(a - \text{LT}_{\leq}(a)) < \text{LM}_{\leq}(a).$$

**Exemple 2.4.3.** Prenons  $a = 3t^3 \partial + 2t^2 \partial^2 + 5t \partial^4 + 7 \partial^5 \in \mathbb{A}_1$ .

Terme $\alpha t^i \partial^j$	Degré total $i + j$	Nombre de dérivées $j$
$2t^2 \partial^2$	$2 + 2 = 4$	2
$5t \partial^4$	$1 + 4 = 5$	4
$3t^3 \partial$	$3 + 1 = 4$	1
$7 \partial^5$	$0 + 5 = 5$	5

Ainsi, nous avons :

- $\text{LM}_{\leq}(d) = t \partial^4$  (sans coefficient).
- $\text{LT}_{\leq}(d) = 5t \partial^4$  (avec le coefficient).

—  $LC_{\leq}(d) = 5$ .

**Proposition 2.4.1.** ([34, Proposition 12.4])

Soit  $\leq$  un ordre admissible et soient  $a_1, a_2 \in \mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$ . Alors :

- (a)  $LT_{\leq}(a_1 a_2) = LT_{\leq}(a_1) LT_{\leq}(a_2)$ .
- (b)  $LM_{\leq}(a_1 a_2) = LM_{\leq}(a_1) LM_{\leq}(a_2)$ .

**Définition 2.4.5.** Soit  $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}_1$  une famille de monômes. On appelle *idéal monomial engendré par  $\mathcal{F}$* , qu'on note  $LMI(\mathcal{F})$ , l'idéal à gauche de  $\mathbb{A}_1$  suivant

$$LMI(\mathcal{F}) := \left\{ \sum_{k \in \mathcal{K}} a_k f_k, \quad a_k \in \mathbb{A}_1, f_k \in \mathcal{F}, \mathcal{K} \subset \mathbb{N}, |\mathcal{K}| < \infty \right\}$$

Par extension, si  $\mathcal{F}$  est une famille d'éléments de  $\mathbb{A}_1$ , on note  $LMI(\mathcal{F})$ , l'idéal engendré par  $\{LM(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ .

**Définition 2.4.6.** Soit  $\leq$  un ordre admissible et soit  $\mathcal{I}$  un idéal à gauche de  $\mathbb{A}_1$ . Une *base de Gröbner* de  $\mathcal{I}$  par rapport à  $\leq$  est un sous-ensemble  $G \subseteq \mathcal{I}$  tel que le cardinal de  $G$  est fini et  $LMI_{\leq}(\mathcal{I}) = LMI_{\leq}(G)$ .

**Proposition 2.4.2.** ([34, Proposition 12.7],[56, Théorème 4, p. 82]) Soit  $\leq$  un ordre admissible et  $\mathcal{I}$  un idéal à gauche de  $\mathbb{A}_1$ . Alors, nous avons :

- (a)  $\mathcal{I}$  admet une base de Gröbner pour  $\leq$ .
- (b) Si  $G$  est une base de Gröbner pour  $\leq$  de  $\mathcal{I}$ , alors  $\mathcal{I} = \sum_{g \in G} \mathbb{A}_1 g$ .

**Définition 2.4.7.** Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathbb{A}_1$ . Une base de Gröbner de  $\mathcal{I}$  est dite *universelle* si c'est une base de Gröbner de  $\mathcal{I}$  pour tout ordre admissible  $\leq$ .

**Théorème 2.4.1.** ([34, Théorème 12.16]) *Tout idéal à gauche  $\mathcal{I}$  de  $\mathbb{A}_1$  admet une base de Gröbner universelle.*

Pour le pseudo-code de l'algorithme de Buchberger adapté au cas non commutatif d'une algèbre de Ore et donc en particulier de  $\mathbb{A}_1$ , nous référons par exemple à ([56, p. 84]).

Une technique importante utilisant les bases de Gröbner est l'*élimination de variables*. Par le biais d'un ordre d'élimination  $\leq$ , c'est-à-dire un ordre admissible qui priorise certaines variables par rapport aux autres, on peut contraindre l'algorithme de Buchberger à produire une base de Gröbner dont les éléments sont de préférence des polynômes dans les variables « petites » (par rapport à  $\leq$ ). Ainsi, les plus grandes variables par rapport à  $\leq$  sont éliminées (autant que possible). [57]

Plusieurs logiciels et packages permettent de calculer des bases de Gröbner dans l'algèbre des opérateurs différentiels  $\mathbb{A}_1$ , parmi lesquels `Singular` (avec l'extension `Plural`), `Maple` (avec le package `Ore_Algebra`), `Macaulay2` (avec le package `Dmodules`), ainsi que `Mathematica` (via le package `HolonomicFunctions`).

Expliquons maintenant comment les bases de Gröbner permettent de calculer des noyaux à gauche, autrement dit des syzygies, des inverses à gauche et des factorisations de matrices.

### 2.4.2.1 Calcul de syzygies dans $\mathbb{A}_1$

**Définition 2.4.8.** ([56, p. 89]) Soit  $\mathcal{A}$  un anneau et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche.

Soit  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{M}^{1 \times n}$ . Une *syzygie* ou *relation* de  $y$  est un  $n$ -uplet  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{A}^{1 \times n}$  tel que :

$$\sum_{i=1}^n s_i y_i = 0.$$

L'ensemble de toutes les syzygies de  $y$  forme un sous-module de  $\mathcal{A}^n$ , appelé le (premier) *module de syzygies* ou *modules des relations* de  $y$ , noté  $\text{Syz}(y)$ . Par extension, si  $y$  est un système de générateurs d'un  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{M}$ , on note  $\text{Syz}(y) = \text{Syz}(\mathcal{M})$ . Voir aussi la remarque A.1.8.

**Remarque 2.4.2.** Le terme syzygie est une composition des mots grecs *syn* (« ensemble ») et *zeugnyai* (« relier ») et a été utilisé pour la première fois en astronomie. Pendant une éclipse totale, le Soleil, la Terre et la Lune sont dits être en *syzygie*. Depuis les travaux de Hilbert, le sens du terme « syzygie » s'est élargi.

Les techniques de calcul des modules de syzygies sur  $\mathbb{A}_1$  utilisent les bases de Gröbner et la méthode d'élimination (voir section 6.1 de [21]). Soit  $\mathbb{A}_1$  l'algèbre de Weyl à une variable et  $\mathcal{M}$  un  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche de type fini, sous-module du module libre  $\mathbb{A}_1^{1 \times p}$ , avec  $p \in \mathbb{N}$ . Ainsi, un ensemble de générateurs de  $\mathcal{M}$  est constitué de vecteurs-lignes de  $\mathbb{A}_1^{1 \times p}$ . Voir [57].

---

**Algorithme 1** Calcul du module de syzygies  $\text{Syz}$  d'un sous-module de  $\mathbb{A}_1^p$  [57]

---

**Entrée** Une famille de générateurs  $R_1, \dots, R_q \in \mathbb{A}_1^p$  du  $\mathbb{A}_1$ -module  $\mathcal{M}$ .

**Sortie** Une matrice  $S \in \mathbb{A}_1^{r \times q}$  telle que  $\text{Syz}(\mathcal{M}) = \mathbb{A}_1^r S$ .

- 1: Construire l'ensemble  $P = \left\{ \sum_{j=1}^p R_{ij} \lambda_j - \mu_i \mid i = 1, \dots, q \right\}$ .
  - 2: Calculer une base de Gröbner  $G$  de  $P \subset \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{A}_1 \lambda_i \oplus \bigoplus_{j=1}^q \mathbb{A}_1 \mu_j$ , pour un ordre éliminant les  $\lambda_i$ .
  - 3: Extraire  $S = G \cap \bigoplus_{i=1}^q \mathbb{A}_1 \mu_i = \left\{ \sum_{j=1}^q S_{ij} \mu_j \mid i = 1, \dots, r \right\}$ .
  - 4: **Retourner** La matrice  $S \in \mathbb{A}_1^{r \times q}$  telle que  $\text{Syz}(\mathcal{M}) = \mathbb{A}_1^r S$ .
- 

**Remarque 2.4.3.** ([57]) Soit  $R \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  et considérons le  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche  $\mathcal{M} = \mathbb{A}_1^{1 \times p} / \mathbb{A}_1^{1 \times q} R$ . On peut alors appliquer l'algorithme 1 à l'ensemble formé par

$$R_i = (R_{i1} \dots R_{ip}) \in \mathbb{A}_1^{1 \times q} R \subset \mathbb{A}_1^{1 \times p}, \quad i = 1, \dots, q,$$

pour obtenir une matrice  $S = (S_{ij}) \in \mathbb{A}_1^{r \times q}$  telle que

$$\text{Syz}(\mathcal{M}) = \ker(.R) = \mathbb{A}_1^{1 \times r} S = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.S).$$

Nous obtenons alors la suite exacte de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche suivante :

$$\mathbb{A}_1^{1 \times r} \xrightarrow{.S} \mathbb{A}_1^{1 \times q} \xrightarrow{.R} \mathbb{A}_1^{1 \times p} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

En itérant ce processus, on obtient une résolution libre du  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche  $M$ . Voir la définition A.1.15 en annexe.

Cet algorithme est codé sous le nom de la commande `SyzygyModule` dans le package `OreModules` du système de calcul formel `Maple`.

### 2.4.2.2 Calcul d'inverse à gauche/droite dans $\mathbb{A}_1$

Calculer des inverses à gauche dans des anneaux non commutatifs, comme l'algèbre de Weyl  $\mathbb{A}_1$ , est un problème fondamental dans de nombreuses applications algébriques et analytiques. Cela permet notamment de résoudre des équations matricielles du type  $AX = B$ , en obtenant une solution explicite  $X = SB$  lorsque  $S$  est un inverse à gauche de  $A$ . Pour plus de détails, voir le chapitre 6.

En théorie des systèmes différentiels linéaires, ces inverses jouent un rôle crucial dans la *paramétrisation* des solutions, la *réduction de systèmes*, et l'étude de leur *contrôlabilité*. De plus, ils interviennent dans la construction de résolutions libres et dans l'analyse de la structure des modules sur  $\mathbb{A}_1$ , apportant des informations précieuses sur les propriétés homologique du module associé au système étudié. Voir la section 2.3.2 et [57, 145].

---

**Algorithme 2** Calcul d'un inverse à gauche d'une matrice  $R \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  (si possible) [57]

---

**Entrée** Une matrice  $R = (R_{ij}) \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$ .

**Sortie** Une matrice  $S \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$  telle que  $SR = I_q$  si elle existe, sinon [].

- 1: Construire l'ensemble  $P = \left\{ \sum_{j=1}^p R_{ij} \lambda_j - \mu_i \mid i = 1, \dots, q \right\}$ .
  - 2: Calculer une base de Gröbner  $G$  de  $P$  dans l'anneau  $\bigoplus_{j=1}^p \mathbb{A}_1 \lambda_j \oplus \bigoplus_{i=1}^q \mathbb{A}_1 \mu_i$  pour un ordre éliminant les  $\lambda_j$ .
  - 3: Extraire deux matrices  $L$  et  $M$  telles que les lignes de  $L(\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T$  et  $M(\mu_1, \dots, \mu_q)^T$  correspondent aux relations contenues dans  $G$ .
  - 4: **Si**  $L$  est inversible et  $L^{-1}M \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$  **alors**
  - 5:     **Retourner**  $S = L^{-1}M$
  - 6: **Sinon**
  - 7:     **Retourner** []
  - 8: **fin Si**
- 

Cette fonction est implantée sous le nom de `LeftInverse` dans le package `OreModules`.

**Proposition 2.4.3.** ([57, 56, 73]) *Le  $\mathbb{A}_1$ -anti-morphisme  $\theta$  défini par*

$$\theta(t) = t \quad \text{et} \quad \theta(\partial) = -\partial$$

*est une involution de  $\mathbb{A}_1$ .*

*Démonstration.* Il est facile de vérifier que  $\theta^2 = 1$ . De plus,  $\theta$  est compatible avec la règle de commutation  $\partial t = t\partial + 1$ . En effet, nous avons :

$$\theta(1) = \theta(\partial t - t\partial) = \theta(t)\theta(\partial) - \theta(\partial)\theta(t) = t(-\partial) - t(-\partial) = -t\partial + \partial t = 1.$$

□

**Remarque 2.4.4.** Nous pouvons également calculer un inverse à droite  $S \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  de  $R \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  (tel que  $RS = I_q$ ) en procédant de la manière suivante :

$$\text{Right-Inverse}(R) = \theta(\text{Left-Inverse}(\theta(R))).$$

Nous présentons à présent un exemple de calcul de résolution libre d'un module sur  $\mathbb{A}_1(\mathbb{Q})$ , faisant intervenir le calcul de syzygies. Nous montrerons ensuite comment simplifier cette résolution en la réduisant au moyen du calcul d'un inverse à droite, afin d'obtenir une suite de longueur minimale.

**Exemple 2.4.4.** Soient  $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_1(\mathbb{Q})$  et  $\mathcal{M} = \mathbb{A}_1^{1 \times 2} / (\mathbb{A}_1^{1 \times 2} R_1)$  un  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche, où la matrice  $R_1$  est définie par :

$$R_1 = \begin{pmatrix} -t^2 & t\partial - 1 \\ -t\partial - 2 & \partial^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_1^{2 \times 2}.$$

On peut vérifier que  $\mathcal{M}$  admet la résolution libre suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{A}_1 \xrightarrow{\cdot R_2} \mathbb{A}_1^{1 \times 2} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathbb{A}_1^{1 \times 2} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0, \quad (2.15)$$

avec  $R_2 = \begin{pmatrix} \partial & -t \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_1^{1 \times 2}$ .

De plus, la matrice

$$S_2 = \begin{pmatrix} t \\ \partial \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_1^{2 \times 1}$$

est une inverse à droite de  $R_2$ . En posant  $T_1 = (R_1 \ S_2) \in \mathbb{A}_1^{2 \times 3}$ , on obtient, d'après la proposition A.1.4 en annexe, la résolution libre minimale suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{A}_1^{1 \times 2} \xrightarrow{\cdot T_1} \mathbb{A}_1^{1 \times 3} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0. \quad (2.16)$$

Enfin, on vérifie que  $T_1$  admet un inverse à droite

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \partial \\ \partial & 0 & -t \end{pmatrix}^T \in \mathbb{A}_1^{3 \times 2}.$$

Ainsi, la suite exacte (2.15) est scindée, ce qui implique que  $\mathcal{M} \oplus \mathbb{A}_1^{1 \times 2} \cong \mathbb{A}_1^{1 \times 3}$ , ce qui montre que  $\mathcal{M}$  est un  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche stablement libre de rang 1, que (2.16) est une résolution libre minimale de  $\mathcal{M}$ , et que  $T_1$  est une matrice de présentation minimale.

### 2.4.2.3 Factorisation sur $\mathbb{A}_1$

Tout mathématicien est convaincu que la factorisation joue un rôle fondamental. En algèbre différentielle non commutative, connaître une décomposition d'un opérateur différentiel (ou d'une matrice) en facteurs de degré plus faible permet d'analyser plus finement la structure du module associé, de résoudre plus simplement les équations différentielles correspondantes (en résolvant plusieurs sous-systèmes via des intégrations en cascade), et d'accéder à des résolutions libres plus courtes, notamment à travers le calcul d'inverse gauche qui est un cas particulier du problème de factorisation. Voir la sous-section précédente. Ce problème de factorisation intervient également dans l'étude de propriétés analytiques des systèmes différentiels comme la multiplicité ou la régularité des solutions.

Nous présentons ci-dessous un algorithme permettant de factoriser, quand c'est possible, une matrice d'opérateurs différentiels.

---

**Algorithme 3** Factorisation à gauche : calcul de  $R''$  tel que  $R = R''R'$  (quand c'est possible)

---

**Entrée** Deux matrices  $R \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  et  $R' \in \mathbb{A}_1^{q' \times p}$ .

**Sortie** Une matrice  $R'' \in \mathbb{A}_1^{q \times q'}$  telle que  $R = R''R'$ , ou bien  $[]$  si une telle factorisation n'existe pas.

- 1: Introduire des indéterminées  $\eta_1, \dots, \eta_p, \zeta_1, \dots, \zeta_{q'}$  sur  $\mathbb{A}_1$ .
  - 2: Définir l'ensemble  $P := \left\{ \sum_{j=1}^p R'_{ij} \eta_j - \zeta_i \mid i = 1, \dots, q' \right\}$ .
  - 3: Calculer une base de Gröbner  $G$  de  $P$  dans le module libre  $\bigoplus_{j=1}^p \mathbb{A}_1 \eta_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{q'} \mathbb{A}_1 \zeta_i$ , avec un ordre éliminant les  $\eta_j$ .
  - 4: Définir l'ensemble  $Q := \left\{ \sum_{j=1}^p R_{kj} \eta_j \mid k = 1, \dots, q \right\}$ .
  - 5: **Pour**  $k = 1$  à  $q$  **faire**
  - 6: Réduire  $Q_k$  modulo  $G$  pour obtenir  $H_k$ . (Forme normale)
  - 7: **Si** la forme normale  $H_k$  est non nulle, c'est-à-dire contient un  $\eta_j$ , **alors**
  - 8: **Retourner**  $[]$  ▷ La factorisation échoue
  - 9: **fin Si**
  - 10: **fin Pour**
  - 11: Construire  $R'' = (R''_{ij}) \in \mathbb{A}_1^{q \times q'}$  tel que  $H_k = \sum_{j=1}^{q'} R''_{kj} \zeta_j$  pour  $k = 1, \dots, q$ .
  - 12: **Retourner**  $R''$ .
-

Pour plus de détails, voir [64].

La fonction `Factorize` du package `OreModules` de Maple permet de factoriser, si possible, des matrices d'opérateurs dans des algèbres de Ore telles que  $\mathbb{A}_1$ .

La fonction `Factorize` prend en entrée deux arguments : la matrice que l'on souhaite factoriser  $R$  et la matrice par laquelle on souhaite factoriser à gauche  $R'$ . Ainsi, comme précédemment, grâce à l'involution  $\theta$  de  $\mathbb{A}_1$ , il est possible de factoriser à droite avec la manipulation suivante :

$$\text{Right-Factorize}(R) = \theta(\text{Factorize}(\theta(R), \theta(R'))).$$

Ainsi, une fois la théorie des bases de Gröbner développée sur  $\mathbb{A}_1$ , il devient possible d'effectuer les calculs classiques d'élimination tels que le calcul des noyaux à gauche ou à droite de matrices à coefficients dans  $\mathbb{A}_1$ , la mise sous forme normale, ou encore la recherche d'inverses à gauche/droite et factoriser. Voir [21, 56, 111, 112, 64].

Ces fonctionnalités sont notamment implémentées dans le package `OreModules` de Maple, développé par Chyzak, Quadrat, Robertz. On y trouve des fonctions comme : `Factorize`, `LeftInverse`, `RightInverse`, `GeneralizedInverse`, `SyzygyModule`, `FreeResolution`, etc.

Les mêmes outils sont également disponibles dans le logiciel libre `Singular`, via le package `Plural`. Ces résultats se généralisent au cas de l'algèbre de Weyl en  $n$  variables. Le lecteur intéressé pourra se référer à [60, 56, 124, 121, 145].

### 2.4.3 Calcul effectif dans $\mathbb{B}_1$

Considérons l'anneau  $\mathbb{A}_1$ , c'est-à-dire la première algèbre de Weyl, engendrée par  $t$  et  $\partial$  avec la relation de commutation  $\partial t - t \partial = 1$ . Se référer à la section 2.1 pour les détails.

Soit  $S = \{\partial^i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{A}_1$ , un sous-ensemble multiplicativement stable. On note  $\mathbb{B}_1 = S^{-1}\mathbb{A}_1$  la localisation de  $\mathbb{A}_1$  relativement à  $S$ , c'est-à-dire l'anneau obtenu en rendant  $\partial$  inversible. Cet anneau  $\mathbb{B}_1$  ne satisfait pas les conditions de Ore au sens de Chyzk-Salvy [60], et en particulier, il n'est pas une algèbre de Ore. Par conséquent, la théorie standard des bases de Gröbner pour les algèbres de Ore ne peut pas s'y appliquer directement. Il est alors nécessaire d'utiliser une généralisation plus souple, comme celle introduite par Levandovskyy dans le cadre des  $G$ -algèbres, qui permet d'étendre les méthodes de calcul algébrique effectif, notamment les bases de Gröbner, à des algèbres non-Ore comme  $\mathbb{B}_1$ . Voir [112]

**Définition 2.4.9.** [112] Soit  $\mathcal{A}$  un anneau intègre. Un sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{A}$  est dit *multiplicativement stable* si :

- $1 \in S$ ,
- $0 \notin S$
- $\forall s, t \in S$ , on a  $st \in S$ .

De plus,  $S$  est appelé un *ensemble de Ore à gauche* si  $S$  est multiplicativement stable et satisfait la condition de Ore à gauche :

$$\forall s \in S, \forall r \in \mathcal{A}, \quad \exists \tilde{s} \in S, \exists \tilde{r} \in \mathcal{A}, \quad \tilde{s}r = \tilde{r}s.$$

**Définition 2.4.10.** [112] Soit  $S$  un sous-ensemble multiplicativement stable d'un anneau intègre  $\mathcal{A}$ . Un anneau  $\mathcal{A}_S$ , muni d'un homomorphisme injectif  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_S$ , est appelé une *localisation de Ore à gauche* de  $\mathcal{A}$  en  $S$  si :

1. Pour tout  $s \in S$ , l'image  $\varphi(s)$  est inversible dans  $\mathcal{A}_S$  ;
2. Pour tout  $x \in \mathcal{A}_S$ , il existe  $s \in S$  et  $r \in \mathcal{A}$  tels que

$$x = \varphi(s)^{-1}\varphi(r).$$

Soit  $\mathbb{A}_1$  l'algèbre de Weyl à une variable. On considère le sous-ensemble  $S = \{\partial^i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{A}_1$ . Ce sous-ensemble est multiplicativement stable, car  $\partial^i \partial^j = \partial^{i+j} \in S$  pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$ , ne contient pas zéro et vérifie la propriété de Ore à gauche.

On note alors  $\mathcal{B} = S^{-1}\mathbb{A}_1$ . L'anneau  $\mathcal{B}$ , muni de l'homomorphisme canonique  $\varphi : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$  défini par  $\varphi(a) = 1^{-1}a$ , constitue une localisation à gauche de  $\mathbb{A}_1$  en  $S$ , au sens de la définition précédente. En effet, nous avons :

- Les éléments de  $S$  deviennent inversibles dans  $\mathcal{B}$ , avec  $\varphi(\partial^i)^{-1} = \partial^{-i} \in \mathcal{B}$ .

— Tout élément de  $\mathcal{B}$  s'écrit sous la forme  $\varphi(\partial^i)^{-1}\varphi(a) = \partial^{-i}a$ , pour un certain  $i \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{A}_1$ .

Nous avons ainsi que  $\mathcal{B} \cong \mathbb{B}_1$  via l'isomorphisme d'anneaux suivant

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{B} = S^{-1}\mathbb{A}_1 &\longrightarrow \mathbb{B}_1 \\ \varphi(\partial) &\longmapsto \partial \pmod{\langle e \rangle} = \sigma, \\ \varphi(\partial)^{-1} &\longmapsto I \pmod{\langle e \rangle} = \sigma^{-1}, \\ \varphi(t) &\longmapsto t \pmod{\langle e \rangle} = \sigma^{-1}H, \end{aligned}$$

où  $\varphi : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$  est le morphisme canonique d'inclusion et où on identifie  $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{L}_1$  via la proposition 2.2.5.

**Définition 2.4.11.** [112] Soient  $\mathbb{k}$  un corps,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $1 \leq i < j \leq n$ . On considère des constantes non nulles  $c_{ij} \in \mathbb{k}$  et des polynômes  $d_{ij} \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ .

On suppose qu'il existe un ordre total admissible  $\leq$  sur les monômes de  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , tel que, pour tout  $1 \leq i < j \leq n$ , nous ayons :

- soit  $d_{ij} = 0$
- soit le monôme dominant  $\text{LM}(d_{ij})$ , relativement à  $\leq$ , est strictement plus petit que  $x_i x_j$ .

Alors, l'algèbre définie par la présentation

$$\mathcal{A} := \mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n \mid \{x_j x_i = c_{ij} x_i x_j + d_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$$

est appelée une *G-algèbre* si l'ensemble  $\{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$  forme une  $\mathbb{k}$ -base de  $\mathcal{A}$ .

**Exemple 2.4.5.** ([112, Exemple 22]) L'anneau des polynômes commutatifs en  $n$  variables  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , les algèbres de Ore et en particulier les algèbres de Weyl en  $n$  variables sont des *G-algèbres*. Ainsi,  $\mathbb{A}_1$  est une *G-algèbre*.

**Remarque 2.4.5.** L'algèbre de Weyl  $\mathbb{A}_1$  est une *G-algèbre*. En revanche, son localisé  $\mathbb{B}_1 = S^{-1}\mathbb{A}_1$ , où  $S = \{\partial^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ , n'est plus une *G-algèbre*, car elle contient des inverses des générateurs ( $\partial^{-1}$ ). La présence de puissances négatives sort du cadre des *G-algèbres*. Voir [111].

Dans ce travail, nous ne détaillerons pas l'ensemble des aspects techniques liés à la théorie des *G-algèbres*, qui peut s'avérer complexe. Toutefois, il est important de noter qu'il existe des implémentations efficaces permettant le calcul de bases de Gröbner dans ce cadre algébrique, notamment dans le cas de certaines localisations spécifiques. C'est précisément dans ce contexte que s'inscrit la proposition suivante, qui met en lumière un cas particulier d'intérêt pour nos applications.

**Proposition 2.4.4.** ([112, Paragraphe 7]) *Considérons une G-algèbre  $\mathcal{A}$  engendrée par les variables  $x_1, \dots, x_n$ . De plus, supposons que  $g_1, \dots, g_t \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$  sont tels que  $S := [g_1, \dots, g_t]$  est un ensemble de Ore à gauche dans  $\mathcal{A}$ , et que pour les variables  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  apparaissant dans les  $g_i$ , l'anneau  $\mathbb{k}[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$  forme un sous-anneau polynomial commutatif de  $\mathcal{A}$ . Alors, on peut calculer des bases de Gröbner dans  $S^{-1}\mathcal{A}$ .*

**Corollaire 2.4.1.** *On peut calculer des bases de Gröbner sur  $\mathbb{B}_1 = S^{-1}\mathbb{A}_1$ .*

*Démonstration.* En effet,  $S = \{\partial^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble de Ore et  $\mathbb{k}[\partial]$  est un sous anneau de  $\mathbb{A}_1$  commutatif.  $\square$

**Proposition 2.4.5.** *Soit  $S \subseteq \mathcal{A}$  une partie multiplicative satisfaisant les conditions de Ore à gauche. Alors la localisation de Ore  $S^{-1}\mathcal{A}$  existe et est un module plat à gauche (respectivement à droite) sur  $\mathcal{A}$ .*

Les calculs algébriques effectués sur l'algèbre localisée  $\mathbb{B}_1$  sont pris implantés dans la bibliothèque `olga.lib` (acronyme de *Ore localization in G-algebras*), développée pour le système de calcul formel `Singular:Plural`. Cette bibliothèque implémente les algorithmes nécessaires au traitement des localisations dans le cadre plus général des *G-algèbres*. Elle est intégrée nativement dans la distribution officielle de `Singular`, [112].

# Chapitre 3

## Annulateurs d'évaluation sur $\mathbb{I}_1$

Comme montré explicitement à la fin de la section 2.2.2, l'anneau  $\mathbb{I}_1$  des opérateurs intégro-différentiels ordinaires à coefficients polynomiaux n'est pas noethérien à gauche, ni à droite. De plus, comme expliqué dans la section 2.14, le  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.T)$  caractérise l'ensemble de toutes les conditions de compatibilité du système linéaire inhomogène  $Th = g$ , où  $T \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  et  $g \in \mathcal{F}^{q \times 1}$  sont fixés,  $h \in \mathcal{F}^{p \times 1}$  est à déterminer, et  $\mathcal{F}$  est un  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche (par exemple,  $\mathcal{F} = \mathbb{k}[t]$ ,  $C^\infty(\mathbb{R})$ ).

Plus généralement, le fait que  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.T)$  soit un  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche finiment engendré pour toute matrice  $T$  à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$  joue un rôle important dans l'étude des modules sur  $\mathbb{I}_1$  et donc dans l'étude des systèmes intégro-différentiels linéaires à coefficients polynomiaux. Dans ce chapitre, nous abordons cette problématique en introduisant le concept d'*anneau cohérent* [171, 166] et en rappelant un résultat, dû à Bavula, qui affirme que  $\mathbb{I}_1$  est un anneau cohérent [16].

### 3.1 Caractérisation de la propriété de cohérence

Pour cette partie, on pourra se référer à la sous-partie A.1.2 en annexe qui explique, de façon détaillée, la notion de module de type fini (ou *finiment engendré*).

**Définition 3.1.1** ([171, 166]). Soit  $\mathcal{A}$  un anneau et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche de type fini engendré par  $g_1, \dots, g_n$ . Alors,  $\mathcal{M}$  est dit de *présentation finie* si le  $\mathcal{A}$ -module à gauche

$$\text{Syz}(\mathcal{M}) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{A}^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i = 0 \right\},$$

définissant les relations  $\mathcal{A}$ -linéaires à gauche entre les générateurs  $g_i$ , est finiment engendré. Le module  $\text{Syz}(\mathcal{M})$  ainsi défini est appelé *premier module des syzygies* de  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{M}$  est de présentation finie, il existe  $R_1, \dots, R_m \in \mathcal{A}^{1 \times n}$  tels que

$$\text{Syz}(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^m \mathcal{A} R_i = \mathcal{A}^{1 \times m} \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si on forme la matrice  $R \in \mathcal{A}^{m \times n}$  dont les lignes sont les  $R_i$ , alors nous avons

$$\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathcal{A}}(.R) = \mathcal{A}^{1 \times n} / (\mathcal{A}^{1 \times m} R).$$

On dit que  $R$  est une *matrice de présentation* de  $\mathcal{M}$  ou que  $\mathcal{M}$  est *finiment présenté* par  $R$ .

**Remarque 3.1.1.** En termes de générateurs et relations, un module  $\mathcal{M}$  de présentation finie est un module défini par un nombre fini de générateurs et un nombre fini de relations entre ces générateurs. En d'autres termes, en plus d'avoir un nombre fini de générateurs, toute relation entre ces générateurs est combinaison  $\mathcal{A}$ -linéaire finie à gauche d'un nombre fini de relations.

**Définition 3.1.2.** ([166, p. 142, 171])

Soient  $\mathcal{A}$  un anneau non nécessairement commutatif et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche/droite.

1. Le module  $\mathcal{M}$  est dit *cohérent à gauche/droite* si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module à gauche/droite de type fini et si tout sous-module de type fini de  $\mathcal{M}$  est également de présentation finie.
2. L'anneau  $\mathcal{A}$  est appelé *cohérent à gauche/droite* si  $\mathcal{A}$  est un  $\mathcal{A}$ -module cohérent, c'est-à-dire, si tous ses idéaux à gauche/droite de type fini, en tant que sous- $\mathcal{A}$ -modules du  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{A}$ , sont de présentation finie. Enfin, un anneau est dit *cohérent* s'il est cohérent à la fois à gauche et à droite.

**Exemple 3.1.1.** Les anneaux noethériens à gauche/droite sont des anneaux cohérents à gauche/droite, car tout sous  $\mathcal{A}$ -module de  $\mathcal{A}^{1 \times q}$  (respectivement de  $\mathcal{A}^{q \times 1}$ ) est de type fini [166, Exemple 3.64, p. 142]. Des exemples d'anneaux cohérents mais non noethériens sont l'anneau  $\mathbb{k}[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$  des polynômes en un nombre infini de variables  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  à coefficients dans un corps  $\mathbb{k}$ , ou l'anneau des fonctions entières sur  $\mathbb{C}$  [166, Exemple 3.64, p. 142].

**Remarque 3.1.2.** Un point de vue effectif et calculatoire, considérer un module de type fini  $\mathcal{M}$  engendré par  $g_1, \dots, g_n$  est équivalent à regarder l'image à gauche du  $\mathcal{A}$ -homomorphisme à gauche de  $\mathcal{A}^{1 \times n}$  dans  $\mathcal{M}$  qui à  $\lambda$  associe  $\lambda g$ , avec  $g = (g_1 \ \dots \ g_n)^T$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $\lambda g = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ , avec  $\lambda = (\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n) \in \mathcal{A}^{1 \times n}$ .

Si  $e_i$  le vecteur ligne de taille  $n$  ayant un 1 en position  $i$  et des 0 ailleurs, pour  $i = 1, \dots, n$ , nous avons alors l'épimorphisme introduit dans l'annexe A.2

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A}^{1 \times n} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ e_i &\longmapsto g_i, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pour que  $\mathcal{M}$  soit de présentation finie, la définition 3.1.1 indique que

$$\begin{aligned} \ker(\pi) &= \{\lambda = (\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n) \in \mathcal{A}^{1 \times n} \mid \pi(\lambda) = 0\} \\ &= \{\lambda = (\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n) \in \mathcal{A}^{1 \times n} \mid \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = 0\} \\ &= \ker_{\mathcal{A}}(.g) \end{aligned}$$

doit être de type fini. Ainsi, la cohérence (à gauche/ droite) de l'anneau  $\mathcal{A}$  revient à demander que le noyau (à gauche/droite), de n'importe quelle matrice colonne  $g \in \mathcal{A}^{p \times 1}$  ou de manière équivalente, de n'importe quelle matrice  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$ , soit de type fini.

Le résultat au cœur de ce mémoire est le résultat suivant.

**Théorème 3.1.1.** ([16, Théorème 4.4])

L'anneau  $\mathbb{I}_1$  est cohérent.

La prochaine proposition énonce la caractérisation de la propriété de cohérence utilisée par Bavula dans [16] pour démontrer le théorème 3.1.1.

**Proposition 3.1.1.** ([171, Proposition 13.3, p. 43]) Soit  $\mathcal{A}$  un anneau. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{A}$  est un anneau cohérent à gauche.
2. (a) Pour tout  $d \in \mathcal{A}$ ,  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(.d) = \{a \in \mathcal{A} \mid a d = 0\}$  est un idéal à gauche de type fini.  
(b) Pour tous les idéaux à gauche de type fini  $I$  et  $J$ , l'idéal  $I \cap J$  est de type fini.

Pour un anneau cohérent à droite  $\mathcal{A}$ ,  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(.d)$  est remplacé par l'idéal à droite  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(d.)$ , et les idéaux à gauche  $I$  et  $J$  sont des idéaux à droite.

*Démonstration.* Voir l'annexe A.2. □

Notons que le fait que  $\mathbb{I}_1$  possède une involution  $\theta$ , définie dans la proposition 2.2.7, implique que la propriété de cohérence à gauche entraîne la propriété de cohérence à droite, et réciproquement.

Il convient de noter que la démonstration du théorème 3.1.1 proposée dans [16] n'est pas effective : elle ne permet pas, en l'état, de dériver un algorithme de calcul de noyaux de matrices à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ . En particulier, la démonstration de Bavula repose sur la classification des *modules simples* sur  $\mathbb{I}_1$  ainsi que sur la notion de *longueur d'un module*, que nous n'avons pas su rendre effective. L'objectif principal de ce mémoire de thèse est de contribuer au développement d'une version effective de la propriété de cohérence de  $\mathbb{I}_1$  et à son implémentation dans le logiciel de calcul formel `Maple` [16, 69].

Comme expliqué dans la section 2.3, l'étude des systèmes linéaires d'équations intégro-différentielles à coefficients polynomiaux conduit naturellement à étudier des  $\mathbb{I}_1$ -modules à gauche de présentation finie. En utilisant la proposition A.1.2 de l'annexe A, ces modules sont des  $\mathbb{I}_1$ -modules cohérents à gauche. De plus, d'après la proposition A.1.3 de l'annexe A, les modules définis par des opérations algébriques standards (par exemple, intersection, somme (directe), quotient, noyau, image, conoyau) sont également cohérents. Ainsi, si la propriété de cohérence peut être rendue algorithmique et implémentée dans le logiciel de calcul formel `Maple`, alors une approche effective la théorie algébrique des systèmes linéaires d'équations intégro-différentielles à coefficients polynomiaux pourra être initiée. Voir section 2.3.

## 3.2 Calcul des générateurs de l'annulateur d'un opérateur de $\mathbb{I}_1$

Dans cette section, l'objectif est de calculer un ensemble fini de générateurs de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$ . Pour  $d \notin \langle e \rangle$ , une méthode de calcul des générateurs de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  a déjà été obtenue dans [144]. Nous allons en rappeler les grandes lignes dans le but de créer un texte consistant et auto-suffisant. En revanche, le cas où  $d \in \langle e \rangle$ , c'est-à-dire, le cas où  $d$  est un opérateur d'évaluation, était resté ouvert. Cela fait partie des apports de ce travail de thèse d'avoir caractérisé de manière effective  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  pour  $d \in \langle e \rangle$ . Ce résultat a été publié dans [66].

### 3.2.1 Calcul effectif d'une famille génératrice de l'annulateur d'un opérateur $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$

Cette section donne une méthode de calcul explicite des générateurs de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) = \{a \in \mathbb{I}_1 \mid ad = 0\}$  pour  $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ . Cette méthode, publiée dans [144], est due à Quadrat et Regensburger.

Soit  $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ . Expliquons comment déterminer un ensemble fini de générateurs de l'idéal à gauche  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) = \{a \in \mathbb{I}_1 \mid ad = 0\}$ . Grâce à l'involution  $\theta$ , définie dans la proposition 2.2.7, de manière équivalente, nous pouvons étudier  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d) = \{a \in \mathbb{I}_1 \mid da = 0\}$ .

Nous rappelons que les éléments de  $\mathbb{I}_1$  sont également des éléments de  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$ , c'est-à-dire qu'ils définissent des  $\mathbb{k}$ -endomorphismes de l'espace vectoriel de dimension infinie  $\mathbb{k}[t]$  (voir section 2.2.1). Pour faciliter la compréhension, si  $d \in \mathbb{I}_1$ , nous noterons par  $d \bullet$  l'endomorphisme de  $\mathbb{k}[t]$  associé, défini par :

$$\begin{aligned} d \bullet : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] \\ p &\longmapsto d(p). \end{aligned}$$

Il est clair que nous avons  $(d_1 d_2) \bullet = (d_1 \bullet) \circ (d_2 \bullet)$  pour tous  $d_1, d_2 \in \mathbb{I}_1$ . Introduisons quelques définitions supplémentaires.

**Définition 3.2.1.** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{k}$  et  $f : V \longrightarrow W$  une application  $\mathbb{k}$ -linéaire. Alors :

- L'application  $f$  est dite de *rang fini* si l'image  $\text{im}_{\mathbb{k}}(f)$  de  $f$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ .
- L'application  $f$  est dite *Fredholm* si  $f$  possède un noyau et un conoyau de dimension finie, où on rappelle que le conoyau de  $f$ , noté  $\text{coker}_{\mathbb{k}}(f)$ , est défini par  $\text{coker}_{\mathbb{k}}(f) := W/\text{im}_{\mathbb{k}}(f)$ .

Considérons  $a \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d)$ . Nous avons alors l'équivalence suivante :

$$da = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (da)(t^n) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, d(a(t^n)) = 0. \quad (3.2)$$

Ainsi, (3.2) implique l'inclusion des  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels  $\text{im}_{\mathbb{k}}(a \bullet) \subseteq \text{ker}_{\mathbb{k}}(d \bullet)$ .

Énonçons l'*alternative de Fredholm* dans le cadre défini ci-dessus.

**Proposition 3.2.1** ([16]). *Soit  $d \in \mathbb{I}_1$ . Alors, nous avons :*

- $d \in \langle e \rangle$  si et seulement si  $d \bullet$  est de rang fini.
- $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$  si et seulement si  $d \bullet$  est Fredholm.

En conséquence,  $d \bullet$  est soit Fredholm mais pas de rang fini, soit de rang fini mais pas Fredholm.

En appliquant la proposition 3.2.1 avec  $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ ,  $d$  est alors Fredholm, et en particulier, la dimension du  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel  $\ker_{\mathbb{k}}(d \bullet)$  est finie. Par conséquent, si  $a \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d \bullet)$ , alors l'inclusion  $\text{im}_{\mathbb{k}}(a \bullet) \subseteq \ker_{\mathbb{k}}(d \bullet)$  implique que  $\text{im}_{\mathbb{k}}(a \bullet)$  est également de dimension finie, c'est-à-dire que  $a$  est de rang fini, et donc, d'après la proposition 3.2.1,  $a \in \langle e \rangle$ . Ainsi,  $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$  et  $a \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d \bullet)$  impliquent  $a \in \langle e \rangle$ .

Une preuve alternative de ce résultat peut être obtenue comme suit. Étant donné que  $\langle e \rangle$  est un idéal bilatère de  $\mathbb{I}_1$ , nous pouvons considérer l'anneau quotient  $\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$  (voir la proposition 2.2.5) et nous avons alors la suite exacte courte canonique d'anneaux

$$0 \longrightarrow \langle e \rangle \longrightarrow \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{B}_1 \longrightarrow 0,$$

où  $\pi$  est la projection canonique de  $\mathbb{I}_1$  dans  $\mathbb{B}_1$ . Considérons maintenant l'endomorphisme de multiplication à droite  $d \bullet$  de  $\mathbb{I}_1$  défini par :

$$\begin{aligned} d \bullet : \mathbb{I}_1 &\longrightarrow \mathbb{I}_1 \\ b &\longmapsto db. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\langle e \rangle$  est un idéal de  $\mathbb{I}_1$ , nous avons  $d \bullet \langle e \rangle \subseteq \langle e \rangle$ , ce qui montre que  $d \bullet \in \text{end}_{\mathbb{I}_1}(\mathbb{I}_1)$  induit une restriction bien définie à  $\langle e \rangle$ . Nous avons alors le diagramme exact commutatif suivant de modules à droite sur  $\mathbb{I}_1$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{ann}_{\langle e \rangle}(d \bullet) & \longrightarrow & \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d \bullet) & \longrightarrow & \text{ann}_{\mathbb{B}_1}(\bar{d} \bullet) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \langle e \rangle & \xrightarrow{i} & \mathbb{I}_1 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{B}_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d \bullet & & \downarrow d \bullet & & \downarrow \bar{d} \bullet \\ 0 & \longrightarrow & \langle e \rangle & \xrightarrow{i} & \mathbb{I}_1 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{B}_1 \longrightarrow 0, \end{array}$$

où  $\bar{d} \bullet \in \text{end}_{\mathbb{I}_1}(\mathbb{B}_1)$  est défini par  $\bar{d} \bullet \pi(b) = \pi(db)$  pour tout  $b \in \mathbb{I}_1$  et  $\text{ann}_{\mathbb{B}_1}(\bar{d} \bullet) = \{\bar{a} \in \mathbb{B}_1 \mid \bar{d} \bar{a} = 0\}$ .

Maintenant, puisque  $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ ,  $\bar{d} \neq 0$ , ainsi  $\text{ann}_{\mathbb{B}_1}(\bar{d} \bullet) = \{0\}$  parce que, d'après la proposition 2.2.5, l'anneau  $\mathbb{B}_1$  est isomorphe à l'anneau des polynômes de Laurent  $\mathbb{L}_1$ , qui est intègre (voir, par exemple, [121]). Par conséquent, nous avons  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d \bullet) = \text{ann}_{\langle e \rangle}(d \bullet) = \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d \bullet) \cap \langle e \rangle$  ce qui montre à nouveau que  $a \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d \bullet)$  est tel que  $a \in \langle e \rangle$  si  $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ .

Étudions maintenant  $\text{ann}_{\langle e \rangle}(d \bullet)$ . Soit  $a = \sum_{i=0}^r a_i e \partial^i \in \text{ann}_{\langle e \rangle}(d \bullet)$ . En utilisant le lemme 2.2.1, nous avons :

$$da = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket, d(a_i) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket, a_i \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet).$$

Puisque  $d \bullet$  est Fredholm,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet)$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ , de sorte qu'il existe des polynômes  $p_1, \dots, p_s$  définissant une base de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet)$ .

Ainsi, nous avons  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet) = \sum_{j=1}^s \mathbb{k} p_j$ . Par conséquent,  $a_i \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet)$  pour  $i = 0, \dots, r$  implique l'existence de

$\alpha_1^i, \dots, \alpha_s^i \in \mathbb{k}$  tels que  $a_i(t) = \sum_{j=1}^s \alpha_j^i p_j(t)$ , et donc :

$$a = \sum_{0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s} \alpha_j^i p_j(t) e \partial^i = \sum_{j=1}^s p_j(t) \left( \sum_{i=0}^r \alpha_j^i e \partial^i \right) = \sum_{j=1}^s p_j(t) e \underbrace{\left( \sum_{i=0}^r \alpha_j^i \partial^i \right)}_{\in \mathbb{k}[\partial]}.$$

En utilisant les identités  $et = 0$ ,  $eI = 0$ , et  $ea = e(a)e$  pour tout  $a \in \mathbb{k}[t]$ , on peut vérifier à nouveau facilement que  $e \mathbb{I}_1 = e \mathbb{k}[\partial]$ . Par conséquent, nous avons  $a \in \sum_{j=1}^s (p_j(t) e) \mathbb{I}_1$ , c'est-à-dire que  $a$  appartient à l'idéal à droite de  $\mathbb{I}_1$  engendré par les  $p_j(t) e$ , ce qui montre que

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d) \subseteq \sum_{j=1}^s (p_j(t) e) \mathbb{I}_1.$$

En utilisant le lemme 2.2.1, nous avons  $d p_j(t) e = d(p_j(t) e) = (d \bullet p_j(t) e) = 0$  pour  $j = 1, \dots, s$ , c'est-à-dire que  $p_j(t) e \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d)$  pour  $j = 1, \dots, s$ . Ainsi,  $\sum_{j=1}^s (p_j(t) e) \mathbb{I}_1 \subseteq \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d)$  et donc

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d) = \sum_{j=1}^s (p_j(t) e) \mathbb{I}_1.$$

Par conséquent,  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d)$  est finiment engendré par les  $p_j(t) e$ , où les  $p_j(t)$  forment une base du  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet) = \{p \in \mathbb{k}[t] \mid d \bullet p = d(p) = 0\}$ .

Notons que, d'après le théorème 2.3.1, nous avons  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet) \cong \text{Hom}_{\mathbb{I}_1}(\mathcal{M}, \mathbb{k}[t])$ , où  $\mathcal{M} = \mathbb{I}_1 / (\mathbb{I}_1 d)$ .

Nous sommes donc ramenés à calculer les solutions polynomiales d'un opérateur intégro-différentiel scalaire à coefficients polynomiaux. Cet opérateur étant Fredholm, il admet une équation indicelle qui permet d'obtenir une base sur le degré des solutions polynomiales. Les coefficients des polynômes s'obtiennent alors par des techniques d'algèbre linéaire, voir [144]. Pour un autre algorithme implémenté dans `Maple`, voir [10].

**Théorème 3.2.1.** ([144]) *Soit  $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ . Alors,*

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d) = \sum_{j=1}^s (p_j(t) e) \mathbb{I}_1 = \left\{ \sum_{j=1}^s p_j(t) e d_j \mid d_j \in \mathbb{I}_1, j = 1, \dots, s \right\},$$

où  $\{p_j\}_{j=1, \dots, s}$  est une base du  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie suivant :

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet) = \{p \in \mathbb{k}[t] \mid d \bullet p = d(p) = 0\}.$$

L'espace vectoriel  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet)$  est l'espace des solutions polynomiales de l'équation intégro-différentielle  $d \bullet h = d(h) = 0$ , où  $h \in \mathbb{k}[t]$ .

Si  $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ , en utilisant le fait que  $\theta(\langle e \rangle) = \langle e \rangle$  (voir la proposition 2.2.7), nous avons alors  $\theta(d) \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ . Ainsi, en appliquant le théorème 3.2.1, il existe  $\{p_j\}_{j=1, \dots, s}$ , où  $p_j \in \mathbb{k}[t]$  pour  $j = 1, \dots, s$ , tels que  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\theta(d)) = \sum_{j=1}^s (p_j(t) e) \mathbb{I}_1$ , ce qui implique  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d) = \sum_{j=1}^s \mathbb{I}_1 e \theta(p_j(t))$ .

Enfin, d'après le lemme 2.2.4, nous avons  $e \theta(p_j(t)) = e \hat{p}_j(\partial)$ , où  $\hat{p}_j(\partial)$  est l'élément de  $\mathbb{k}[\partial]$  défini en substituant les monômes  $t^n$  par  $n! \partial^n$  dans  $p_j$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , voir la définition 2.2.7.

**Remarque 3.2.1.** Dans le chapitre 4, nous verrons une autre approche pour calculer une base de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(d \bullet)$  consistant à calculer les solutions polynomiales d'un opérateur différentiel  $\partial^M d \in \mathbb{A}_1$  pour un certain  $M \in \mathbb{N}$  (voir le point 2 du lemme 2.2.2 puis le lemme 2.2.5).

### 3.2.2 Calcul effectif d'une famille génératrice de l'annulateur d'un opérateur $d \in \langle e \rangle$

Dans cette section, nous allons expliquer comment calculer de façon explicite les générateurs de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d) = \{a \in \mathbb{I}_1 \mid a d = 0\}$  lorsque  $d \in \langle e \rangle$ , c'est-à-dire, lorsque  $d \bullet$  est de rang fini. Voir la proposition 3.2.1. Pour cela, nous allons commencer par prouver un résultat préliminaire.

Nous rappelons l'action donnée par le lemme 2.2.1 qui permet de donner les égalités ensemblistes suivantes pour  $d = p(t) e$  :

$$\begin{aligned} \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P d = 0\} &= \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(d) \\ &= \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(p(t) e) \\ &= \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P d = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P p(t) e = P(p) e = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P(p) = 0\} = \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\bullet p). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $d = p(t)e$ , nous avons les égalités suivantes :

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid Pd = 0\} = \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\bullet p) = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P(p) = 0\}.$$

**Lemme 3.2.1.** Soit  $p \in \mathbb{k}[t]$  de degré  $r$ ,  $Q_1 = \partial^{r+1}$  et  $Q_2 = p \partial^r - p^{(r)}(0)$ . On a alors :

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\bullet p) \cap \langle e \rangle \subseteq \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2 = \{\alpha Q_1 + \beta Q_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{I}_1\}.$$

*Démonstration.* Soit  $P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\bullet p) \cap \langle e \rangle$ . Alors,  $P = \sum_{i=0}^n a_i(t) e \partial^i$ , avec  $a_i \in \mathbb{k}[t]$  pour  $i = 0, \dots, n$ . De plus,  $P.p = P(p) = 0$ . Si  $n > r$ , alors nous avons :

$$P = \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i + \sum_{i=r+1}^n a_i(t) e \partial^i = \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i + \left( \sum_{i=r+1}^n a_i(t) e \partial^{i-r-1} \right) Q_1.$$

Ainsi,  $P \in \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$  si et seulement si  $T = \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i \in \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$ . Supposons donc que  $T$  satisfasse  $T(p) = 0$ . Alors on a :

$$T(p) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i(p(t)) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^r a_i(t) p^{(i)}(0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{r-1} a_i(t) p^{(i)}(0) + p^{(r)}(0) a_r(t) = 0.$$

Comme  $\deg_t p = r$ , nous avons  $p^{(r)}(0) \neq 0$ , ce qui donne  $a_r(t) = -\frac{1}{p^{(r)}(0)} \sum_{i=0}^{r-1} a_i(t) p^{(i)}(0)$ . En substituant cette expression dans  $T$  et en utilisant  $p^{(i)}(0)e = e(p^{(i)})e = e p^{(i)}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=0}^{r-1} \left( a_i(t) e \partial^i - \frac{1}{p^{(r)}(0)} a_i(t) p^{(i)}(0) e \partial^r \right) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \left( a_i(t) e \partial^i - \frac{1}{p^{(r)}(0)} a_i(t) e p^{(i)} \partial^r \right) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} a_i(t) e \frac{1}{p^{(r)}(0)} \left( p^{(r)}(0) \partial^i - p^{(i)} \partial^r \right). \end{aligned}$$

Maintenant, nous remarquons que  $p^{(r)}(0) \partial^i - p^{(i)} \partial^r \in \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(.p)$  pour  $i = 0, \dots, r-1$ . En effet, nous avons :

$$(p^{(r)}(0) \partial^i - p^{(i)} \partial^r)(p(t)) = p^{(r)}(0) p^{(i)}(t) - p^{(i)}(t) p^{(r)}(t) = p^{(r)}(0) p^{(i)}(t) - p^{(i)}(t) p^{(r)}(0) = 0.$$

Enfin, selon la proposition 2.1.3 (voir aussi [50, Proposition 3.2]), nous avons  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(.p) = \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$ , ce qui montre que tous les termes  $a_i(t) e \frac{1}{p^{(r)}(0)} (p^{(r)}(0) \partial^i - p^{(i)} \partial^r)$  appartiennent à  $\mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$  pour  $i = 0, \dots, r-1$ , ainsi  $T \in \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$ .  $\square$

On peut maintenant donner une caractérisation explicite de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  dans le cas où  $d = p(t)e$  avec  $p \in \mathbb{k}[t]$ .

**Proposition 3.2.2.** Soit  $p \in \mathbb{k}[t]$  de degré  $r$ ,  $Q_1 = \partial^{r+1}$  et  $Q_2 = p \partial^r - p^{(r)}(0)$ . Alors, nous avons :

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.pe) = \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2.$$

*Démonstration.* Soit  $P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.pe)$ . En utilisant le lemme 2.2.1, on a  $Ppe = P(p)e = 0$ , c'est-à-dire  $P(p) = 0$ . D'après le point 2 du lemme 2.2.2, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^n P \in \mathbb{A}_1$ . Ainsi, nous avons  $(\partial^n P)(p) = \partial^n P(p) = 0$ , c'est-à-dire  $\partial^n P \in \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\bullet p) = \{P \in \mathbb{A}_1 \mid P \bullet p = P(p) = 0\}$  (voir remarque 2.1.2). En utilisant la proposition 2.1.3, nous savons que  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\bullet p)$  est l'idéal à gauche de  $\mathbb{A}_1$  engendré par  $Q_1$  et  $Q_2$ . Par conséquent, il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{A}_1^2$  tels que  $\partial^n P = \alpha Q_1 + \beta Q_2$ . Ainsi, nous avons  $I^n \partial^n P = (I^n \alpha) Q_1 + (I^n \beta) Q_2$ .

En utilisant l'identité  $I^n \partial^n + T_{n-1} = 1$  dans  $\mathbb{I}_1$  (voir lemme 2.2.5), où  $T_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} e \partial^j$ , nous obtenons  $P = T_{n-1} P + (I^n \alpha) Q_1 + (I^n \beta) Q_2$ . Notons que  $T_{n-1} P = P - (I^n \alpha) Q_1 - (I^n \beta) Q_2 \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.pe) \cap \langle e \rangle$  puisque  $P, Q_1, Q_2 \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.pe)$  et  $T_{n-1} P \in \langle e \rangle$  car  $T_{n-1} \in \langle e \rangle$  et  $\langle e \rangle$  est un idéal à droite de  $\mathbb{I}_1$ . En utilisant le lemme 3.2.1,  $T_{n-1} P \in \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$ , donc  $P = T_{n-1} P + (I^n \alpha) Q_1 + (I^n \beta) Q_2$  appartient également à  $\mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$ , ce qui prouve  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.pe) \subseteq \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$ . L'inclusion réciproque étant immédiate, cela prouve le résultat énoncé.  $\square$

Après avoir donné les générateurs explicites de  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot d)$  dans le cas où  $d = p(t)e$  avec  $p \in \mathbb{k}[t]$ , on veut maintenant caractériser  $\text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot d)$  dans le cas général d'un élément  $d \in \langle e \rangle$ . Pour cela, nous énonçons et démontrons un résultat préliminaire utile.

**Lemme 3.2.2.** Soient  $a_i \in \mathbb{k}[t]$ ,  $i = 0, \dots, r$ ,  $m = \max_{i \in \llbracket 0, r \rrbracket} \{\deg_t a_i\}$ , et  $J = (1 \dots \partial^{m+1})^T$ . Alors, nous avons

$$\bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i) = \sum_{j=1}^l \mathbb{A}_1 f_j = \left\{ \sum_{j=1}^l \alpha_j f_j \mid \alpha_j \in \mathbb{A}_1, j = 1, \dots, l \right\},$$

où les  $f_j$  sont définis par

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} = D J,$$

où  $D \in \mathbb{k}[t]^{l \times (m+2)}$  est une matrice de rang plein par ligne satisfaisant

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \{\lambda \in \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} \mid \lambda C = 0\} = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D) := \{\mu D \mid \mu \in \mathbb{k}[t]^{1 \times l}\},$$

avec  $C$  la matrice définie par

$$C := \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_r \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{(m+1)} & \dots & a_r^{(m+1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{(m+2) \times (r+1)}. \quad (3.3)$$

*Démonstration.* Tout d'abord, notons que  $\partial^{m+1}(a_i) = a_i^{(m+1)} = 0$  pour  $i = 0, \dots, r$ , ce qui montre que  $\partial^{m+1} \in \bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i)$ . Soit  $P = \sum_{j=0}^n \alpha_j(t) \partial^j \in \bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i)$ , où  $\alpha_j \in \mathbb{k}[t]$  pour  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Si  $n > m + 1$ , en écrivant

$$P = \sum_{j=0}^m \alpha_j(t) \partial^j + \left( \sum_{j=m+1}^n \alpha_j(t) \partial^{j-m-1} \right) \partial^{m+1},$$

nous obtenons  $\sum_{j=0}^m \alpha_j(t) \partial^j \in \bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i)$ . Ainsi, nous pouvons supposer que  $P = \sum_{j=0}^m \alpha_j(t) \partial^j$ . Pour simplifier la preuve, nous ajoutons un terme d'ordre  $m + 1$ , c'est-à-dire,  $P = \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j(t) \partial^j$ . Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$

$$P(a_i) = \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j(t) a_i^{(j)}(t) = 0 \iff (\alpha_0(t) \dots \alpha_{m+1}(t)) \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_r \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{(m+1)} & \dots & a_r^{(m+1)} \end{pmatrix}}_C = (0 \dots 0).$$

Cela montre que  $(\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(.C)$ . Comme  $\mathbb{k}[t]$  est un anneau noethérien (voir, par exemple, [171, 166]), le  $\mathbb{k}[t]$ -module  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C)$  est de type fini, et ainsi, il existe un ensemble fini de générateurs. En formant la matrice définie par les lignes correspondantes, nous obtenons  $D \in \mathbb{k}[t]^{l \times (m+2)}$  telle que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$ . Remarquons que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C)$  est un  $\mathbb{k}[t]$ -sous-module du  $\mathbb{k}[t]$ -module libre  $\mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)}$ . Ainsi,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C)$  est un  $\mathbb{k}[t]$ -module libre puisque  $\mathbb{k}[t]$  est un anneau principal (voir, par exemple, [166]). Par conséquent, les lignes de la matrice  $D$  peuvent être choisies  $\mathbb{k}[t]$ -linéairement indépendantes, c'est-à-dire de sorte que la matrice  $D$  soit de rang maximal par ligne (c'est-à-dire,  $\nu D = 0$  implique  $\nu = 0$ ). Ainsi, nous avons la suite exacte de  $\mathbb{k}[t]$ -modules suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times l} \xrightarrow{\cdot D} \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{\cdot C} \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}. \quad (3.4)$$

En particulier, nous avons  $(\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) = \nu D$  pour un certain  $\nu \in \mathbb{k}[t]^{1 \times l}$ . Si nous écrivons  $P = (\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) J$ , alors nous obtenons  $P = \nu D J$ , ce qui montre que chaque élément de  $D J \in \mathbb{A}_1^{l \times 1}$  est un élément de  $\mathbb{A}_1$  qui annule tous les  $a_i$ . Remarquons que la matrice  $D$  contient une ligne de la forme  $(0 \dots 0 1)$  puisque la dernière ligne de  $C$  contient des zéros, ce qui montre à nouveau que  $(0 \dots 0 1) J = \partial^{m+1} \in \bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i)$ . Cela explique pourquoi nous avons ajouté un terme d'ordre  $m + 1$  dans l'opérateur différentiel  $P$ .

Ainsi, nous obtenons que  $(f_1 \dots f_l)^T = D J$  est un ensemble générateur de  $\bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i)$ , autrement dit que les  $f_1, \dots, f_l$  engendrent  $\bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i)$ .  $\square$

Notons que le lemme 3.2.2 peut être vu comme une généralisation de la proposition 2.1.3. Cependant, notons que  $\bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i)$ , étant un idéal à gauche de  $\mathbb{A}_1$ , il peut également être engendré par deux éléments de  $\mathbb{A}_1$  plutôt que par  $l$  comme indiqué dans le lemme 3.2.2. Voir la remarque 2.1.3 rappelant ce résultat. Pour plus de détails, voir [170].

En utilisant les *formes d'Hermite/Smith* (voir [74]) ou les *méthodes de bases de Gröbner* pour le calcul de la matrice  $D$  définie dans le lemme 3.2.2, les  $f_j$  peuvent alors être obtenus explicitement, voir la section 2.4.2.1. Pour plus de détails, voir [135] et les références qui y sont mentionnées. De tels calculs sont implémentés dans le package `OreModules` développé en `Maple`.

**Exemple 3.2.1.** Considérons les polynômes  $a_0(t) = t$ ,  $a_1(t) = t^2 + 1$  et  $a_2(t) = t^3 - 2t$ . Alors,  $m = 3$  et la matrice  $C$  est définie par :

$$C = \begin{pmatrix} t & t^2 + 1 & t^3 - 2t \\ 1 & 2t & 3t^2 - 2 \\ 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant `Maple` (par exemple, la commande `SyzygyModule` du package `OreModules`, [59]), on peut calculer une matrice  $D$  dont les lignes engendrent le noyau à gauche de  $C$ . On obtient :

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 6t & -3t^2 + 3 & t^3 - 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi les générateurs  $f_1$  et  $f_2$  de  $\bigcap_{i=0}^2 \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i)$  donnés par :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 1 \\ \partial \\ \vdots \\ \partial^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 6t\partial + (-3t^2 + 3)\partial^2 + (t^3 - 3t)\partial^3 \\ \partial^4 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que

$$\bigcap_{i=0}^2 \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i) = \mathbb{A}_1 f_1 + \mathbb{A}_1 f_2 = \{ \alpha_1 (-6 + 6t\partial + (-3t^2 + 3)\partial^2 + (t^3 - 3t)\partial^3) + \alpha_2 \partial^4 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{A}_1 \}.$$

Ici, nous pouvons également vérifier facilement que :

$$f_1(a_0) = -6(t) + 6t\partial(t) + (-3t^2 + 3)\partial^2(t) + (t^3 - 3t)\partial^3(t) = -6t + 6t + 0 + 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} f_1(a_1) &= -6(t^2 + 1) + 6t\partial(t^2 + 1) + (-3t^2 + 3)\partial^2(t^2 + 1) + (t^3 - 3t)\partial^3(t^2 + 1) \\ &= -6t^2 - 6 + 12t^2 - 6t^2 + 6 + 0, \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(a_2) &= -6(t^3 - 2t) + 6t\partial(t^3 - 2t) + (-3t^2 + 3)\partial^2(t^3 - 2t) + (t^3 - 3t)\partial^3(t^3 - 2t) \\ &= -6(t^3 - 2t) + 6t(3t^2 - 2) + (-3t^2 + 3)(6t) + (t^3 - 3t)6, \\ &= -6t^3 + 12t + 18t^3 - 12t - 18t^3 + 18t + 6t^3 - 18t, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Clairement, nous avons  $f_2(a_i) = 0$  pour  $i = 0, 1, 2$ .

**Proposition 3.2.3.** Soient  $d = \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i$ , avec  $a_i \in \mathbb{k}[t]$ ,  $i = 0, \dots, r$ ,  $m = \max_{i \in \llbracket 0, r \rrbracket} \{\deg_t a_i\}$ ,  $C \in \mathbb{k}[t]^{(m+2) \times (r+1)}$  la matrice définie au lemme 3.2.2,  $E \in \mathbb{k}^{s \times (m+2)}$  une matrice de rang plein par ligne telle que  $\ker_{\mathbb{k}}(C(0)) = \text{im}_{\mathbb{k}}(\cdot E)$  et  $J = (1, \dots, \partial^{m+1})^T$ .

Alors, nous avons

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot d) \bigcap \langle e \rangle = \sum_{k=1}^s \mathbb{I}_1 g_k, \quad (3.5)$$

où les  $g_k$  sont définis par

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix} = E e J. \quad (3.6)$$

*Démonstration.* Soit  $P = \sum_{j=0}^l \alpha_j(t) e \partial^j \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$ . En utilisant le lemme 2.2.1, l'égalité  $Pd = \sum_{i=0}^r P(a_i) e \partial^i = 0$  est vraie si, et seulement si,  $P(a_i) = 0$  pour  $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , car l'expression ci-dessus est une forme normale. Ainsi, nous obtenons  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) \cap \langle e \rangle = \bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\bullet a_i) \cap \langle e \rangle$ .

Posons  $m_i = \deg_t a_i$  pour  $i = 0, \dots, r$ . Alors, nous avons  $\partial^{m_i+1} \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\bullet a_i)$ . Notons  $m = \max_{i \in \llbracket 0, r \rrbracket} \{\deg_t a_i\}$ . Alors  $\partial^{m+1} \in \bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\bullet a_i)$  et  $e \partial^{m+1} \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) \cap \langle e \rangle$ . Par conséquent, nous pouvons considérer  $P = \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j(t) e \partial^j \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$ .

On a alors

$$\begin{aligned} Pd = 0 &\iff P(a_i) = 0, \quad i = 0, \dots, r, \\ &\iff P(a_i) = \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j e(\partial^j a_i) = 0, \quad i = 0, \dots, r, \\ &\iff (\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) \begin{pmatrix} e(a_0) & \dots & e(a_r) \\ \vdots & & \vdots \\ e(a_0^{(m+1)}) & \dots & e(a_r^{(m+1)}) \end{pmatrix} = 0, \\ &\iff (\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) e(C) = 0, \\ &\iff (\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(.e(C)), \end{aligned}$$

où la matrice  $C(t)$  est définie dans le lemme 3.2.2, à l'égalité (3.3) et  $e(C) = C(0)$  est son évaluation en  $t = 0$ .

Soit  $E \in \mathbb{k}^{s \times (m+2)}$  une matrice dont les lignes définissent une base de  $\ker_{\mathbb{k}}(.e(C))$ , on note alors  $s = \dim_{\mathbb{k}} \ker_{\mathbb{k}}(.e(C))$ . Nous avons ainsi la suite exacte suivante de  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}^{1 \times s} \xrightarrow{\cdot E} \mathbb{k}^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{\cdot e(C)} \mathbb{k}^{1 \times (r+1)}.$$

En utilisant le fait que  $\mathbb{k}[t]$  est un  $\mathbb{k}$ -module libre (et donc un *module plat* sur  $\mathbb{k}$ , voir [166, Proposition 3.46]), et en prenant le *produit tensoriel* de la suite exacte ci-dessus par  $\mathbb{k}[t]$ , nous obtenons la suite exacte suivante de  $\mathbb{k}[t]$ -modules :

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times s} \xrightarrow{\cdot E} \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{\cdot e(C)} \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}. \quad (3.7)$$

Pour plus de détails sur le produit tensoriel, voir, par exemple, [166].

Par conséquent,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.E)$ , ce qui montre que  $Pd = 0$  si, et seulement si,  $P = (\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) e J$ , où  $(\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) \in \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.E)$ . En utilisant le fait que  $(\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) = \nu E$  pour  $\nu \in \mathbb{k}[t]^{1 \times s}$ , et la base canonique de  $\mathbb{k}[t]^{1 \times s}$ , nous obtenons les  $g_k$  définis par (3.5).

Enfin, comme remarqué dans la preuve du lemme 3.2.2, la dernière ligne de la matrice  $C$ , et donc de la matrice  $e(C)$ , est la ligne nulle, ce qui implique que  $E$  contient une ligne de la forme  $(0 \dots 0 \ 1)$  et montre que  $(0 \dots 0 \ 1) e J = e \partial^{m+1}$  est l'un des  $g_k$ . Par conséquent, (3.5) est un ensemble de générateurs de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) \cap \langle e \rangle$ , c'est-à-dire que  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) \cap \langle e \rangle = \sum_{k=1}^s \mathbb{I}_1 g_k$ . □

**Exemple 3.2.2.** Considérons  $d = a_0(t) e + a_1(t) e \partial + a_2(t) e \partial^2 \in \langle e \rangle$ , où  $a_0(t) = t$ ,  $a_1(t) = t^2 + 1$ , et  $a_2(t) = t^3 - 2t$  sont les polynômes considérés dans l'exemple 3.2.1. L'évaluation de la matrice  $C$  en  $t = 0$  donne

$$e(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant Maple, nous trouvons que le noyau de  $e(C)$  est donné par l'image de la matrice  $E$  suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors les générateurs  $g_1$  et  $g_2$  de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) \cap \langle e \rangle$  définis par :

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = E e \begin{pmatrix} 1 \\ \partial \\ \vdots \\ \partial^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e - e\partial^2 \\ e\partial^4 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple élémentaire, on peut également vérifier à la main que  $(2e - e\partial^2)d = 0$  et  $(e\partial^4)d = 0$ . Nous avons donc trouvé que  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) \cap \langle e \rangle = \mathbb{I}_1 g_1 + \mathbb{I}_1 g_2 = \{ \alpha_1 (2e - e\partial^2) + \alpha_2 e\partial^4 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{I}_1 \}$ .

Dans le lemme 3.2.2 et la proposition 3.2.3, nous avons explicité une manière effective de calculer des générateurs :

1. du  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche

$$\bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i) = \{ P \in \mathbb{A}_1 \mid \forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket, P a_i = P(a_i) = 0 \}$$

pour une famille de polynômes  $a_0(t), \dots, a_r(t) \in \mathbb{k}[t]$ ,

2. du  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) \cap \langle e \rangle = \{ P \in \langle e \rangle \mid P d = 0 \}$  pour  $d \in \langle e \rangle$ .

Le prochain énoncé, important, montre comment combiner les deux précédents résultats pour traiter le cas général du calcul de générateurs de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  pour n'importe quel  $d \in \langle e \rangle$ . On rappelle que le fait que  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  soit de type fini pour tout élément  $d$  de  $\mathbb{I}_1$  est une conséquence de la cohérence de  $\mathbb{I}_1$ , voir le théorème 3.1.1. L'enjeu ici est de trouver une méthode de calcul explicite dans le cas où  $d \in \langle e \rangle$  (le cas  $d \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$  ayant été traité dans la section 3.2.1).

**Théorème 3.2.2.** Soit  $d = \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i \in \langle e \rangle$ , avec  $a_i \in \mathbb{k}[t]$  pour  $i = 0, \dots, r$ . Alors, nous avons :

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) = \sum_{j=1}^l \mathbb{I}_1 f_j + \sum_{k=1}^s \mathbb{I}_1 g_k,$$

où les  $f_j$  (resp.  $g_k$ ) sont les opérateurs différentiels (resp. d'évaluation) définis dans le lemme 3.2.2 (resp. proposition 3.2.3). En particulier, l'idéal à gauche  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  est de type fini.

*Démonstration.* Considérons  $d = \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i \in \langle e \rangle$  et  $P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$ . Alors, nous avons  $P d = 0$ .

D'après le lemme 2.2.2, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^n P \in \mathbb{A}_1$ . Ainsi,  $(\partial^n P) d = \partial^n (P d) = 0$ , c'est-à-dire,  $\sum_{i=0}^r (\partial^n P)(a_i(t)) e \partial^i = 0$ . Par conséquent, en utilisant le lemme 2.2.1,  $(\partial^n P)(a_i) = 0$  pour  $i = 0, \dots, r$ . Par le lemme 3.2.2,  $\partial^n P \in \bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i) = \sum_{j=1}^l \mathbb{A}_1 f_j$ . Selon le lemme 2.2.5,  $P$  peut s'écrire comme  $P = T_{n-1} P + S$ , où  $S = I^n \partial^n P \in \sum_{j=1}^l \mathbb{I}_1 f_j$ .

Notons que  $T_{n-1} P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) \cap \langle e \rangle$ . En utilisant la proposition 3.2.3,  $T_{n-1} P \in \sum_{k=1}^s \mathbb{I}_1 g_k$ , où les  $g_k$  sont définis par l'équation (3.5), ce qui montre que  $P \in \sum_{j=1}^l \mathbb{I}_1 f_j + \sum_{k=1}^s \mathbb{I}_1 g_k$ , c'est-à-dire,  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) \subseteq \sum_{j=1}^l \mathbb{I}_1 f_j + \sum_{k=1}^s \mathbb{I}_1 g_k$ .

Par construction, nous avons  $\sum_{j=1}^l \mathbb{I}_1 f_j + \sum_{k=1}^s \mathbb{I}_1 g_k \subseteq \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$ , ce qui prouve finalement l'égalité et le résultat.  $\square$

**Exemple 3.2.3.** En appliquant le résultat du théorème 3.2.2 à l'opérateur d'évaluation  $d \in \langle e \rangle$  de l'exemple 3.2.2 et en utilisant les résultats obtenus dans les exemples 3.2.1 et 3.2.2, nous avons :

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) = \mathbb{I}_1 f_1 + \mathbb{I}_1 f_2 + \mathbb{I}_1 g_1 + \mathbb{I}_1 g_2, \quad \begin{cases} f_1 = (-6 + 6t\partial + (-3t^2 + 3)\partial^2 + (t^3 - 3t)\partial^3), \\ f_2 = \partial^4, \\ g_1 = 2e - e\partial^2, \\ g_2 = e\partial^4. \end{cases}$$

Dans le cas où  $s$  est nul (voir le théorème 3.2.2), on voit que  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot d)$  peut être engendré uniquement par des opérateurs différentiels. Il est alors naturel de se demander si cela est vrai dans le cas général. Autrement dit, on cherche à savoir si les  $g_k$  peuvent être générés par les  $f_j$ , c'est-à-dire, si  $g_k$  est une combinaison  $\mathbb{I}_1$ -linéaire à gauche des  $f_j$ . Pour cela, en comparant les suites exactes (3.4) et (3.7), nous avons  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot D)$  et  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot E)$ , où  $D \in \mathbb{k}[t]^{l \times (m+2)}$  et  $E \in \mathbb{k}^{s \times (m+2)}$  sont des matrices dont les lignes sont indépendantes. Il est légitime de se demander s'il est possible de prendre  $E = e(D)$ . La proposition 3.2.4 suivante répond par l'affirmative à cette question.

**Proposition 3.2.4.** *Soit  $d = \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i \in \langle e \rangle$ , avec  $a_i$  des polynômes de  $\mathbb{k}[t]$  pour  $i = 0, \dots, r$ , et  $m = \max_{i \in [0, r]} \deg_t a_i$ . En reprenant les notations précédentes (voir le lemme 3.2.2), posons*

$$\mathcal{N} := \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C) = \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)} / (\mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} C).$$

Si  $\mathcal{N} = 0$ , alors on peut toujours choisir  $E$  comme étant  $e(D)$  dans la proposition 3.2.3, ce qui implique :

$$s = l = m - r + 1, \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_l \end{pmatrix} = e D J = e \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}, \quad \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot d) \cap \langle e \rangle = \sum_{j=1}^l \mathbb{I}_1 e f_j.$$

*Démonstration.* Par hypothèse, nous avons  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C) = \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)} / (\mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} C) = 0$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} C = \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}$ . En d'autres termes,  $\text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C) = \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}$ .

Soit  $(e_i)_{i \in [1, r+1]}$  la base canonique du  $\mathbb{k}[t]$ -module libre  $\mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}$ .

Pour tout  $i = 1, \dots, r+1$ , puisque  $e_i \in \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)} = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$ , il existe  $f_i \in \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)}$  tel que  $e_i = f_i C$ . Si l'on note  $F \in \mathbb{k}[t]^{(r+1) \times (m+2)}$  la matrice de  $\mathbb{k}[t]$  dont les lignes sont les  $f_i$ , alors les identités précédentes peuvent s'écrire sous la forme  $F C = I_{r+1}$ , où  $I_{r+1}$  est la matrice identité de taille  $r+1$ .

Considérons maintenant la matrice  $\Pi = I_{m+2} - C F$ . Nous avons  $\Pi^2 = I_{m+2} - 2 C F + C F C F = I_{m+2} - C F = \Pi$ . De plus, nous avons  $(I_{m+2} - C F) C = C - C F C = 0$ , ce qui implique  $\text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot (I_{m+2} - C F)) \subset \ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot D)$ . Ainsi, il existe une matrice  $G \in \mathbb{k}[t]^{(m+2) \times l}$  telle que  $(I_{m+2} - C F) = G D$ , c'est-à-dire vérifiant l'identité matricielle polynomiale suivante :

$$G D + C F = I_{m+2}.$$

En posant  $t = 0$  dans cette dernière identité, nous en déduisons que  $e(G) e(D) + e(C) e(F) = I_{m+2}$ .

Montrons maintenant que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(D))$ . Si  $\lambda \in \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)}$  appartient à  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(C))$ , alors l'identité ci-dessus donne :

$$\lambda e(G) e(D) + \lambda e(C) e(F) = \lambda.$$

Or,  $\lambda e(C) = 0$  implique  $\lambda = \lambda e(G) e(D) \in \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(D))$ . Ainsi,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(C)) \subset \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(D))$ .

Par ailleurs, comme  $D C = 0$ , on a  $e(D) e(C) = 0$ , ce qui implique  $e(D) \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(C))$  et donc  $\text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(D)) \subset \ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(C))$ . Cela prouve que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(D))$  et montre que la matrice  $E$  de la proposition 3.2.3 peut être choisie comme  $e(D)$ .

Ainsi nous avons les suites exactes scindées suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{k}[t]^{1 \times l} & \xrightarrow{\cdot D} & \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} & \xrightarrow{\cdot C} & \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)} \longrightarrow 0, \\ & & & \swarrow \cdot G & & \swarrow \cdot F & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{k}[t]^{1 \times l} & \xrightarrow{\cdot e(D)} & \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} & \xrightarrow{\cdot e(C)} & \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)} \longrightarrow 0. \\ & & & \swarrow \cdot e(G) & & \swarrow \cdot e(F) & \end{array}$$

De plus, d'après la *caractéristique d'Euler-Poincaré* (voir le théorème A.1.1 en annexe), nous avons :

$$(r+1) - (m+2) + l = 0.$$

Ainsi, nous avons  $l = m - r + 1$ . □

Il est légitime de se demander si la condition  $\mathcal{N} := \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)} / (\mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} C) = 0$  de la proposition 3.2.4 est restrictive ou non. Le lemme suivant nous dit qu'en réalité,  $\mathcal{N}$  est toujours le module nul.

**Définition 3.2.2.** On appelle matrice *unimodulaire*, une matrice inversible à coefficients dans  $\mathbb{k}[t]$  dont l'inverse est également à coefficients dans  $\mathbb{k}[t]$ .

**Remarque 3.2.2.** On utilisera indifféremment les termes *unimodulaire* et *inversible dans  $\mathbb{k}[t]$* .

**Lemme 3.2.3.** Avec les notations précédentes, soient  $d = \sum_{i=0}^r a_i(t) e^i \in \langle e \rangle$  et  $C$  définie par (3.3). Si les  $a_i(t)$  sont  $\mathbb{k}$ -linéairement indépendants, alors  $\mathcal{N} = 0$ .

*Démonstration.* On rappelle que  $m = \max_i \deg_t a_i(t)$ . Introduisons la matrice unimodulaire  $U$  à coefficients dans  $\mathbb{k}[t]$  suivante

$$U = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^m}{m!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{(m+1) \times (m+1)}.$$

Un simple calcul permet alors de vérifier que son inverse est défini par :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t & \cdots & \frac{(-t)^m}{m!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{(-t)^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{(m+1) \times (m+1)}.$$

De plus, introduisons la notation  $A(t) = (a_0(t) \ a_1(t) \ \dots \ a_r(t))$ . Ainsi,  $A(t)$  représente la première ligne de  $C$ ,  $A^{(1)}(t)$  la deuxième, etc. On a alors l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} A - t A^{(1)} + \frac{t^2}{2!} A^{(2)} + \cdots + \frac{(-t)^m}{m!} A^{(m)} \\ \vdots \\ A^{(i)} - t A^{(i+1)} + \cdots + \frac{(-t)^{m-i}}{(m-i)!} A^{(m)} \\ \vdots \\ A^{(m)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons alors  $L_i(t) = A^{(i)} - t A^{(i+1)} + \cdots + \frac{(-t)^{m-i}}{(m-i)!} A^{(m)}$ . Calculons la dérivée de  $L_i$  par rapport à  $t$  :

$$\frac{dL_i}{dt}(t) = A^{(i+1)}(t) - A^{(i+1)}(t) - t A^{(i+2)}(t) + \cdots + \frac{(-t)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} A^{(m)}(t) + \frac{(-t)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} A^{(m+1)}(t) = 0.$$

Ainsi, nous avons  $L_i(t) = A^{(i)}(0)$  pour tout  $i = 0, \dots, m$ . On obtient donc l'égalité suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_V C = C(0).$$

Comme  $V$  est une matrice inversible,  $\text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C(0)) = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \mathcal{N}$ . De plus, on a  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C(0)) \cong \mathbb{k}[t] \otimes_{\mathbb{k}} \text{coker}_{\mathbb{k}}(.C(0))$  par extension des coefficients (Voir annexe A, section A.1.5.1). Notons que  $\text{coker}_{\mathbb{k}}(.C(0))$  est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension  $\delta = r + 1 - \text{rang}_{\mathbb{k}}(C(0))$  et  $\mathcal{N}$  est un  $\mathbb{k}[t]$ -module libre de rang  $\delta$ . Déterminons  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0))$ .

On a :

$$C(0) = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{r0} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m! a_{0m} & \cdots & m! a_{rm} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & m! & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{r0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0m} & \cdots & a_{rm} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Comme les polynômes  $a_i(t)$  sont supposées  $\mathbb{k}$ -linéairement indépendants, la matrice à droite de l'égalité (3.8) a  $r+1$  colonnes indépendantes et la matrice diagonale de l'égalité 3.8 est inversible. Nous obtenons  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)) = r+1$  et ainsi,  $\delta = 0$  donc  $\mathcal{N} = 0$ .

De manière équivalente, le facteur de droite de l'identité 3.8 ayant ses  $r+1$  colonnes  $\mathbb{k}$ -linéairement indépendantes, il existe un inverse à gauche  $F' \in \mathbb{k}[t]^{(r+1) \times (m+2)}$  de  $C(0)$  tel que  $F' C(0) = I_{r+1}$ . Ainsi,  $(F' V) C = I_{r+1}$ , autrement dit  $F' V$  est un inverse à gauche de  $C$  ce qui implique  $\mathcal{N} = 0$ .  $\square$

On va maintenant pouvoir énoncer le résultat final et principal de cette section donnant une méthode de calcul explicite des générateurs de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  avec  $d \in \langle e \rangle$ .

**Théorème 3.2.3.** Soient  $d = \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i \in \langle e \rangle$ , avec  $a_i \in \mathbb{k}[t]$  pour  $i = 0, \dots, r$  et  $m = \max_{i \in [0, r]} \deg_t a_i$ . Alors, on a

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) = \sum_{j=1}^l \mathbb{I}_1 f_j,$$

où les  $f_j$  sont les opérateurs différentiels définis dans le lemme 3.2.2 et  $l = m - r + 1$ .

**Remarque 3.2.3.** Par ailleurs, lors de l'étude de l'annulateur  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  d'un élément  $d = \sum_{i=0}^r a_i e \partial^i \in \langle e \rangle$ , on peut toujours supposer que les  $a_i$  sont  $\mathbb{k}$ -linéairement indépendants.

En effet, si l'on a  $\sum_{i=0}^r \lambda_i a_i = 0$ , avec  $\lambda_i \in \mathbb{k}$  pour  $i = 0, \dots, r$  et  $\lambda_k \neq 0$  pour un  $k$  fixé, alors on peut écrire  $a_k = -\sum_{0 \leq i \neq k \leq r} (\lambda_i / \lambda_k) a_i$ , ce qui implique que  $\bigcap_{i=0}^r \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i) = \bigcap_{0 \leq i \neq k \leq r} \text{ann}_{\mathbb{A}_1}(\cdot a_i)$ . Par conséquent, dans notre contexte, on peut toujours supposer que la matrice  $C$  définie par (3.3) possède des colonnes  $\mathbb{k}$ -linéairement indépendantes.

---

**Algorithme 4** Calcul de générateurs de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  pour  $d \in \langle e \rangle$

---

**Entrée**  $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{k}[t]$  tels que  $d = \sum_{i=0}^r a_i(t) e \partial^i$ .

**Sortie**  $f_1, \dots, f_l \in \mathbb{A}_1 \subset \mathbb{I}_1$  tels que  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) = \sum_{j=1}^l \mathbb{I}_1 f_j$ .

- 1: Calculer  $m = \max_{i \in [0, r]} \deg_t a_i$ .
  - 2: Calculer la matrice  $C$  associée aux  $a_i$  définie dans (3.3).
  - 3: Calculer  $D \in \mathbb{k}[t]^{l \times (m+2)}$  telle que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$ .
  - 4: Calculer  $f = (f_1 \dots f_l)^T = D(1 \dots \partial^{m+1})^T = D J_{m+1}$ .
  - 5: **Retourner**  $\{f_1, \dots, f_l\}$ .
- 

**Exemple 3.2.4.** Terminons les exemples 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3. Nous avons

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) = \mathbb{I}_1 f_1 + \mathbb{I}_1 f_2 + \mathbb{I}_1 g_1 + \mathbb{I}_1 g_2,$$

avec

$$\begin{cases} f_1 = (-6 + 6t\partial + (-3t^2 + 3)\partial^2 + (t^3 - 3t)\partial^3), \\ f_2 = \partial^4, \\ g_1 = 2e - e\partial^2, \\ g_2 = e\partial^4. \end{cases}$$

De plus,  $g_1 = \frac{-1}{3} e f_1$  et  $g_2 = e \partial^4 = e f_2$ . Ainsi, nous obtenons

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d) = \mathbb{I}_1 f_1 + \mathbb{I}_1 f_2.$$

**Exemple 3.2.5.** Soit  $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} e \partial^k \in \langle e \rangle$ , l'opérateur de Taylor d'ordre  $n$ . Calculons  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.T_n)$ . Posons

$$C = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^n}{n!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{(n+2) \times (n+1)}.$$

La matrice  $C$  a pour noyau polynomial la matrice  $D = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1) \in \mathbb{k}[t]^{1 \times (n+1)}$ . Ainsi,  $\partial^{n+1}$  génère  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.T_n)$ , autrement dit, nous avons

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.T_n) = \mathbb{I}_1 \partial^{n+1}.$$

L'annulateur des opérateurs de Taylor est donc principal.

**Remarque 3.2.4.** D'après la proposition 2.2.8, on a  $T_n T_n = T_n$ . Ainsi,  $1 - T_n$  appartient à  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.T_n)$ . D'après l'exemple 3.2.5, nous avons  $1 - T_n \in \mathbb{I}_1 \partial^{n+1}$ . Cela est consistant car d'après la formule de Taylor,  $I^{n+1} \partial^{n+1} = 1 - T_n$ .

**Remarque 3.2.5.** Dans le lemme 3.2.3, on a prouvé que  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C)$  est un  $\mathbb{k}[t]$ -module libre d'un certain rang  $\delta$  qui se trouve être nul. Ce résultat s'étend au cas matriciel (voir section 3.3.1). Pour l'extension au cas matriciel du théorème 3.2.3, on montrera que  $\mathcal{N}$  est un  $\mathbb{k}[t]$ -module libre de rang fini.

On a ainsi montré que les générateurs de  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.d)$  pour  $d \in \langle e \rangle$  peuvent être calculés explicitement en suivant une méthode effective.

**Remarque 3.2.6.** Les générateurs de l'annulateur d'un opérateur  $d$  d'évaluation sont des opérateurs différentiels. En effet, avec les notations précédentes, les  $f_i$  sont des opérateurs différentiels.

### 3.3 Caractérisation effective de l'intersection de deux idéaux $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de type fini lorsque $\mathcal{I} \in \langle e \rangle$ et $\mathcal{J} \in \langle e \rangle$

À ce stade, nous invitons le lecteur à se référer de nouveau à la proposition 3.1.1, qui joue un rôle central dans notre étude. Pour rappel, la cohérence de l'anneau  $\mathbb{I}_1$  a été établie par Bavula dans [16] (voir théorème 3.1.1), en s'appuyant précisément sur la caractérisation donnée dans la proposition 3.1.1.

La section 3.2 a permis de rendre effective la première condition de cette caractérisation. Nous abordons à présent la deuxième, qui nécessite de résoudre le problème suivant : étant donné deux idéaux à gauche de type fini  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  de  $\mathbb{I}_1$ , engendrés respectivement par  $u_1, \dots, u_n$  et  $v_1, \dots, v_m$ , comment calculer explicitement des générateurs de leur intersection  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  ?

Dans cette section, nous nous concentrons sur le cas particulier où  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  appartiennent à  $\langle e \rangle$ . Nous allons, dans ce cas, rendre effectif le calcul de leur intersection, en nous appuyant sur une généralisation des résultats établis dans la sous-section 3.2.2. Le cas plus général de deux idéaux  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  quelconques, sera quant à lui traité dans le chapitre 5.

Enfin, rappelons que nous ne considérons ici que des idéaux à gauche. En effet, tout résultat ou méthode de calcul concernant les idéaux à gauche de  $\mathbb{I}_1$  peut être transposé au cas des idéaux à droite, à l'aide de l'involution  $\theta$  introduite dans la proposition 2.2.7.

Commençons par faire un lien important entre le calcul d'annulateur de matrice colonne et le calcul d'intersection d'idéaux. Supposons que l'on ait un élément  $a \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ . Alors, on peut écrire  $a$  en fonctions des générateurs de  $\mathcal{I}$ ,

c'est-à-dire, les  $u_1, \dots, u_n$  et de générateurs de  $\mathcal{J}$ , c'est-à-dire,  $v_1, \dots, v_m$ . On écrit alors  $a = \sum_{i=1}^n a_i u_i = \sum_{j=1}^m b_j v_j$ , avec  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{I}_1$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ . On peut alors écrire la suite d'équivalences suivante

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J} &\iff \sum_{i=1}^m a_i u_i - \sum_{j=1}^n b_j v_j = 0, \\ &\iff (a_1 \quad \dots \quad a_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - (b_1 \quad \dots \quad b_m) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = 0, \\ &\iff (a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ -v_1 \\ \vdots \\ -v_m \end{pmatrix} = 0, \\ &\iff (a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m) \in \ker_{\mathbb{I}_1} (\cdot U), \end{aligned}$$

avec  $U = (u_1 \quad \dots \quad u_n \quad -v_1 \quad \dots \quad -v_m)^T \in \mathbb{I}_1^{(n+m) \times 1}$ .

Résumons ceci dans une proposition.

**Proposition 3.3.1.** *Soient  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  deux idéaux à gauche de  $\mathbb{I}_1$  de type fini. Soient  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{I}_1$  et  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{I}_1$  des générateurs de  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  respectivement.*

*Alors, pour tous  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{I}_1$  et  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{I}_1$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $a = \sum_{i=1}^n a_i u_i = \sum_{j=1}^m b_j v_j \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$

2.  $(a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m) \in \ker_{\mathbb{I}_1} \left( \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ -v_1 \\ \vdots \\ -v_m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right)$ .

**Exemple 3.3.1.** Soient  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1 t$  et  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1 \partial$ . Alors, nous avons

$$(\partial^2 \quad t \partial + 2) \in \ker_{\mathbb{I}_1} \left( \begin{pmatrix} t \\ - \partial \end{pmatrix} \right) \iff a = \partial^2 t = (t \partial + 2) \partial = t \partial^2 + 2 \partial \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}.$$

Maintenant que le lien entre le noyau d'une matrice colonne et l'intersection d'idéaux a été établi, nous allons généraliser les résultats de la section 3.2.2 au cadre matriciel, ce qui nous permettra ensuite de déduire une méthode de calcul effective de l'intersection d'idéaux d'évaluation.

### 3.3.1 Calcul du noyau à gauche d'une matrice à coefficients dans $\langle e \rangle$

Dans le but d'étendre le résultat du théorème 3.2.2 du cas scalaire au cas matriciel, nous allons généraliser au cas matriciel le lemme 3.2.2, ainsi que la proposition 3.2.3. Les démonstrations suivent essentiellement les mêmes étapes que dans le cas scalaire ; seules des adaptations mineures liées aux dimensions des objets intervenant dans les calculs sont nécessaires.

**Définition 3.3.1.** Soit  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ , on note  $\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot R) := \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) \cap \mathbb{A}_1^{1 \times q}$ .

**Lemme 3.3.1.** Soit  $R = \sum_{k=0}^r R_k(t) e \partial^k \in \langle e \rangle^{q \times p}$ , avec  $R_k \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$  pour  $k = 0, \dots, r$ . Alors, il existe une matrice  $L \in \mathbb{A}_1^{q' \times q}$  telle que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.L)$ , c'est-à-dire que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.R)$  est de type fini. Plus précisément, si l'on note

$$m := \max_{k \in \llbracket 0, r \rrbracket} \deg_t R_k,$$

le maximum des degrés de toutes les entrées des matrices polynomiales  $R_0, \dots, R_r$ , alors  $L$  est explicitement donnée par :

$$L = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} = D J,$$

où  $D \in \mathbb{k}[t]^{l \times q(m+2)}$  est une matrice de rang par lignes plein vérifiant :

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.D)$$

où  $C$  et  $J$  sont les matrices définies par

$$C := \begin{pmatrix} R_0 & \dots & R_r \\ \vdots & & \vdots \\ R_0^{(m+1)} & \dots & R_r^{(m+1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times p(r+1)} \quad J := \begin{pmatrix} I_q \\ I_q \partial \\ \vdots \\ I_q \partial^{m+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_1^{q(m+2)}. \quad (3.9)$$

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.R) = \bigcap_{k=0}^r \ker_{\mathbb{A}_1}(.R_k)$ .

Soit  $\lambda \in \ker_{\mathbb{A}_1}(.R)$ , alors  $\lambda R = \sum_{k=0}^r \lambda R_k(t) e \partial^k = 0$ . D'après le lemme 2.2.1, nous avons  $\lambda R = \sum_{k=0}^r \lambda(R_k(t)) e \partial^k$  avec  $\lambda(R_k(t)) \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$ . Ainsi, nous avons  $\sum_{k=0}^r \lambda(R_k(t)) e \partial^k = 0$  et par égalité des formes normales on en déduit que  $\lambda(R_k(t)) = 0$  pour tout  $k = 0, \dots, r$ , autrement dit,  $\lambda \in \bigcap_{k=0}^r \ker_{\mathbb{A}_1}(.R_k)$ . L'autre inclusion est immédiate. Ainsi, nous avons

$$\ker_{\mathbb{A}_1}(.R) = \bigcap_{k=0}^r \ker_{\mathbb{A}_1}(.R_k).$$

Remarquons maintenant que, par définition de  $m$ , nous avons  $\partial^{m+1} I_q R_k = 0$ , pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , de sorte que

$$\partial^{m+1} I_q \in \bigcap_{k=0}^r \ker_{\mathbb{A}_1}(.R_k).$$

Soit  $P = \sum_{i=0}^{m+1} P_i(t) \partial^i$ , avec  $P_i \in \mathbb{k}[t]^{1 \times q}$ , un élément de  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.R) = \bigcap_{k=0}^r \ker_{\mathbb{A}_1}(.R_k)$ . Pour tout  $k = 0 \dots r$ , nous avons :

$$P(R_k) = \sum_{i=0}^{m+1} P_i(t) \partial^i(R_k) = 0 \iff (P_0(t) \dots P_{m+1}(t)) \underbrace{\begin{pmatrix} R_0 & \dots & R_r \\ \vdots & & \vdots \\ R_0^{(m+1)} & \dots & R_r^{(m+1)} \end{pmatrix}}_C = (0 \dots 0).$$

Ainsi,  $P \in \ker_{\mathbb{A}_1}(.R)$  si et seulement si  $(P_0(t) \dots P_{m+1}(t)) \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(.C)$ .

Comme  $\mathbb{k}[t]$  est noethérien, il existe  $D \in \mathbb{k}[t]^{l \times q(m+2)}$  tel que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$ . Par conséquent, si l'on écrit  $D = (D_0 \dots D_{m+1})$ , où les  $D_i$  sont des blocs-colonnes de taille  $l \times q$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{k}[t]^{1 \times l}$  tel que :

$$(P_0 \dots P_{m+1}) = \lambda (D_0 \dots D_{m+1}).$$

Dès lors, pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , nous avons :

$$\lambda (D_0 \dots D_{m+1}) \begin{pmatrix} I_q \\ \partial I_q \\ \vdots \\ \partial^{m+1} I_q \end{pmatrix} (R_k) = 0 \iff \lambda \sum_{i=0}^{m+1} D_i \partial^i(R_k) = 0 \iff (\lambda L)(R_k) = 0,$$

où  $L = \sum_{i=0}^{m+1} D_i \partial^i = D J \in \mathbb{A}_1^{l \times q}$ .

On a ainsi montré que  $\bigcap_{k=0}^r \ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot R_k) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.L) = \mathbb{A}_1^{1 \times l} L$ . En notant

$$L = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix},$$

avec  $f_i \in \mathbb{A}_1^{1 \times q}$ , nous en concluons que la famille  $(f_i)_i$  est une famille génératrice de  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.R) = \bigcap_{k=0}^r \ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot R_k)$ , c'est-à-dire, que nous avons :

$$\ker_{\mathbb{A}_1}(.R) = \sum_{i=1}^l \mathbb{A}_1 f_i.$$

□

**Proposition 3.3.2.** Soit  $R = \sum_{k=0}^r R_k(t) e \partial^k \in \langle e \rangle^{q \times p}$ , avec  $R_k \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$  pour  $k = 0, \dots, r$ . Alors, on a :

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) \cap \langle e \rangle^{1 \times q} = \sum_{i=1}^s \mathbb{I}_1 g_i, \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix} = E e J,$$

où  $E$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{k}$  telle que  $\text{im}_{\mathbb{k}}(.E) = \ker_{\mathbb{k}}(.e(C))$ , et où  $C$  et  $J$  sont définis par (3.9).

*Démonstration.* Soit  $P = \sum_{i=0}^n P_i e \partial^i \in \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) \cap \langle e \rangle^{1 \times q}$  avec  $P_i \in \mathbb{k}[t]^{1 \times q}$  pour  $i = 0, \dots, n$ . De plus, comme  $\partial^{m+1} I_q \in \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , on a  $e \partial^{m+1} I_q \in \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) \cap \langle e \rangle^{q \times q}$ . Ainsi, on peut donc supposer que  $P = \sum_{i=0}^{m+1} P_i(t) e \partial^i \in \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) \cap \langle e \rangle^{1 \times q}$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} P R = 0 &\iff P(R_k) = 0, \quad k = 0, \dots, r, \\ &\iff \sum_{i=0}^{m+1} P_i e(\partial^i R_k) = 0, \quad k = 0, \dots, r, \\ &\iff (P_0 \dots P_{m+1}) \begin{pmatrix} e(R_0) & \dots & e(R_r) \\ \vdots & & \vdots \\ e(R_0^{(m+1)}) & \dots & e(R_r^{(m+1)}) \end{pmatrix} = 0, \\ &\iff (P_0 \dots P_{m+1}) e(C) = 0, \\ &\iff (P_0 \dots P_{m+1}) \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(.e(C)), \end{aligned}$$

où  $C$  est la matrice définie par (3.9) et  $e(C)$  désigne son évaluation en  $t = 0$ .

Soit  $E \in \mathbb{k}^{s \times q(m+2)}$  une matrice de rang plein dont les lignes forment une base de  $\ker_{\mathbb{k}}(.e(C))$ , avec  $s = \dim_{\mathbb{k}} \ker_{\mathbb{k}}(.e(C))$ . On a alors la suite exacte suivante d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{k}$  :

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}^{1 \times s} \xrightarrow{\cdot E} \mathbb{k}^{1 \times q(m+2)} \xrightarrow{\cdot e(C)} \mathbb{k}^{1 \times p(r+1)}.$$

Comme  $\mathbb{k}[t]$  est un  $\mathbb{k}$ -module libre (donc plat, voir [166]), le produit tensoriel de cette suite exacte par  $\mathbb{k}[t]$  donne la suite exacte suivante de  $\mathbb{k}[t]$ -modules :

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times s} \xrightarrow{\cdot E} \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+2)} \xrightarrow{\cdot e(C)} \mathbb{k}[t]^{1 \times p(r+1)}.$$

(Voir la définition 2.3.9). On en déduit que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.E)$ . Ainsi,  $P R = 0$  si et seulement si  $P = (P_0 \dots P_{m+1}) e J$ , avec  $(P_0 \dots P_{m+1}) \in \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.E)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\nu \in \mathbb{k}[t]^{1 \times s}$  tel que :

$$(P_0 \dots P_{m+1}) = \nu E.$$

En utilisant la base canonique de  $\mathbb{k}[t]^{1 \times s}$ , on obtient alors les vecteurs  $g_k$  définis dans l'énoncé de la proposition. Enfin, les  $q$  dernières lignes de la matrice  $C$ , et donc de  $e(C)$ , sont nulles, ce qui implique que  $E$  contient un bloc ligne de la forme  $(0 \dots 0 I_q)$ . Cela montre que  $(0 \dots 0 I_q) e J = e \partial^{m+1} I_q$  est un bloc de taille  $q \times q$  apparaissant dans la matrice formée par les  $g_k$  et que les  $g_k$  forment un système de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) \cap \langle e \rangle^{1 \times q}$ .  $\square$

**Théorème 3.3.1.** Soit  $R = \sum_{k=0}^r R_k(t) e \partial^k \in \langle e \rangle^{q \times p}$  avec  $R_k \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$ . Soit  $m = \max_{k \in \llbracket 0, r \rrbracket} \deg_t R_k$ , et

$$C = \begin{pmatrix} R_0 & \dots & R_n \\ \vdots & & \vdots \\ R_0^{(m+1)} & \dots & R_n^{(m+1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{q(m+2) \times p(n+1)}, \quad J_{m+1} = \begin{pmatrix} I_q \\ I_q \partial \\ \vdots \\ I_q \partial^{m+1} \end{pmatrix}.$$

Enfin, soient  $D \in \mathbb{k}[t]^{r \times q(m+2)}$  et  $E \in \mathbb{k}^{s \times q(m+2)}$  deux matrices de rang plein par ligne satisfaisant

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D), \quad \ker_{\mathbb{k}}(.e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}}(.E),$$

et définissons les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = D J_{m+1} \in \mathbb{I}_1^{r \times q}, \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix} = E e J_{m+1} \in \mathbb{I}_1^{s \times q}.$$

Alors, on a :

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 f_i + \sum_{j=1}^s \mathbb{I}_1 g_j = \text{im}_{\mathbb{I}_1} \left( (f_1^T \dots f_r^T \quad g_1^T \dots g_s^T)^T \right) = \mathbb{I}_1^{1 \times (r+s)} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  est un  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche de type fini et on peut calculer explicitement un ensemble de générateurs  $\{f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s\}$  de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ .

Dans le théorème 3.2.3, pour  $a \in \mathbb{I}_1$ , il est prouvé que  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.a)$  peut être engendré uniquement par les  $f_i$ . Ce résultat a été obtenu en démontrant que le  $\mathbb{k}[t]$ -module de type fini présenté par  $C$ , c'est-à-dire  $\mathcal{N} := \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C)$ , est réduit à 0. Ce fait implique que l'on peut prendre  $E = e(D)$ , de sorte que  $s = r$  et  $g_i = e f_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ . Pour plus de détails, voir section 3.2.2.

Dans le cas matriciel, on peut étendre le théorème 3.2.3 en montrant que le  $\mathbb{k}[t]$ -module  $\mathcal{N}$  est libre, c'est-à-dire que  $\mathcal{N}$  est isomorphe à  $\mathbb{k}[t]^\delta$  pour un certain  $\delta \in \mathbb{N}$ , ce qui s'écrit  $\mathcal{N} \cong \mathbb{k}[t]^\delta$ . Remarquons que  $\delta$  est appelé le rang de  $\mathcal{N}$  et que le  $\mathbb{k}[t]$ -module nul est libre de rang 0. Pour plus de détails, voir [166, Chapitre 2, p. 56–60]. Par conséquent,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  peut être engendré par les  $f_i$ . Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin d'étendre et adapter le lemme 3.2.3.

**Lemme 3.3.2.** Soient  $A \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$ ,  $m = \deg_t A$ , et

$$J_m(A) = \begin{pmatrix} A \\ \vdots \\ A^{(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times p}, \quad U = \begin{pmatrix} I_q & t I_q & \dots & \frac{t^m}{m!} I_q \\ 0 & I_q & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} I_q \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & I_q \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times q(m+1)}.$$

Alors,  $U$  est unimodulaire, c'est-à-dire, inversible et  $U^{-1} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times q(m+1)}$ , et

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} I_q & -t I_q & \dots & \frac{(-t)^m}{m!} I_q \\ 0 & I_q & \dots & \frac{(-t)^{m-1}}{(m-1)!} I_q \\ \vdots & & I_q & \vdots \\ 0 & \dots & & I_q \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times q(m+1)}.$$

De plus, nous avons

$$U^{-1} J_m(A) = J_m(A)(0) = \begin{pmatrix} A(0) \\ \vdots \\ A^{(m)}(0) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

*Démonstration.* Il est clair que la matrice  $U$  est inversible et que

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} I_q & -t I_q & \dots & \frac{(-t)^m}{m!} I_q \\ 0 & I_q & \dots & \frac{(-t)^{m-1}}{(m-1)!} I_q \\ \vdots & & I_q & \vdots \\ 0 & \dots & & I_q \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times q(m+1)}.$$

Ainsi, on a

$$U^{-1} J_m(A) = \begin{pmatrix} A - t A^{(1)} + \frac{t^2}{2!} A^{(2)} + \dots + \frac{(-t)^m}{m!} A^{(m)} \\ \vdots \\ A^{(i)} - t A^{(i+1)} + \dots + \frac{(-t)^{m-i}}{(m-i)!} A^{(m)} \\ \vdots \\ A^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Posons  $L_i = A^{(i)} - t A^{(i+1)} + \dots + \frac{(-t)^{m-i}}{(m-i)!} A^{(m)}$  pour  $i = 0, \dots, m$ . La dérivée de  $L_i$  par rapport à  $t$  donne la somme télescopique suivante

$$\frac{dL_i}{dt} = A^{(i+1)} - A^{(i+1)} - t A^{(i+2)} + \dots + \frac{(-t)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} A^{(m)} + \frac{(-t)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} A^{(m+1)} = 0,$$

ce qui montre finalement que  $L_i = L_i(0) = A^{(i)}(0)$  pour  $i = 0, \dots, m$ .  $\square$

L'adaptation matricielle du lemme 3.2.3, proposée dans le lemme 3.3.2, repose uniquement sur des considérations calculatoires et dimensionnelles, et ne soulève aucune difficulté particulière.

Avec les notations du théorème 3.3.1, si l'on considère la matrice  $A = (R_0 \dots R_n) \in \mathbb{k}[t]^{q \times p(n+1)}$  alors, en utilisant le lemme 3.3.2, on obtient

$$C(0) = \begin{pmatrix} J_m(A)(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1} J_m(A) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_m(A) \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}}_V C. \quad (3.11)$$

En d'autres termes,  $C$  et  $C(0)$  ne diffèrent que d'une matrice unimodulaire à coefficients dans  $\mathbb{k}[t]$ . Ainsi leur conoyau sont égaux, c'est-à-dire,  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C(0))$ . Explicitons plus en détail ce résultat dans la proposition suivante.

**Proposition 3.3.3.** *Avec les notations du théorème 3.3.1, le  $\mathbb{k}[t]$ -module  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C)$  vérifie  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C(0))$ , et est un  $\mathbb{k}[t]$ -module libre, c'est-à-dire  $\mathcal{N} \cong \mathbb{k}[t]^\delta$ , où*

$$\delta = p(r+1) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)).$$

*Démonstration.* Considérons  $A = (R_0 \dots R_r) \in \mathbb{k}[t]^{q \times p(r+1)}$ . En utilisant (3.11) et le fait que  $U$  est unimodulaire, c'est-à-dire  $U^{-1} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times q(m+1)}$ , on a  $\mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+2)} C = \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+2)} C(0)$ , ce qui donne

$$\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C(0)) = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.J_m(A)(0)),$$

où

$$J_m(A)(0) = \begin{pmatrix} R_0(0) & \dots & R_r(0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ R_0^{(m)}(0) & \dots & R_r^{(m)}(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{q(m+1) \times p(r+1)}.$$

Enfin, en utilisant le fait que  $J_m(A)(0)$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{k}$ , on a

$$\mathcal{N} \cong \mathbb{k}[t] \otimes_{\mathbb{k}} \text{coker}_{\mathbb{k}}(.J_m(A)(0)),$$

où  $\text{coker}_{\mathbb{k}}(.J_m(A)(0))$  est un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension

$$\delta = p(r+1) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(J_m(A)(0)) = p(r+1) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)),$$

et ainsi,  $\mathcal{N} \cong \mathbb{k}[t]^\delta$ , c'est-à-dire  $\mathcal{N}$  est un  $\mathbb{k}[t]$ -module libre de rang  $\delta$ .  $\square$

L'exemple suivant illustre le lien avec le lemme 3.2.3. En effet, les  $a_i$  considérés ne sont pas linéairement indépendants, de sorte que  $\mathcal{N}$  ne peut être nul. Il demeure toutefois libre, comme l'affirme la proposition 3.3.3.

**Exemple 3.3.2.** Considérons  $R = te + te\partial \in \langle e \rangle$ . Ainsi, nous avons  $p = q = 1$ ,  $R = R_0 e + R_1 e\partial$ , où  $R_0 = R_1 = t$ ,  $m = r = 1$ , et

$$C = \begin{pmatrix} t & t \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t\partial \\ \partial^2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e\partial^2 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 3.3.1, nous avons alors

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1(1 - t\partial) + \mathbb{I}_1\partial^2 + \mathbb{I}_1e + \mathbb{I}_1e\partial^2.$$

De plus, on peut vérifier que (3.11) est satisfaite :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = C(0).$$

Nous avons  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)) = 1$ , ce qui, d'après la proposition 3.3.3, montre que

$$\mathcal{N} = \mathbb{k}[t]^{1 \times 2} / (\mathbb{k}[t]^{1 \times 3} C) = \mathbb{k}[t]^{1 \times 2} / (\mathbb{k}[t]^{1 \times 3} C(0))$$

est un  $\mathbb{k}[t]$ -module libre de rang 1.

Le corollaire suivant considère le cas particulier  $\mathcal{N} = 0$ .

**Corollaire 3.3.1.** Avec les notations de la proposition 3.3.3, nous avons :

1.  $\mathcal{N} = 0$  si et seulement si  $C(0)$  est une matrice de rang plein par colonnes.
2. Si  $p = q = 1$  et si les polynômes  $R_k$  sont supposés  $\mathbb{k}$ -linéairement indépendants, alors  $\mathcal{N} = 0$ .

*Démonstration.* Le premier résultat est une conséquence directe de la proposition 3.3.3.

Traitions à présent le second point. Écrivons  $R_k = \sum_{l=0}^m R_{kl} t^l$ , avec  $R_{kl} \in \mathbb{k}$ . D'après la proposition 3.3.3, le module  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C)$  est un  $\mathbb{k}[t]$ -module libre de rang  $\delta = r+1 - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0))$  où

$$C(0) = \begin{pmatrix} R_{00} & \dots & R_{r0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ m! R_{0m} & \dots & m! R_{rm} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & m! & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00} & \dots & R_{r0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{0m} & \dots & R_{rm} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Sur le corps infini  $\mathbb{k}$  (par exemple  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ), le fait que les  $R_k$  soient  $\mathbb{k}$ -linéairement indépendants en tant que polynômes formels implique que la matrice de droite de (3.12) a un rang colonne égal à  $r + 1$ . Ainsi,  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)) = r + 1$ , soit  $\delta = 0$ , et donc,  $\mathcal{N} = 0$ . □

**Théorème 3.3.2.** Soit  $R = \sum_{k=0}^r R_k(t) e \partial^k \in \langle e \rangle^{q \times p}$ , avec des matrices  $R_k \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$ . Avec les notations du théorème 3.3.1, nous avons

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \sum_{i=1}^l \mathbb{I}_1 u_i = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.F), \quad F = (f_1^T \dots f_l^T)^T,$$

où  $l = q(m + 2) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0))$  et  $m = \max_{k \in [0, n]} \deg_t R_k$ .

*Démonstration.* Avec les notations du théorème 3.3.1, nous avons la longue suite exacte de  $\mathbb{k}[t]$ -modules suivante

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times l} \xrightarrow{\cdot D} \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+2)} \xrightarrow{\cdot C} \mathbb{k}[t]^{1 \times p(r+1)} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{N} \longrightarrow 0,$$

où  $\sigma$  désigne la projection canonique sur  $\mathcal{N}$ .

D'après la proposition 3.3.3,  $\mathcal{N}$  est un  $\mathbb{k}[t]$ -module libre de rang  $\delta = p(r + 1) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0))$ . En utilisant la caractéristique d'Euler-Poincaré, (voir le théorème A.1.1), nous avons :

$$l - q(m + 2) + p(r + 1) - \delta = 0 \Rightarrow l = q(m + 2) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)).$$

La liberté de  $\mathcal{N}$  implique également que cette suite exacte longue est *scindée* (en d'autres termes, il s'agit d'un *complexe contractile* [166, Chapitre 6, p. 337]), c'est-à-dire, il existe  $X \in \mathbb{k}[t]^{q(m+2) \times l}$  et  $Y \in \mathbb{k}[t]^{p(r+1) \times q(m+2)}$  satisfaisant les identités  $D X = I_l$  et  $X D + C Y = I_{q(m+2)}$ .

En utilisant  $D C = 0$ , nous obtenons  $D(0) C(0) = 0$ , soit  $\text{im}_{\mathbb{k}}(.D(0)) \subseteq \ker_{\mathbb{k}}(.C(0))$ . Maintenant, si  $\nu \in \ker_{\mathbb{k}}(.C(0))$ , en utilisant  $X(0) D(0) + C(0) Y(0) = I_{q(m+2)}$ , nous obtenons  $\nu = (\nu X(0)) D(0)$ , ce qui implique  $\nu \in \text{im}_{\mathbb{k}}(.D(0))$ , et donc  $\ker_{\mathbb{k}}(.C(0)) = \text{im}_{\mathbb{k}}(.D(0))$ . Ainsi, dans le théorème 3.3.1 nous pouvons prendre  $E = e(D)$ .

Avec les notations du théorème 3.3.2, en utilisant l'identité  $e a = e(a) e$  pour tout  $a \in \mathbb{k}[t]$ , on obtient  $v = E e J_{m+1} = e(D) e J_{m+1} = e D J_{m+1} = e f$ , c'est-à-dire que les  $g_j$  sont les évaluations des  $f_i$ , ce qui conclut la démonstration. □

**Exemple 3.3.3.** Poursuivant l'exemple 3.3.2, on obtient  $e f_1 = e(1 - t \partial) = e = g_1$  et  $e f_2 = e \partial^2 = g_2$ , ce qui montre finalement

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1(1 - t \partial) + \mathbb{I}_1 \partial^2.$$

**Exemple 3.3.4.** Considérons les trois matrices polynomiales suivantes :

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} t+2 & t+1 \\ t+8 & 22t+9 \end{pmatrix}, \quad R_1(t) = \begin{pmatrix} t^2+2t+6 & t^2+1 \\ t+6 & 2t^2 \end{pmatrix}, \quad R_2(t) = \begin{pmatrix} t+2 & t^2+6t \\ t^2+7t-8 & t^3+t \end{pmatrix}.$$

À l'aide de **Maple**, calculons un ensemble de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , où  $R = \sum_{k=0}^2 R_k(t) e \partial^k$ , c'est-à-dire :

$$R = \begin{pmatrix} (t+2) e + (t^2+2t+6) e \partial + (t+2) e \partial^2 & (t+1) e + (t^2+1) e \partial + t(t+6) e \partial^2 \\ (t+8) e + (t+6) e \partial + (t^2+7t-8) e \partial^2 & 9e + 22te + 2t^2 e \partial + t(t^2+1) e \partial^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $C$  définie par (3.9) est alors :

$$C := \begin{pmatrix} t+2 & t+1 & t^2+2t+6 & t^2+1 & t+2 & t^2+6t \\ t+8 & 22t+9 & t+6 & 2t^2 & t^2+7t-8 & t^3+t \\ 1 & 1 & 2t+2 & 2t & 1 & 2t+6 \\ 1 & 22 & 1 & 4t & 2t+7 & 3t^2+1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant par exemple `OreModules` nous calculons une matrice  $D$  telle que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$  :

$$D := \begin{pmatrix} -5358 & -192 & 5358t+12498 & 192t-246 & -2679t^2-12498t+4275 & -96t^2+246t-798 & 0 & 32t^3-123t^2+798t-13882 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, nous introduisons la matrice  $J$  :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial & 0 \\ 0 & \partial \\ \partial^2 & 0 \\ 0 & \partial^2 \\ \partial^3 & 0 \\ 0 & \partial^3 \\ \partial^4 & 0 \\ 0 & \partial^4 \end{pmatrix}$$

et calculons le produit matriciel  $DJ = G$  :

$$G = \begin{pmatrix} -5358 + (5358t + 12498)\partial + (-2679t^2 - 12498t + 4275)\partial^2 & -192 + (192t - 246)\partial + (-96t^2 + 246t - 798)\partial^2 + (32t^3 - 123t^2 + 798t - 13882)\partial^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 3.3.2, les lignes de  $G$  sont des générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , c'est-à-dire  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1^{1 \times 3} G$ .

**Remarque 3.3.1.** Expliquons comment obtenir directement une matrice  $D \in \mathbb{k}[t]^{r \times q(m+2)}$  de rang plein par lignes satisfaisant  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$ .

Soit  $E \in \mathbb{k}^{s \times q(m+2)}$  une matrice de rang plein par lignes telle que  $\ker_{\mathbb{k}}(.C(0)) = \text{im}_{\mathbb{k}}(.E)$ . Une telle matrice peut être obtenue en utilisant des méthodes d'algèbre linéaire. Soit  $V \in \mathbb{k}[t]^{q(m+2) \times q(m+2)}$  la matrice définie dans (3.11), alors, en utilisant (3.11), on obtient

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.EV),$$

c'est-à-dire que l'on peut prendre  $D = EV$ .

Résumons cette méthode dans un algorithme.

---

**Algorithme 5** Calcul de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  avec  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$

---

**Entrée**  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ .

**Sortie** Matrice  $G$  telle que  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.G)$ .

- 1: Écrire  $R = \sum_{k=0}^n R_k(t) e \partial^k$ .
- 2: Calculer la matrice  $C$  associée à  $R$  définie par

$$C = \begin{pmatrix} R_0 & \dots & R_n \\ \vdots & & \vdots \\ R_0^{(m+1)} & \dots & R_n^{(m+1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{q(m+2) \times p(n+1)}.$$

- 3: Calculer  $D$  tel que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$ .
- 4: Calculer  $m = \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \deg_t R_k$  et poser  $J$  la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} I_q \\ I_q \partial \\ \vdots \\ I_q \partial^{m+1} \end{pmatrix}.$$

- 5: Calculer  $G = D J$ .
  - 6: **Retourner**  $G$
- 

### 3.3.1.1 Application au calcul de l'intersection de deux idéaux d'évaluation

À présent que le calcul du noyau d'une matrice à coefficients dans  $\langle e \rangle$  a été généralisé au cadre matriciel, nous pouvons utiliser la proposition 3.3.1 pour en déduire le calcul effectif de l'intersection d'idéaux.

**Théorème 3.3.3.** Soient  $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbb{I}_1 u_i$  et  $\mathcal{J} = \sum_{j=1}^{n_2} \mathbb{I}_1 v_j$  deux idéaux d'évaluation de type fini. Posons

$$u = (u_1 \dots u_{n_1})^T, \quad v = (v_1 \dots v_{n_2})^T,$$

et

$$R = (u^T \quad v^T)^T = (u_1 \dots u_{n_1} \quad v_1 \dots v_{n_2})^T \in \langle e \rangle^{(n_1+n_2) \times 1}.$$

Si  $f_1, \dots, f_r$  sont les générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  donnés par le théorème 3.3.2, c'est-à-dire

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 f_i,$$

où  $f_i = (f_{i,1} \quad f_{i,2}) \in \mathbb{I}_1^{1 \times (n_1+n_2)}$ , avec  $f_{i,1} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_1}$  et  $f_{i,2} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_2}$ , alors on a

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (f_{i,1} u) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (f_{i,2} v).$$

En particulier,  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  est de type fini et un ensemble explicite de générateurs peut être calculé.

*Démonstration.* Avec les notations du théorème 3.3.2, on a  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 f_i$ , où  $f_i = (f_{i,1} \quad f_{i,2}) \in \mathbb{I}_1^{1 \times (n_1+n_2)}$ , avec  $f_{i,1} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_1}$  et  $f_{i,2} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_2}$ . Il en résulte que  $f_{i,1} u = -f_{i,2} v$  pour  $i = 1, \dots, r$ , ce qui montre que

$$\sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (f_{i,1} p) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (f_{i,2} q) \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{J}.$$

Considérons maintenant  $x \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ . Comme  $x \in \mathcal{I}$ , il existe  $a_1, \dots, a_{n_1} \in \mathbb{I}_1$  tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n_1} a_i u_i = a u,$$

avec  $a := (a_1 \dots a_{n_1})$ . De même, comme  $x \in \mathcal{J}$ , il existe  $b_1, \dots, b_{n_2} \in \mathbb{I}_1$  tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n_2} b_i v_i = b v,$$

avec  $b := (b_1 \dots b_{n_2})$ . Ainsi, nous avons la relation  $x = a u = b v$ , ce qui implique  $(a \quad -b) R = 0$ , donc

$$(a \quad -b) \in \ker_{\mathbb{I}_1}(.R).$$

On en déduit que  $(a \quad -b) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i$  pour certains  $\alpha_i \in \mathbb{I}_1$ , et ainsi, nous obtenons :

$$a = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_{i,1}, \quad b = - \sum_{i=1}^r \alpha_i f_{i,2}.$$

Par conséquent, nous avons

$$x = a u = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_{i,1} u = b v = - \sum_{i=1}^r \alpha_i f_{i,2} v,$$

ce qui prouve l'inclusion réciproque  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \subset \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (f_{i,1} u) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (f_{i,2} v)$  et donc le résultat.  $\square$

**Algorithme 6** Calcul de générateurs de  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ , où  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \langle e \rangle$

**Entrée**  $u_1, \dots, u_{n_1}$  générateurs de  $\mathcal{I}$ ,  $v_1, \dots, v_{n_2}$  générateurs de  $\mathcal{J}$

**Sortie**  $g_1, \dots, g_{n_1}$  tels que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \sum_{i=0}^{n_1} \mathbb{I}_1 g_i$ .

- 1: Poser  $R = (u_1 \dots u_{n_1} v_1 \dots v_{n_2})^T$
- 2: Calculer la matrice  $C$  définie par (3.9)
- 3: Calculer  $D$  tel que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$
- 4: Calculer  $f = (f_1, \dots, f_r)^T = D J_{m+1}$ , où  $f_i = (f_{i,1} \ f_{i,2})$  avec  $f_{i,1} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_1}$  et  $f_{i,2} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_2}$
- 5: **Retourner**  $\{f_{1,1} u, \dots, f_{n_1,1} u\}$

**Exemple 3.3.5.** Soient  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1 (t^2 + 1) e$  et  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1 (t e + t^2 e \partial)$ . Pour calculer un ensemble fini de générateurs de  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ , nous définissons d'abord

$$R = \begin{pmatrix} (t^2 + 1) e \\ t e + t^2 e \partial \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t \end{pmatrix}}_{R_0} e + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}}_{R_1} e \partial,$$

puis nous considérons la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 \\ \vdots & \vdots \\ R_0^{(3)} & R_1^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ t & t^2 \\ 2t & 0 \\ 1 & 2t \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{8 \times 2}.$$

En utilisant, par exemple, le package `OreModules` ([59]), nous pouvons calculer une matrice de rang par lignes plein  $D$  satisfaisant  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$ . Nous obtenons

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & t & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.F) = \mathbb{I}_1^{1 \times 6} F$ , avec :

$$F = D \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2 \partial \\ I_2 \partial^2 \\ I_2 \partial^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2 + t\partial - 2 & 0 \\ \partial & 2t\partial - 4 \\ t\partial^2 - \partial & 0 \\ \partial^2 & 2t\partial^2 - 2\partial \\ \partial^3 & 0 \\ 0 & \partial^3 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le théorème 3.3.2, nous avons  $p = 1$ ,  $q = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)) = 2$ , et donc  $r = 8 - 2 = 6$ . En partitionnant  $F = (f_1 \ f_2)$ , où  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) est la première (resp. seconde) colonne de  $F$ , nous obtenons

$$f_1 = \begin{pmatrix} \partial^2 + t\partial - 2 \\ \partial \\ t\partial^2 - \partial \\ \partial^2 \\ \partial^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t\partial + 4 \\ 0 \\ -2t\partial^2 + 2\partial \\ 0 \\ \partial^3 \end{pmatrix},$$

et finalement :

$$f_1(t^2 + 1)e = f_2(te + t^2 e \partial) = (0 \ 2te \ 0 \ 2e \ 0 \ 0)^T,$$

ce qui donne  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathbb{I}_1 te + \mathbb{I}_1 e = \mathbb{I}_1 e$ , puisque  $e \partial te = e(t\partial + 1)e = e$ .

Enfin, les calculs précédents montrent que le module des syzygies

$$\text{Syz}(\mathcal{K}) = \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \{(\alpha \ \beta) \in \mathbb{I}_1^{1 \times 2} \mid \alpha(t^2 + 1)e + \beta(te + t^2 e \partial) = 0\}$$

de l'idéal à gauche  $\mathcal{K} = \mathbb{I}_1(t^2 + 1)e + \mathbb{I}_1(te + t^2 e \partial)$  est engendré par les lignes de  $F$ .

Expliquons comment utiliser ce résultat pour calculer es conditions de compatibilités du système linéaire inhomogène  $R(p(t)) = q(t)$ . Considérons ainsi le système linéaire inhomogène  $R(p(t)) = q(t)$  avec  $p \in \mathbb{k}[t]$ , et  $q = (q_1 \ q_2)^T \in \mathbb{k}[t]^{2 \times 1}$  fixé. Alors

$$(FR)(p(t)) = F(q(t)) = 0 \iff \begin{cases} q_1''(t) + t q_1'(t) - 2 = 0 \\ q_1'(t) + 2t q_2'(t) - 4 q_2(t) = 0 \\ t q_1''(t) - q_1'(t) = 0 \\ q_1''(t) + 2t q_2''(t) - 2 q_2'(t) = 0 \\ q_1^{(3)}(t) = 0 \\ q_2^{(3)}(t) = 0, \end{cases}$$

où  $q_i'(t)$ ,  $q_i''(t)$  et  $q_i^{(3)}(t)$  désignent respectivement les première, deuxième et troisième dérivées des polynômes  $q_1$  et  $q_2$ . Notons  $q_1 = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$  et  $q_2 = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$  avec  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{k}$  pour  $i = 0, 1, 2$ . Nous obtenons alors le système suivant :

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + 2\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t - 2\alpha_2 t^2 - 2\alpha_1 t - \alpha_0 = 0 \\ 2\alpha_2 t + \alpha_1 + 4\beta_2 t + 2\beta_1 t - 4\beta_2 t^2 - 4\beta_1 t - 4\beta_0 = 0 \\ 2\alpha_2 t - 2\alpha_2 t - \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 + 4\beta_2 t - 4\beta_2 t - 2\beta_1 = 0. \end{cases}$$

De la troisième égalité on peut déduire  $\alpha_1 = 0$  tandis que de la quatrième on obtient  $\alpha_2 = \beta_1$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{cases} 2\alpha_2 - \alpha_0 = 0 \\ -4\beta_0 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \beta_1 \\ \beta_2 \in \mathbb{k} \end{cases}$$

En notant  $\alpha = \alpha_2 = \beta_1$  et  $\beta = \beta_2$ , nous pouvons conclure que l'équation  $R(p(t)) = q(t)$  n'a de solution que si  $q$  s'écrit de la manière suivante :

$$q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t^2 + 2\alpha \\ \beta t^2 + \alpha t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} t^2 + 2 \\ t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{k}.$$

**Exemple 3.3.6.** Considérons  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1 T_1$  et  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1 T_2$ , où  $T_1 = e + t e \partial$  et  $T_2 = e + t e \partial + \frac{t^2}{2} e \partial^2$ . Calculons  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ . On pose :

$$R = \begin{pmatrix} e + t e \partial \\ e + t e \partial + \frac{t^2}{2} e \partial^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} e \partial + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} e \partial^2 = R_0 e + R_1 e \partial + R_2 e \partial^2.$$

À l'aide de `Maple`, on commence par définir :

$$C = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ R_0' & R_1' & R_2' \\ R_0^{(2)} & R_1^{(2)} & R_2^{(2)} \\ R_0^{(3)} & R_1^{(3)} & R_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis, en utilisant, par exemple, le package `OreModules` [59], on calcule une matrice  $D$  telle que :

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D).$$

On obtient alors :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 2 & t & -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.L),$$

avec :

$$L = D \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2 \partial \\ I_2 \partial^2 \\ I_2 \partial^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + t \partial & 2 - t \partial \\ \partial & -\partial + t \partial^2 \\ \partial^2 & 0 \\ \partial^3 & 0 \\ 0 & \partial^3 \end{pmatrix}.$$

En séparant les colonnes, on écrit :

$$L = (L_1 \quad -L_2), \quad L_1 = \begin{pmatrix} 2 + t \partial \\ \partial \\ \partial^2 \\ \partial^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 2 - t \partial \\ -\partial + t \partial^2 \\ 0 \\ 0 \\ \partial^3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient :

$$G = L_1 T_1 = L_2 T_2 = \begin{pmatrix} 2e + te\partial \\ 2e \end{pmatrix}.$$

Les deux lignes de  $G$  sont génératrices de  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ . Nous pouvons remplacer le premier générateur  $2e + te\partial$  par une combinaison  $\mathbb{I}_1$ -linéaire à gauche de  $2e + te\partial$  et  $2e$ . Ainsi,  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  est engendré par  $te\partial$  et  $e$ . Donc, nous avons  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathbb{I}_1 te\partial + \mathbb{I}_1 e = \mathbb{I}_1 e\partial + \mathbb{I}_1 e$ . De plus, d'après la remarque 2.2.8, nous avons :

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathbb{I}_1 e\partial + \mathbb{I}_1 e = \mathbb{k}[t]e\partial + \mathbb{k}[t]e = \mathbb{k}[t]e\partial \oplus \mathbb{k}[t]e = \mathbb{I}_1 T_1.$$

Enfin, nous pouvons vérifier que  $2e + te\partial \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(2e + tep)T_1 = (2e + te\partial)(e + t\partial) = e + te\partial.$$

**Remarque 3.3.2.** On vient de voir que  $\mathbb{I}_1 T_1 \cap \mathbb{I}_1 T_2 = \mathbb{I}_1 T_1$ . Plus généralement, soient deux entiers  $m \geq n$ .

Comme  $T_n T_m = T_n$  d'après la proposition 2.2.8, on a l'inclusion  $\mathbb{I}_1 T_n \subset \mathbb{I}_1 T_m$ , et donc :

$$\mathbb{I}_1 T_n \cap \mathbb{I}_1 T_m = \mathbb{I}_1 T_n.$$

**Exemple 3.3.7.** On considère les idéaux  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1 e + \mathbb{I}_1 t^2 e\partial^2$  et  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1 e\partial + \mathbb{I}_1 te$ . Nous posons alors

$$R = \begin{pmatrix} e \\ e t^2 e\partial^2 \\ e\partial \\ te \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}}_{R_0} e + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_1} e\partial + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_2} e\partial^2,$$

et la matrice  $C$  correspondante suivante

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant par exemple `OreModules` [59] nous calculons une matrice  $D$  telle que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$  :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice  $L = D \begin{pmatrix} I_4 \\ I_4 \partial \\ I_4 \partial^2 \\ I_4 \partial^3 \end{pmatrix}$  est alors définie par :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\partial \\ 0 & -2+t\partial & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+t\partial \\ \partial & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial+t\partial^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial & 0 \\ \partial^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial^2 \\ \partial^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial^3 \end{pmatrix} = (L_1 \quad -L_2),$$

avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2+t\partial \\ 0 & 0 \\ \partial & 0 \\ 0 & -\partial+t\partial^2 \\ 0 & 0 \\ \partial^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \partial^3 & 0 \\ 0 & \partial^3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ 0 & 0 \\ 0 & -1+t\partial \\ 0 & 0 \\ 0 & -t\partial^2+\partial \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\partial^2 \\ -\partial^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\partial^3 & 0 \\ 0 & -\partial^3 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors

$$L_1 \begin{pmatrix} e \\ t^2 e \partial^2 \end{pmatrix} = L_2 \begin{pmatrix} e \partial \\ t e \end{pmatrix} = (-e \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

Ainsi, nous avons :

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathbb{I}_1 e.$$

## Chapitre 4

# Solutions polynomiales d'un système intégro-différentiel rectangulaire inhomogène

Les systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires ont été longuement étudiés par la communauté de calcul formel. En particulier, il existe des algorithmes de calcul de solutions polynomiales, rationnelles, exponentielles d'équations différentielles linéaires ordinaires. Ces algorithmes de calcul sont implémentés dans différents logiciels de calcul formel, notamment `Maple`, `Mathematica`, `Macaulay2`.

L'étude des systèmes d'équations différentielles ordinaires d'un point de vue algébrique, (respectivement, analytique) a donné lieu à la théorie algébrique (respectivement, analytique) des  $\mathcal{D}$ -modules, où  $\mathcal{D}$  est un anneau d'opérateurs différentiels, dont un exemple typique est l'algèbre de Weyl  $\mathbb{A}_1$ , introduite dans la section 2.1. Cette théorie repose sur le caractère noethérien de  $\mathbb{A}_1$  (ou, plus généralement, de  $\mathcal{D}$ ), qui a permis le développement d'une analyse algébrique effective et rendu possible l'implémentation de plusieurs algorithmes en machine. En effet, l'existence de bases de Gröbner non commutatives sur  $\mathbb{A}_1$  permet de rendre cet anneau effectif. Voir la section 2.4.2 et [13, 10, 11, 12].

Ce chapitre a pour but d'explicitier une méthode effective pour calculer les solutions polynomiales d'un système rectangulaire inhomogène d'équations intégro-différentielles linéaires en une variable. Ce résultat sera fortement utilisé dans le chapitre suivant dans la preuve effective complète de la cohérence de  $\mathbb{I}_1$ . Il est néanmoins à noter que ce résultat sur les solutions polynomiales d'un système intégro-différentiel a un intérêt en soi indépendamment de la preuve effective de la cohérence de  $\mathbb{I}_1$ . En effet, ce chapitre contient le premier algorithme pour calculer les solutions polynomiales d'un système inhomogène rectangulaire d'équations intégro-différentielles à coefficients polynomiaux ( $\mathbb{k}[t]$  avec  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$  pour les calculs). Pour des études portant sur des solutions polynomiales d'opérateurs intégro-différentiels, on pourra consulter [144, 10, 11] et leurs références.

En dérivant suffisamment les équations intégro-différentielles à coefficients polynomiaux, on obtient un système linéaire différentiel homogène rectangulaire, (voir le lemme 2.2.2). Les algorithmes existants pour le calcul des solutions polynomiales des systèmes différentiels linéaires sont principalement limités aux systèmes *holonomes* [126] ou aux *connexions* [12]. En utilisant la théorie algébrique des  $\mathcal{D}$ -modules [25, 73] et des méthodes d'algèbre homologique [166], dans ce chapitre, nous paramétrons l'ensemble des solutions polynomiales des systèmes différentiels linéaires homogènes rectangulaires généraux (voir le théorème 4.1.3).

Rappelons que l'on associe au système d'équations différentielles un  $\mathcal{D}$ -module de présentation finie comme expliqué dans la section 2.3. La paramétrisation des solutions polynomiales des systèmes différentiels linéaires homogènes rectangulaires est divisée en deux parties. La première correspond au sous-module de torsion du module à gauche sur  $\mathcal{D} = \mathbb{A}_1$  qui est finiment présenté par la matrice du système différentiel. Sur  $\mathbb{A}_1$ , tout module de torsion de type fini est holonome au sens des  $\mathcal{D}$ -modules [73]. De plus, il est connu que les solutions polynomiales d'un  $\mathcal{D}$ -module holonome définissent un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie [99, 126, 10]. Des algorithmes existent dans la littérature de calcul formel pour le calcul de bases de ce  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel [25, 12, 126]. La seconde partie correspond à la partie sans torsion du même module et donne lieu à une paramétrisation des solutions pouvant dépendre de vecteurs polynomiaux arbitraires.

En effet, si  $\mathcal{P}$  est le  $\mathbb{A}_1$ -module finiment présenté par la matrice  $P$  d'opérateurs différentiels (éléments de  $\mathbb{A}_1$ ) définissant le système, alors  $\mathcal{P}$  se décompose en une somme directe entre le sous- $\mathbb{A}_1$ -module de torsion  $t(\mathcal{P})$  et le

$\mathbb{A}_1$ -module sans torsion  $\mathcal{P}/t(\mathcal{P})$ , c'est-à-dire,

$$\mathcal{P} = t(\mathcal{P}) \oplus \mathcal{P}/t(\mathcal{P}).$$

Ceci provient du fait que  $\mathbb{A}_1$  est un anneau héréditaire, ce qui implique qu'un module sans torsion est projectif (voir la définition 2.3.6 et le théorème 2.3.2). Ainsi, l'ensemble des solutions polynomiales de  $P \bullet \eta := P(\eta) = 0$  se décompose en deux parties : les solutions polynomiales du système associé à  $t(\mathcal{P})$  et celles associées à  $\mathcal{P}/t(\mathcal{P})$ . La somme directe permet alors de remonter aux solutions polynomiales du système associé à  $\mathcal{P}$  en sommant les solutions du système associé par  $t(\mathcal{P})$  et les solutions du système associé à  $\mathcal{P}/t(\mathcal{P})$ . Pour remonter au système intégro-différentiel d'origine, on ajoute aux solutions du système présenté par  $\mathcal{P}$  les contraintes données par les conditions initiales. Nous montrerons que cela revient à trouver les solutions polynomiales d'un système de la forme  $P(v) = w$ , où  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^l$ . Un tel système se résout essentiellement en écrivant la matrice d'opérateurs  $P$  sous forme normale, en appliquant le lemme 2.2.1 et en résolvant un système linéaire.

Dans la section 4.2.3, nous présenterons la contribution principale de l'article [70], à savoir un algorithme pour le calcul des solutions polynomiales des systèmes intégro-différentiels rectangulaires inhomogènes. Une étape clé sera le calcul des solutions polynomiales des systèmes différentiels rectangulaires homogènes. C'est l'objet de la section suivante.

## 4.1 Solutions polynomiales d'un système différentiel homogène général

Le problème du calcul des solutions polynomiales des systèmes différentiels linéaires a été longuement étudié par la communauté du calcul formel. Cependant les travaux existants sont essentiellement limités au cas des systèmes *holonomes* [126] ou des systèmes écrits sous la forme d'une *connexion*  $Y'(t) = C(t)Y(t)$ , où  $C(t)$  est une matrice carrée de fonctions rationnelles dans  $\mathbb{k}(t)$  [13, 12, 126, 163]. Notons que les liens entre les systèmes d'équations différentielles et la théorie du contrôle ont poussé l'étude au cas plus général [57, 138].

Dans cette section, nous utilisons la théorie algébrique des  $\mathcal{D}$ -modules et les méthodes d'algèbre homologique pour proposer un algorithme permettant de calculer les solutions polynomiales des systèmes différentiels linéaires homogènes rectangulaires généraux.

### 4.1.1 Les modules de présentation finie de $\mathbb{A}_1$

Tout système différentiel linéaire homogène à coefficients polynomiaux d'équations différentielles en une seule variable peut s'écrire sous la forme  $P \bullet \eta = P(\eta) = 0$ , où  $\eta$  est un vecteur de fonctions inconnues et  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  est une matrice rectangulaire  $l \times m$  à coefficients dans  $\mathbb{A}_1$ , qui définit le *module à gauche de présentation finie sur  $\mathbb{A}_1$*  [166]

$$\mathcal{P} = \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.P) = \mathbb{A}_1^{1 \times m} / (\mathbb{A}_1^{1 \times l} P).$$

Si besoin, nous invitons le lecteur à relire la section 2.3.1 pour les liens entre le système et la théorie des modules.

Plus en détails, cela signifie que  $\mathcal{P}$  est engendré de manière finie par les classes  $\{y_i = \pi(e_i)\}_{i=1, \dots, m}$  de la base canonique  $\{e_i\}_{i=1, \dots, m}$  de  $\mathbb{A}_1^{1 \times m}$  (où  $e_i$  est défini par 1 à la  $i^{\text{ème}}$  position et 0 ailleurs, et où  $\pi : \mathbb{A}_1^{1 \times m} \rightarrow \mathcal{P}$  est l'homomorphisme canonique à gauche sur  $\mathbb{A}_1$  envoyant  $\lambda \in \mathbb{A}_1^{1 \times m}$  sur sa classe  $\pi(\lambda)$  dans  $\mathcal{P}$ ) satisfaisant l'ensemble fini de relations à gauche sur  $\mathbb{A}_1$  donné par  $P y = 0$ , où  $y = (y_1 \dots y_m)^T \in \mathcal{P}^m$ . Ainsi, les systèmes différentiels linéaires peuvent être étudiés en considérant la *catégorie des modules à gauche de présentation finie sur  $\mathbb{A}_1$* . Cette idée est au cœur de l'*analyse algébrique* [25, 99]. Notons que  $\mathbb{A}_1$  étant noethérien, cette catégorie est la catégorie des modules de type fini.

Pour paramétrer l'ensemble des solutions polynomiales de  $P \bullet \eta = 0$ , nous devons considérer le sous-module de torsion de  $\mathcal{P}$ . L'algèbre  $\mathbb{A}_1$  est noethérienne [121], et donc un *domaine de Ore à gauche* [121]. Par conséquent, l'ensemble des *éléments de torsion* de  $\mathcal{P}$

$$t(\mathcal{P}) = \{\gamma \in \mathcal{P} \mid \exists a \in \mathbb{A}_1 : a\gamma = 0\},$$

est un sous- $\mathbb{A}_1$ -module à gauche de  $\mathcal{P}$ , voir la proposition 2.3.7. On rappelle que le module à gauche  $\mathcal{P}$  sur  $\mathbb{A}_1$  est dit *de torsion* si  $t(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$  et *sans torsion* si  $t(\mathcal{P}) = 0$ . En particulier,  $\mathcal{P}/t(\mathcal{P})$  est sans torsion. Nous avons la somme directe de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche suivante,

$$\mathcal{P} = t(\mathcal{P}) \oplus \mathcal{P}/t(\mathcal{P}),$$

qui implique la somme directe de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche suivante,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\mathcal{P}, \mathbb{k}[t]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_1}(t(\mathcal{P}), \mathbb{k}[t]) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\mathcal{P}/t(\mathcal{P}), \mathbb{k}[t]).$$

Ainsi, si l'on peut calculer des matrices de présentations pour les modules  $t(\mathcal{P})$  et  $\mathcal{P}/t(\mathcal{P})$ , notées  $P_t$  et  $P_{st}$  respectivement, alors nous avons :

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(.P) \cong \ker_{\mathbb{k}[t]}(.P_t) \oplus \ker_{\mathbb{k}[t]}(.P_{st}).$$

Caractérisons maintenant explicitement  $t(\mathcal{P})$ . Le  $\mathbb{A}_1$ -module à droite

$$\ker_{\mathbb{A}_1}(P.) = \{y \in \mathbb{A}_1^{m \times 1} \mid P y = 0\}$$

étant noethérien, il existe une matrice  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$  telle que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P.) = \mathrm{im}_{\mathbb{A}_1}(Q.) = Q \mathbb{A}_1^{n \times 1}$ . Nous avons alors la suite exacte suivante de  $\mathbb{A}_1$ -modules à droite :

$$0 \longleftarrow T(\mathcal{P}) \longleftarrow \mathbb{A}_1^{l \times 1} \xleftarrow{P} \mathbb{A}_1^{m \times 1} \xleftarrow{Q} \mathbb{A}_1^{n \times 1} \quad (4.1)$$

où  $T(\mathcal{P}) = \mathrm{coker}_{\mathbb{A}_1}(P.) = \mathbb{A}_1^{l \times 1} / (P \mathbb{A}_1^{m \times 1})$  est le  $\mathbb{A}_1$ -module à droite présenté par  $P$ , aussi appelé le *transposé d'Auslander* de  $\mathcal{P}$ . Comme  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P.) = \mathrm{im}_{\mathbb{A}_1}(Q.)$ , en particulier, nous avons que  $PQ = 0$ . Ainsi,

$$\mathbb{A}_1^{1 \times l} \xrightarrow{.P} \mathbb{A}_1^{1 \times m} \xrightarrow{.Q} \mathbb{A}_1^{1 \times n}$$

est un *complexe* de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche [166], obtenu par application du *foncteur contravariant exact à gauche*  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\cdot, \mathbb{A}_1)$  à la suite exacte (4.1), voir annexe A.1.5.

**Théorème 4.1.1.** *Soient  $\mathcal{P} = \mathrm{coker}_{\mathbb{A}_1}(.P) = \mathbb{A}_1^{1 \times m} / (\mathbb{A}_1^{1 \times l} P)$  un module de présentation finie et  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$  une matrice telle que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P.) = \mathrm{im}_{\mathbb{A}_1}(Q.)$ . Alors :*

$$t(\mathcal{P}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathbb{A}_1}^1(T(\mathcal{P}), \mathbb{A}_1) = \ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) / \mathrm{im}_{\mathbb{A}_1}(.P).$$

*Démonstration.* Ce résultat est l'application du théorème 2.3.3. Pour plus de détails, voir aussi ([135, Théorème 1.3.1]).  $\square$

Énonçons maintenant un lemme utile pour la suite.

**Lemme 4.1.1.** ([71, Lemme 3.1])

*Soient  $R \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$ ,  $R' \in \mathbb{A}_1^{q' \times p}$  et  $R'' \in \mathbb{A}_1^{q \times q'}$  trois matrices vérifiant la relation  $R = R'' R'$ . Soit  $T' \in \mathbb{A}_1^{r' \times q'}$  telle que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.R') = \mathbb{A}_1^{1 \times r'} T'$ . On considère les projections canoniques :*

$$\pi_1 : \mathbb{A}_1^{1 \times q'} R' \longrightarrow \mathcal{M}_1 := \left( \mathbb{A}_1^{1 \times q'} R' \right) / \left( \mathbb{A}_1^{1 \times q} R \right) \quad \text{et} \quad \pi_2 : \mathbb{A}_1^{1 \times q'} \longrightarrow \mathcal{M}_2 := \mathbb{A}_1^{1 \times q'} / \left( \mathbb{A}_1^{1 \times q} R'' + \mathbb{A}_1^{1 \times r'} T' \right).$$

Alors, le morphisme  $\psi$  défini par

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M}_2 &\longrightarrow \mathcal{M}_1 \\ \pi_2(\lambda) &\longmapsto \pi_1(\lambda R'), \end{aligned}$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche, dont l'inverse  $\varphi$  est donné par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_1 &\longrightarrow \mathcal{M}_2 \\ \pi_1(\lambda R') &\longmapsto \pi_2(\lambda). \end{aligned}$$

Autrement dit, on a l'isomorphisme suivant de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche :

$$\left( \mathbb{A}_1^{1 \times q'} R' \right) / \left( \mathbb{A}_1^{1 \times q} R \right) \cong \mathbb{A}_1^{1 \times q'} / \left( \mathbb{A}_1^{1 \times q} R'' + \mathbb{A}_1^{1 \times r'} T' \right).$$

*Démonstration.* Montrons que  $\psi$  est un morphisme bien défini. Supposons  $m_2 = \pi_2(\lambda) = \pi_2(\lambda')$ , avec  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{A}_1^{1 \times q'}$ . Alors, on a  $\pi_2(\lambda - \lambda') = 0$ , c'est-à-dire que  $\lambda - \lambda' \in \mathbb{A}_1^{1 \times q} R'' + \mathbb{A}_1^{1 \times r'} T'$ . Il existe donc  $\mu \in \mathbb{A}_1^{1 \times q}$  et  $\nu \in \mathbb{A}_1^{1 \times r'}$  tels que :

$$\lambda - \lambda' = \mu R'' + \nu T'.$$

En utilisant  $T' R' = 0$  et  $R = R'' R'$ , on en déduit,

$$(\lambda - \lambda') R' = (\mu R'' + \nu T') R' = \mu R,$$

ainsi, nous avons

$$\pi_1((\lambda - \lambda') R') = \pi_1(\mu R) = 0 \implies \pi_1(\lambda R') = \pi_1(\lambda' R') = \psi(m_2),$$

ce qui montre que  $\psi$  est bien défini.

Montrons maintenant que  $\varphi$  est aussi bien défini. Supposons que  $m_1 = \pi_1(\lambda R') = \pi_1(\lambda' R')$ , avec  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{A}_1^{1 \times q'}$ . Alors, on a :

$$\pi_1((\lambda - \lambda') R') = 0 \implies (\lambda - \lambda') R' \in \mathbb{A}_1^{1 \times q} R.$$

Il existe donc  $\mu \in \mathbb{A}_1^{1 \times q}$  tel que :

$$(\lambda - \lambda') R' = \mu R.$$

En utilisant la factorisation  $R = R'' R'$ , on obtient :

$$(\lambda - \lambda' - \mu R'') R' = 0,$$

ce qui implique que :

$$\lambda - \lambda' - \mu R'' \in \ker_{\mathbb{A}_1}(.R') = \mathbb{A}_1^{1 \times r'} T'.$$

Il existe donc  $\nu \in \mathbb{A}_1^{1 \times r'}$  tel que

$$\lambda - \lambda' = \mu R'' + \nu T' \implies \pi_2(\lambda) = \pi_2(\lambda'),$$

et ainsi  $\varphi$  est bien défini.

Enfin, pour tout  $m_1 = \pi_1(\lambda R') \in \mathcal{M}_1$  et  $m_2 = \pi_2(\lambda) \in \mathcal{M}_2$ , avec  $\lambda \in \mathbb{A}_1^{1 \times q'}$ , on a :

$$(\psi \circ \varphi)(m_1) = \psi(\pi_2(\lambda)) = \pi_1(\lambda R') = m_1,$$

$$(\varphi \circ \psi)(m_2) = \varphi(\pi_1(\lambda R')) = \pi_2(\lambda) = m_2.$$

On a donc  $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{M}_1}$  et  $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{M}_2}$ , ce qui montre que  $\psi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche, ce qui conclut la preuve.  $\square$

La proposition suivante donne une présentation finie de  $t(\mathcal{P})$  à partir de la matrice ed présentation de  $\mathcal{P}$ .

**Proposition 4.1.1.** Soient  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  et  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q)$ ,  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(P')$ , et  $M' \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(M')$ . Enfin, soit  $P'' \in \mathbb{A}_1^{l \times p}$  tel que  $P = P'' P'$ .

Posons  $H = (M'^T \quad P''^T)^T \in \mathbb{A}_1^{(q+l) \times p}$  et considérons les deux projections canoniques suivantes

$$\pi_1 : \mathbb{A}_1^{1 \times p} P' \longrightarrow \mathbb{A}_1^{1 \times p} P' / (\mathbb{A}_1^{1 \times m} P) := \mathcal{M}_1 \quad \text{et} \quad \pi_2 : \mathbb{A}_1^{1 \times q'} \longrightarrow \mathbb{A}_1^{1 \times p} / \left( \mathbb{A}_1^{1 \times q} M' + \mathbb{A}_1^{1 \times l} P'' \right) = \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.H).$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \psi : \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.H) &\longrightarrow \mathcal{M}_1 & \varphi : \mathcal{M}_1 &\longrightarrow \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.H) \\ \pi_2(\lambda) &\longmapsto \pi_1(\lambda P'), & \pi_1(\lambda P') &\longmapsto \pi_2(\lambda), \end{aligned}$$

sont deux  $\mathbb{A}_1$ -isomorphismes inverses l'un de l'autre. Ainsi, nous avons

$$t(\mathcal{P}) \cong \text{im}_{\mathbb{A}_1}(P') / \text{im}_{\mathbb{A}_1}(P) \cong \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.H) = \mathbb{A}_1^{1 \times p} / \left( \mathbb{A}_1^{1 \times (q+l)} H \right).$$

Finalement, la matrice  $H$  définit une présentation finie de  $t(\mathcal{P})$ .

*Démonstration.* Le  $\mathbb{A}_1$ -module  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q)$  étant un  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche noethérien, il existe une matrice  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$  telle que

$$\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P') = \mathbb{A}_1^{1 \times p} P'.$$

De même, il existe une matrice  $M' \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  telle que

$$\ker_{\mathbb{A}_1}(.P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.M'). \quad (4.2)$$

Ainsi, nous avons la suite exacte longue de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche suivante :

$$\mathbb{A}_1^{1 \times q} \xrightarrow{.M'} \mathbb{A}_1^{1 \times p} \xrightarrow{.P'} \mathbb{A}_1^{1 \times m} \xrightarrow{.Q} \mathbb{A}_1^{1 \times n}.$$

D'après le théorème 4.1.1, nous avons alors :

$$t(\mathcal{P}) \cong \ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) / \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P') / \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P).$$

Maintenant, en utilisant  $\text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P) \subseteq \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P')$ , il existe  $P'' \in \mathbb{A}_1^{l \times p}$  tel que :

$$P = P'' P'. \quad (4.3)$$

Enfin, en appliquant le lemme 4.1.1, nous obtenons :

$$t(\mathcal{P}) \cong \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P') / \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P) \cong \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.H) = \mathbb{A}_1^{1 \times p} / \left( \mathbb{A}_1^{1 \times (q+l)} H \right).$$

□

Résumons ce résultat dans l'algorithme 7.

---

#### Algorithme 7 Présentation de $t(\mathcal{P})$ et $\mathcal{P} / t(\mathcal{P})$

---

**Entrée**  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$ .

**Sortie**  $H, P'$  et  $Q$  tels que  $t(\mathcal{P}) \cong \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.H)$  et  $\mathcal{P} / t(\mathcal{P}) \cong \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.P') \cong \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.Q)$ .

- 1: Calculer  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q)$ .
  - 2: Calculer  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P')$ .
  - 3: Calculer  $M' \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.M')$ .
  - 4: Calculer  $P'' \in \mathbb{A}_1^{l \times p}$  tel que  $P = P'' P'$ .
  - 5: **Retourner**  $H = (M'^T P''^T)^T, P', Q$ .
- 

**Remarque 4.1.1.** Les étapes 1, 2, et 3 impliquent le calcul des syzygies à gauche et à droite sur  $\mathbb{A}_1$ , tandis que l'étape 4 est une factorisation à gauche sur  $\mathbb{A}_1$ . Les matrices  $Q, P', M'$ , et  $P''$  peuvent être calculées à partir de  $P$  en utilisant les méthodes de bases de Gröbner [58] ainsi que le package `OreModules` [59]. Pour plus de détails sur le calcul effectif sur  $\mathbb{A}_1$  voir la section 2.4.2.

**Remarque 4.1.2.** Avec les notations de l'algorithme 7, on a :

$$t(\mathcal{P}) \cong \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.H), \quad \mathcal{P} / t(\mathcal{P}) \cong \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.P') \cong \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.Q).$$

**Exemple 4.1.1.** Appliquons l'algorithme 7 à la matrice  $P = \begin{pmatrix} t^2 & t \end{pmatrix}$ . Grâce à `OreModules` on peut calculer  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q)$  et on trouve :

$$Q = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Calculons  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P')$ . On obtient :

$$P' = (t \quad 1).$$

Ainsi, pour avoir  $P = P'' P'$ , nous posons  $P'' = (t)$ . De plus,  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.P')$  est le module nul. Ainsi, nous avons :

$$H = (t).$$

Donnons maintenant un deuxième exemple moins trivial.

**Exemple 4.1.2.** Considérons la matrice  $P = \begin{pmatrix} t & 0 & \partial \\ \partial & t & \partial \end{pmatrix}$  et appliquons l'algorithme 7. Grâce à `OreModules` on peut calculer  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q)$ . On obtient :

$$Q = \begin{pmatrix} -t^3 \partial - 5t^2 & t^2 \partial^2 + 3t \partial - 3 & t \partial^4 - \partial^3 \\ -t^4 \partial + t^2 \partial^2 - 5t^3 + 8t \partial + 10 & t^3 \partial^2 - t \partial^3 + 3t^2 \partial - 5 \partial^2 - 3t & t^2 \partial^4 - \partial^5 - t \partial^3 \\ t^5 & -t^4 \partial + t^3 & -t^3 \partial^3 + 4t^2 \partial^2 - 8t \partial + 8 \end{pmatrix}.$$

Calculons  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P')$ . Nous avons :

$$P' = \begin{pmatrix} \partial & t & \partial \\ t^2 & 0 & \partial \\ -2t & t^3 & t^2 \partial - \partial^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en posant  $P'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , nous avons la factorisation  $P = P'' P'$ . De plus,  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.M')$  avec  $M' = (t^2 \quad \partial \quad -1)$ . Ainsi, nous avons :

$$H = \begin{pmatrix} t^2 & \partial & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 4.1.2 Description explicite de l'ensemble des solutions polynomiales

Soit  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$ . Notre objectif est de paramétrer

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet) = \{v \in \mathbb{k}[t]^m \mid P(v) = 0\}.$$

**Proposition 4.1.2.** Soient  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$ ,  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$ ,  $M' \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$ , et  $P'' \in \mathbb{A}_1^{l \times p}$  définis comme dans la section 4.1.1 (voir aussi l'algorithme 7). Alors, nous avons l'équivalence suivante :

$$P(v) = 0 \iff \begin{cases} P'(v) = u, \\ H(u) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

*Démonstration.* Détaillons cette équivalence. Nous avons  $P = P'' P'$  d'après (4.3). Alors,  $P(v) = 0$  équivaut à  $P''(P'(v)) = 0$ . Posons  $u = P'(v)$ . Alors,  $P''(P'(v)) = 0$  donne

$$\begin{cases} P'(v) = u, \\ P''(u) = 0. \end{cases}$$

Notons que  $0 = M'(P'(v)) = M'(u)$ . Ainsi,  $P''(P'(v)) = 0$  implique

$$\begin{cases} P'(v) = u, \\ P''(u) = 0, \\ M'(u) = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, le système

$$\begin{cases} P'(v) = u, \\ P''(u) = 0, \\ M'(u) = 0, \end{cases}$$

implique  $P''(P'(v)) = 0$ . Ainsi, l'équation (4.4) est bien une équivalence. Notons de plus que  $u$  satisfait bien les conditions de compatibilités  $M'(u) = 0$  du système inhomogène  $P'(v) = u$  imposées par (4.2).  $\square$

Une conséquence de la proposition 4.1.2 est qu'avec la notation de la section 4.1.1, nous devons d'abord étudier  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \bullet)$  et ensuite, nous devons considérer le système d'équations linéaires inhomogène  $P'(v) = u$  pour obtenir  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet)$ .

Pour une définition précise de l'holonomie, nous référons, par exemple, à [73, 25]. Dans notre contexte, seul le résultat du théorème 4.1.2 ci-dessous nous est utile. Pour des preuves algorithmiques et des implémentations du calcul des bases des solutions polynomiales des modules holonomes sur  $\mathbb{A}_1$ , voir, par exemple, [25] et [12, 126].

**Proposition 4.1.3.** ([73, Chapitre 10, Corollaire 1.2]) *Un  $\mathbb{A}_1$ -module de torsion est holonome.*

La proposition suivante affirme que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \bullet)$  est toujours de dimension finie.

**Théorème 4.1.2.** ([99, 126, 10]) *Le  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel des solutions polynomiales d'un  $\mathbb{A}_1$ -module holonome est de dimension finie.*

**Proposition 4.1.4.** *Soient  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  et  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$ ,  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$ ,  $M' \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  et  $P'' \in \mathbb{A}_1^{l \times p}$  définis comme dans la section 4.1.1 (voir aussi l'algorithme 7). Alors, l'ensemble  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \bullet)$  de toutes les solutions polynomiales du système d'équations différentielles ordinaires linéaires défini par  $H = (M'^T \ P''^T)^T \in \mathbb{A}_1^{(q+l) \times p}$  est de dimension finie.*

*Démonstration.* Le  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche  $t(\mathcal{P})$  étant un module de torsion, il s'agit d'un  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche holonome d'après la proposition 4.1.3. Ainsi le système d'équations différentielles ordinaires linéaires

$$H(u) = 0 \iff \begin{cases} P''(u) = 0, \\ M'(u) = 0, \end{cases}$$

est holonome et  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \bullet)$  est donc un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie d'après le théorème 4.1.2.  $\square$

**Proposition 4.1.5.** *Soient  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  et  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$ ,  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$ ,  $M' \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  et  $P'' \in \mathbb{A}_1^{l \times p}$  définis comme dans la section 4.1.1 (voir aussi l'algorithme 7). Alors, la matrice  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$  admet un inverse généralisé, c'est-à-dire qu'il existe  $T' \in \mathbb{A}_1^{m \times p}$  satisfaisant*

$$P' T' P' = P'.$$

*Démonstration.* En utilisant la suite exacte longue (4.1), nous avons  $\mathcal{Q} := \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(Q) \cong \text{im}_{\mathbb{A}_1}(P)$ , ce qui montre que  $\mathcal{Q}$  est sans torsion, car nous avons  $\text{im}_{\mathbb{A}_1}(P) \subseteq \mathbb{A}_1^{l \times 1}$  et  $\mathbb{A}_1^{l \times 1}$  est un module à droite sans torsion, car libre. Voir par exemple le théorème 2.3.2 de la section 2.3.2.

En utilisant le fait que la *dimension globale* de  $\mathbb{A}_1$ , notée  $\text{gld}(\mathbb{A}_1)$ , est égale à 1 (voir [121, Théorème 7.5.8] et la définition A.1.16 en annexe),  $\mathcal{Q}$  est *projectif*, c'est-à-dire qu'il existe  $r \in \mathbb{N}$  et un  $\mathbb{A}_1$ -module à droite de type fini  $\mathcal{R}$ , tel que  $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R} \cong \mathbb{A}_1^{r \times 1}$  (voir section 2.3.2). De plus, tout  $\mathbb{A}_1$ -module projectif est *stablement libre* (voir 2.3.2 de la section 2.3.2), c'est-à-dire qu'il existe  $r, s \in \mathbb{N}$  tels que  $\mathcal{Q} \oplus \mathbb{A}_1^{s \times 1} \cong \mathbb{A}_1^{r \times 1}$ , [121].

Donnons une caractérisation plus explicite du caractère stablement libre de  $\mathcal{Q}$  qui sera utile pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires (4.4). Posons  $Q_1 := Q$  et  $m_0 := m$ . En utilisant les méthodes de bases de Gröbner [58], nous pouvons calculer une *résolution libre finie* de  $\mathcal{Q}$  (voir la définition A.1.15), c'est-à-dire une suite exacte longue de  $\mathbb{A}_1$ -modules à droite de la forme

$$0 \longleftarrow \mathcal{Q} \longleftarrow \mathbb{A}_1^{m_1 \times 1} \xleftarrow{Q_1} \mathbb{A}_1^{m_0 \times 1} \xleftarrow{Q_2} \dots \xleftarrow{Q_r} \mathbb{A}_1^{m_r \times 1} \longleftarrow 0$$

où  $Q_i \in \mathbb{A}_1^{m_{i-1} \times m_i}$  pour  $i = 1, \dots, r$ . Le fait que  $Q$  soit projectif implique que la résolution libre finie ci-dessus se scinde [166]. On pose  $Q^* = \text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(Q, \mathbb{A}_1)$ . En appliquant le foncteur exact à gauche contravariant  $\text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\cdot, \mathbb{A}_1)$  (voir la proposition A.1.5) à la suite exacte scindée ci-dessus, nous obtenons la suite exacte longue scindée de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche suivante ([166]) :

$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow \mathbb{A}_1^{1 \times m_0} \xrightarrow{\cdot Q_1} \dots \xrightarrow{\cdot Q_r} \mathbb{A}_1^{1 \times m_r} \longrightarrow 0.$$

Le  $\mathbb{A}_1$ -morphisme  $\cdot Q_r$  est surjectif, ce qui montre qu'il existe une matrice  $S_r \in \mathbb{A}_1^{m_r \times m_{r-1}}$  satisfaisant  $S_r Q_r = I_{m_r}$ . Un inverse à gauche  $S_r$  de  $Q_r$  peut être calculé grâce à l'algorithme 2 de la section 2.3.2. Nous avons également

$$\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q_i) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q_{i-1}), \quad i = 2, \dots, r.$$

Posons maintenant  $\Pi_r := I_{m_{r-1}} - Q_r S_r \in \mathbb{A}_1^{m_{r-1} \times m_{r-1}}$ , nous avons  $\Pi_r Q_r = Q_r - Q_r S_r Q_r = 0$ , c'est-à-dire  $\text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot \Pi_r) \subseteq \ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q_r) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q_{r-1})$ , ce qui montre qu'il existe une matrice  $S_{r-1} \in \mathbb{A}_1^{m_{r-1} \times m_{r-2}}$  satisfaisant  $\Pi_r = S_{r-1} Q_{r-1}$ , c'est-à-dire que  $Q_r S_r + S_{r-1} Q_{r-1} = I_{m_{r-1}}$ . La matrice  $S_{r-1}$  peut être calculée en utilisant le package `OreModules` [59] grâce au fait que  $\mathbb{A}_1$  est un anneau effectif (voir section 2.3.2). En pré-multipliant cette dernière identité par  $Q_{r-1}$  et en utilisant  $Q_{r-1} Q_r = 0$ , nous obtenons  $Q_{r-1} S_{r-1} Q_{r-1} = Q_{r-1}$ , ce qui montre que  $S_{r-1}$  est un inverse généralisé de  $Q_{r-1}$ . En répétant les mêmes arguments de manière récursive et en posant  $S = S_1$  et  $Q = Q_1$ , nous obtenons enfin un inverse généralisé  $S \in \mathbb{A}_1^{n \times m}$  de  $Q$ , c'est-à-dire une matrice  $S$  telle que  $Q S Q = Q$ .

En posant  $\Pi := I_m - Q S \in \mathbb{A}_1^{m \times m}$ , nous avons  $\Pi Q = Q - Q S Q = 0$ , et donc  $\text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot \Pi) \subseteq \ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot P')$ . Ainsi, il existe  $T' \in \mathbb{A}_1^{m \times p}$  telle que  $\Pi = T' P'$ , c'est-à-dire  $Q S + T' P' = I_m$ , ce qui donne  $P' T' P' = P'$ .  $\square$

**Remarque 4.1.3.** De manière similaire, il existe  $U' \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$  telle que  $P' T' + U' M' = I_p$ . Les matrices  $T'$  et  $U'$  peuvent aussi être calculées avec le package `OreModules` [59]. Par conséquent, nous avons la suite exacte longue scindée de  $\mathbb{A}_1$ -modules à gauche suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{A}_1^{1 \times q} & \xrightarrow{\cdot M'} & \mathbb{A}_1^{1 \times p} & \xrightarrow{\cdot P'} & \mathbb{A}_1^{1 \times m} & \xrightarrow{\cdot Q} & \mathbb{A}_1^{1 \times n} \\ & \swarrow \cdot U' & \swarrow \cdot T' & \swarrow \cdot S & & & \end{array}$$

**Remarque 4.1.4.** Toutes les matrices intervenant dans l'énoncé et la preuve de la proposition 4.1.5 peuvent se calculer grâce à `OreModules`. Cette preuve est ainsi totalement effective.

Le théorème suivant fournit une paramétrisation explicite de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \cdot)$ .

**Théorème 4.1.3.** Soient  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  et  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$ ,  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$ ,  $M' \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  et  $P'' \in \mathbb{A}_1^{l \times p}$  définis comme dans la section 4.1.1 (voir aussi l'algorithme 7). Soient  $d$  la dimension de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \cdot)$  en tant que  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel et  $\{b_i\}_{i=1, \dots, d}$  une base de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \cdot)$ . Soit  $u_g = \sum_{i=1}^d c_i b_i$  la solution polynomiale générale de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \cdot)$ , où les  $c_i$  sont des constantes arbitraires de  $\mathbb{k}$ . Ainsi, nous avons

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \cdot) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid s \in \mathbb{k}[t]^n\}.$$

*Démonstration.*

$$H(u) = 0 \iff \begin{cases} P''(u) = 0, \\ M'(u) = 0, \end{cases}$$

Soit  $d := \dim_{\mathbb{k}}(\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \cdot)) < \infty$  et  $\{b_i\}_{i=1, \dots, d}$  une base des solutions polynomiales de  $H(u) = 0$ . Résolvons maintenant le système d'équations différentielles ordinaires linéaires inhomogène  $P'(v) = u_g$ , où  $u_g = \sum_{i=1}^d c_i b_i$  est la solution générale de  $H(u) = 0$ , c'est-à-dire que  $c_1, \dots, c_d$  sont des constantes arbitraires de  $\mathbb{k}$ . La solution générale de  $P'(v) = u_g$  est la somme d'une solution particulière  $v_p \in \mathbb{k}[t]^m$  de  $P'(v) = u_g$  et de la solution générale du système homogène d'équations différentielles linéaires  $P'(v) = 0$ .

Nous avons, d'après la remarque 4.1.3, la suite exacte suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{A}_1^{1 \times q} & \xrightarrow{\cdot M'} & \mathbb{A}_1^{1 \times p} & \xrightarrow{\cdot P'} & \mathbb{A}_1^{1 \times m} & \xrightarrow{\cdot Q} & \mathbb{A}_1^{1 \times n} \\ & \swarrow \cdot U' & \swarrow \cdot T' & \swarrow \cdot S & & & \end{array}$$

Maintenant, en appliquant le foncteur exact à gauche contravariant  $\text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\cdot, \mathbb{k}[t])$  (voir la proposition A.1.5 de l'annexe A) à la suite exacte scindée ci-dessus, nous obtenons la suite exacte scindée suivante de  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{k}[t]^{n \times 1} & \xrightarrow{Q \cdot} & \mathbb{k}[t]^{m \times 1} & \xrightarrow{P' \cdot} & \mathbb{k}[t]^{p \times 1} & \xrightarrow{M' \cdot} & \mathbb{k}[t]^{q \times 1} \\ & \swarrow S & & \swarrow T' & & \swarrow U' & \\ & & & & & & \end{array}$$

**Remarque 4.1.5.** On rappelle que  $\mathbb{k}[t]$  a une structure de  $\mathbb{A}_1$ -module donnée par l'action  $P \bullet p = P(p)$  avec  $P \in \mathbb{A}_1$  et  $p \in \mathbb{k}[t]$ . Voir la remarque 2.1.2. Ainsi, dans la suite exacte précédente, le morphisme de  $\mathbb{A}_1$ -modules  $Q \cdot$  de  $\mathbb{k}[t]^{n \times 1}$  dans  $\mathbb{k}[t]^{m \times 1}$  peut être vu comme l'application linéaire  $Q$  de  $\mathbb{k}[t]^{n \times 1}$  dans  $\mathbb{k}[t]^{m \times 1}$  « classique » qui à  $p \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1}$  associe  $Q(p) \in \mathbb{k}[t]^{m \times 1}$ . Il en va évidemment de même pour les morphismes  $P', M', S, T'$  et  $U'$ .

Nous avons ainsi montré que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P' \bullet) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(Q \bullet)$ , c'est-à-dire que chaque solution de  $P(v) = 0$  est de la forme  $v = Q(s)$  pour un certain  $s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1}$ .

L'identité  $P' T' + U' M' = I_p$  donne  $u_g = P'(T'(u_g)) + U'(M'(u_g)) = P'(T'(u_g))$ , ce qui montre que  $v_p := T'(u_g)$  est une solution particulière du système linéaire inhomogène  $P'(v) = u_g$ . Ainsi, nous avons

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1}\}.$$

□

### 4.1.3 Algorithme et exemple

Nous rassemblons les étapes de calcul d'une paramétrisation de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet)$  pour  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  dans l'algorithme suivant.

---

**Algorithme 8** Solutions polynomiales de  $P(v) = 0$  avec  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$

---

**Entrée**  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$ .

**Sortie**  $T', u_g$  et  $Q$  tels que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid s \in \mathbb{k}[t]^n\}$ .

- 1: Appliquer l'algorithme 7 pour calculer  $Q, P', M',$  et  $P''$ .
  - 2: Calculer la solution polynomiale générale  $u_g = \sum_{i=1}^d c_i b_i$  de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \bullet)$ , où  $H = (M'^T \quad P''^T)^T \in \mathbb{A}_1^{(q+l) \times p}$ .
  - 3: Calculer un inverse généralisé  $T' \in \mathbb{A}_1^{m \times p}$  de  $P'$ .
  - 4: **Retourner**  $T', u_g$  et  $Q$ .
- 

Les étapes 1 et 3 peuvent être effectuées directement à l'aide du package `OreModules` [59]. Pour l'étape 2, il est nécessaire de calculer la solution polynomiale générale d'un système différentiel linéaire holonome. Dans notre implémentation `Bavula` [69], nous utilisons le fait que tout système linéaire holonome d'équations différentielles ordinaires peut être écrit sous la forme d'une connexion intégrable, c'est-à-dire, que le système se réécrit sous la forme  $Y'(t) = C(t)Y(t)$ , où  $C(t)$  est une matrice carrée de fonctions rationnelles dans  $\mathbb{k}(t)$  (voir [60, proposition 2.1]). Pour cela nous calculons une base finie du bimodule  $\mathbb{B}_1 \otimes_{\mathbb{A}_1} t(\mathcal{P}) \cong \mathbb{B}_1^* / (\mathbb{B}_1^* H)$ , à l'aide d'un calcul de base de Gröbner pour l'ordre total et on considère les monômes qui ne sont pas les termes de tête des éléments de la base de Gröbner et on forme le vecteur  $Y$  avec ces monômes. Par construction, nous avons alors  $Y'(t) = C(t)Y(t)$ , où  $C(t)$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{k}(t)$ .

**Définition 4.1.1.** ([12, Définition 2]) Soit  $\mathbb{k}$  un corps de caractéristique nulle. Une *connexion intégrable* (en une variable) sur un  $\mathbb{k}(t)$ -espace vectoriel de dimension finie consiste en une matrice  $C(t) \in \mathbb{k}(t)^{n \times n}$  définissant un système différentiel de la forme :

$$Y'(t) = C(t)Y(t),$$

où  $Y(t)$  est un vecteur colonne à  $n$  composantes à coefficients dans  $\mathbb{k}(t)$ , et  $Y'(t) = \frac{d}{dt}Y(t)$  désigne la dérivation usuelle du vecteur  $Y$ .

**Remarque 4.1.6.** Dans le cas de plusieurs variables, pour pouvoir dire que la connexion est *intégrable*, il est nécessaire de rajouter des conditions de compatibilités entre les variables, [61]. En une variable, l'écriture sous la forme  $Y'(t) = C(t)Y(t)$ , suffit pour être une connexion intégrable.

La solution polynomiale générale de  $Y'(t) = C(t)Y(t)$  peut être calculée en utilisant l'algorithme de [13], qui est implémenté dans le package `IntegrableConnections` [12]. Donnons les grandes lignes de cet algorithme qui se déroule en deux étapes. La première consiste en un changement de variable de sorte que le vecteur recherché  $Y$  soit polynomial plutôt que rationnel. Le procédé est basé sur l'existence d'une matrice  $T \in \text{GL}(n, \mathbb{k}(x))$  telle que  $T^{-1}Y$  soit à coefficients polynomiaux. Soit  $T \in \text{GL}(n, \mathbb{k}(x))$  une telle matrice. On considère la connexion intégrable

$$\nabla(Y) := \frac{dY}{dt} - CY = 0, \quad C \in \text{Mat}_n(\mathbb{k}(t)).$$

Le changement de variable  $Y = TZ$  transforme ce système en un nouveau système

$$\tilde{\nabla}(Z) := \frac{dZ}{dt} - \tilde{C}Z = 0$$

où les nouveaux coefficients sont donnés par :

$$\tilde{C} := T^{-1}CT - T^{-1} \frac{dT}{dt}.$$

Les deux connexions  $\nabla$  et  $\tilde{\nabla}$  sont alors dites *équivalentes* et la deuxième porte sur le vecteur  $Z = T^{-1}Y$  qui est à coefficients polynomiaux. La deuxième étape est la recherche de solutions polynomiales à proprement parler. Soit une équation différentielle matricielle de la forme

$$\nabla(Y) = \frac{dY}{dt} - \mathbf{C}Y = 0, \quad Y \in \mathbb{k}[t]^n.$$

L'objectif est de déterminer toutes les solutions polynomiales  $Y \in \mathbb{k}[t]^n$ . On suppose que  $Y$  peut s'écrire sous la forme :

$$Y = ct^\mu + Z,$$

où  $c \in \mathbb{k}^n$  et  $\mu \in \mathbb{N}$ . On obtient alors

$$\nabla(Z) = -\nabla(ct^\mu),$$

une équation du même type.

Si l'on peut choisir  $\mu$  et  $c$  de façon à ce que  $\deg_t Z < \deg_t Y$ , alors on recommence le processus avec  $Z$ , et ainsi de suite. Au bout d'un certain nombre d'itérations, on atteint une équation

$$\nabla(W) = F = -\nabla(c_1 t^{\mu_1} + \dots + c_\ell t^{\mu_\ell}),$$

qui ne possède plus de solution polynomiale non nulle de degré strictement inférieur à  $\mu_\ell$ . On en conclut que l'équation initiale admet une solution polynomiale si et seulement si :

$$F = \nabla(c_1 t^{\mu_1} + \dots + c_\ell t^{\mu_\ell}) = 0.$$

Cela donne un système d'équations linéaires en les  $c_i$ , dont la solution générale fournit l'ensemble des solutions polynomiales recherchées. Comme évoqué précédemment, cet algorithme est implémenté dans le package `IntegrableConnections` du logiciel de calcul formel `Maple`. Nous l'avons utilisé dans notre implémentation `Bavula` [69] pour effectuer l'étape 2 de l'algorithme 8.

**Remarque 4.1.7.** Une alternative pour l'étape 2 serait d'utiliser les algorithmes développés dans [126], qui ne nécessitent pas d'écrire les systèmes différentiels linéaires holonomes sous forme de connexion.

**Exemple 4.1.3.** Décrivons les différentes étapes de l'algorithme 8 appliqué à la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial^2 + t\partial^3 & 0 \\ \partial & \partial^3 & \partial + \partial^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_1^{2 \times 3}.$$

En appliquant l'algorithme 7 à l'aide du package `OreModules` [59], nous obtenons

$$Q = \begin{pmatrix} -\partial - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \partial + 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M' = 0,$$

et

$$P'' = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial^2 + t\partial^3 \\ \partial & \partial^3 \end{pmatrix}.$$

L'étape suivante consiste à calculer la solution polynomiale générale  $u_g$  du système différentiel linéaire homogène holonome donné par  $P''$ .

Écrivons ce système holonome sous forme de connexion. Soit  $u_g = (y_1(t) \ y_2(t))^T$  une solution de  $P''(u_g) = 0$ . Alors nous avons :

$$\begin{cases} 2y_2''(t) + ty_2^{(3)}(t) = 0 \\ y_1'(t) + y_2^{(3)}(t) = 0. \end{cases}$$

De la deuxième équation, nous déduisons  $y_1'(t) = -y_2^{(3)}(t)$ . En substituant dans la première équation on obtient  $2y_2''(t) = ty_2^{(3)}(t)$  et donc  $y_2''(t) = \frac{t}{2}y_2^{(3)}(t)$ . En dérivant la première on obtient

$$2y_2^{(3)}(t) + y_2^{(3)}(t) + ty_2^{(4)}(t) = 2y_1'(t) + y_1'(t) + ty_1''(t) = 0,$$

et donc  $y_1''(t) = -\frac{3}{t}y_1'(t)$ .

Ainsi, en posant  $Y = (y_1(t) \ y_1'(t) \ y_2(t) \ y_2'(t))^T$ , nous avons :

$$\begin{aligned} P''(u_g) = 0 &\iff \begin{cases} 2y_2''(t) + ty_2^{(3)}(t) = 0 \\ y_1'(t) + y_2^{(3)}(t) = 0. \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2y_2''(t) + ty_2^{(3)}(t) = 0 \\ y_1'(t) + y_2^{(3)}(t) = 0 \\ y_2''(t) = \frac{t}{2}y_1'(t) \\ y_1''(t) = -\frac{3}{t}y_1'(t). \end{cases} \\ &\iff Y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C(t)} Y(t). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une correspondance bijective entre les solutions dans  $\mathbb{k}[t]^2$  de  $P''(u_g) = 0$  et les première et troisième composantes des solutions de  $Y'(t) = C(t)Y(t)$  dans  $\mathbb{k}[t]^4$ . En utilisant le package `IntegrableConnections` [12], nous pouvons calculer la solution polynomiale générale de  $Y'(t) = C(t)Y(t)$  et nous obtenons

$$Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où  $c_1, c_2, c_3$  sont des constantes arbitraires dans  $\mathbb{k}$ . Ainsi,

$$u_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_1 t + c_2 \end{pmatrix}$$

est la solution polynomiale générale du système différentiel linéaire homogène donné par  $P''$ . Enfin, nous avons

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui montre finalement

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P\bullet) = \left\{ \begin{pmatrix} c_3 - s'(t) - s(t) \\ c_1 t + c_2 \\ s(t) \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{k}[t] \right\}.$$

## 4.2 Solutions polynomiales d'un système intégro-différentiel

Dans cette section, nous caractérisons les solutions des systèmes linéaires intégro-différentiels inhomogènes  $P(v) = w$ , où  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^l$  sont donnés, et où  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  est l'inconnue. Comme souvent lorsque l'on travaille sur  $\mathbb{I}_1$  (voir par exemple [16, 66, 67]), il est nécessaire de distinguer le cas  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  du cas  $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$ .

### 4.2.1 Cas $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$

Considérons  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  et écrivons  $P = \sum_{k=0}^c t^k e P_k(\partial)$ , où  $P_k(\partial) \in \mathbb{k}[\partial]^{l \times m}$  pour  $k = 0, \dots, c$ ,  $P_c(\partial) \neq 0$ , et  $w(t) = \sum_{l=0}^d t^l w_l$ , avec  $w_l \in \mathbb{k}^l$  pour  $l = 0, \dots, d$  et  $w_d \neq 0$ . Alors, l'équation  $P(v) = w$  s'écrit

$$\sum_{k=0}^c t^k (e P_k(\partial))(v) = \sum_{l=0}^d t^l w_l,$$

avec  $(e P_k(\partial))(v) \in \mathbb{k}^l$ . Ainsi, nous avons la disjonction de cas suivante :

1. Si  $d > c$ , alors le système linéaire  $P(v) = w$  n'a pas de solution.
2. Si  $d \leq c$ , alors le système linéaire  $P(v) = w$  est équivalent à

$$\begin{cases} (e P_k(\partial))(v) = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ (e P_k(\partial))(v) = 0, & k = d + 1, \dots, c. \end{cases} \quad (4.5)$$

Étudions maintenant le système linéaire (4.5). Écrivons  $P_k(\partial) = \sum_{i=0}^{d_k} P_{k,i} \partial^i$ , avec  $P_{k,i} \in \mathbb{k}^{l \times m}$  pour  $i = 0, \dots, d_k$  et  $k = 0, \dots, c$ , et considérons  $v(t) = \sum_{j=0}^r t^j v_j$ , où le degré  $r$  et les  $v_j \in \mathbb{k}^m$  pour  $j = 0, \dots, r$  sont inconnus. Alors, le système (4.5) est équivalent au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \left( \sum_{i=0}^{d_k} e P_{k,i} \partial^i \right) \left( \sum_{j=0}^r t^j v_j \right) = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ \left( \sum_{i=0}^{d_k} e P_{k,i} \partial^i \right) \left( \sum_{j=0}^r t^j v_j \right) = 0, & k = d + 1, \dots, c, \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{d_k} \sum_{j=0}^r (e \partial^i)(t^j) P_{k,i} v_j = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ \sum_{i=0}^{d_k} \sum_{j=0}^r (e \partial^i)(t^j) P_{k,i} v_j = 0, & k = d + 1, \dots, c. \end{cases}$$

En utilisant  $(e \partial^i)(t^j) = j! \delta_{i,j}$ , où  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$ , le dernier système linéaire est équivalent à

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\min\{d_k, r\}} j! P_{k,j} v_j = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ \sum_{j=0}^{\min\{d_k, r\}} j! P_{k,j} v_j = 0, & k = d + 1, \dots, c. \end{cases} \quad (4.6)$$

Soit  $s := \max\{d_0, \dots, d_c\}$ . Les solutions  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  de  $P(v) = w$  peuvent alors s'écrire sous la forme

$$v(t) = \sum_{j=0}^s t^j v_j + t^{s+1} \tilde{v}(t),$$

avec  $\tilde{v} \in \mathbb{k}[t]^m$  est un vecteur arbitraire de polynômes et  $v_0, \dots, v_s$  des solutions du système  $\mathbb{k}$ -linéaire inhomogène (4.6), défini par  $c+1$  équations en les  $s+1$  vecteurs inconnus  $v_j \in \mathbb{k}^m$ ,  $j = 0, \dots, s$ . En prenant  $\min\{d_k, r\} = d_k$  pour  $k = 0, \dots, c$  (sans perte de généralité), le système linéaire (4.6) peut être résolu à l'aide de méthodes standard d'algèbre linéaire.

Nous résumons la discussion précédente dans le théorème puis l'algorithme suivant, qui ne fait intervenir que la résolution d'un système linéaire.

**Théorème 4.2.1.** *Soient  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^l$ . Notons  $P = \sum_{k=0}^c t^k e P_k(\partial)$ ,  $w = \sum_{l=0}^d t^l w_l$  et  $P_k(\partial) = \sum_{i=0}^{d_k} P_{k,i} \partial^i$  pour tout  $k = 0 \dots c$ . Considérons le système en les inconnues  $v_j \in \mathbb{k}^m$  suivant :*

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\min\{d_k, r\}} j! P_{k,j} v_j = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ \sum_{j=0}^{\min\{d_k, r\}} j! P_{k,j} v_j = 0, & k = d + 1, \dots, c. \end{cases} \quad (4.7)$$

Alors,

1. Si  $d > c$ , le système linéaire  $P(v) = w$  n'a pas de solution.
2. Si  $d \leq c$ , les solutions polynomiales du système intégro-différentiel  $P(v) = w$ , avec  $v(t) \in \mathbb{k}[t]^{m \times 1}$  s'écrivent

$$v(t) = \sum_{j=0}^s t^j v_j + t^{s+1} \tilde{v}(t),$$

avec  $v_j \in \mathbb{k}^m$  les solutions du système linéaire 5.6,  $s := \max\{d_0, \dots, d_c\}$  et  $\tilde{v}(t)$  un vecteur de  $\mathbb{k}[t]^m$  quelconque.

**Algorithme 9** Solutions polynomiales de  $P(v) = w$  avec  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$ ,  $w \in \mathbb{k}[t]^l$

**Entrée**  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^l$

**Sortie** Ensemble des solutions de  $P(v) = w$  sous la forme  $v(t) = \bar{v}(t) + t^{s+1} \tilde{v}(t)$ , (où  $\tilde{v} \in \mathbb{k}[t]^m$  arbitraire)

- 1: Écrire  $P = \sum_{k=0}^c t^k e P_k(\partial)$  et  $w = \sum_{l=0}^d t^l w_l$
- 2: **Si**  $d > c$ , alors **Retourner** []
- 3: Écrire  $P_k(\partial) = \sum_{i=0}^{d_k} P_{k,i} \partial^i$  et poser  $s := \max\{d_0, \dots, d_c\}$
- 4: Résoudre le système linéaire (4.6) en les  $s + 1$  vecteurs inconnus  $v_j$
- 5: Poser  $\bar{v}(t) = \sum_{j=0}^s t^j v_j$ , où les  $v_j$  sont des solutions de l'Étape 4 **Retourner**  $v(t) = \bar{v}(t) + t^{s+1} \tilde{v}(t)$ , où  $\tilde{v} \in \mathbb{k}[t]^m$  est un vecteur polynomial arbitraire

**Remarque 4.2.1.** D'après la proposition 3.2.1, l'opérateur  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  est de rang fini et non Fredholm. Ainsi,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet)$  est un espace vectoriel de dimension infini et il n'est donc pas surprenant que le vecteur  $v(t) \in \mathbb{k}[t]^m$ , solution de  $P(v) = w$ , dépende d'un vecteur arbitraire  $\tilde{v}(t)$ .

**Exemple 4.2.1.** Considérons la matrice suivante :

$$\begin{aligned} P &= e \begin{pmatrix} \partial^2 & \partial \\ \partial & -1 \end{pmatrix} + t e \begin{pmatrix} 1 & \partial \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \langle e \rangle^{2 \times 2} \\ &= e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial^2 + e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial + e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + t e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial + t e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Étudions le système linéaire  $P(v) = w$ , où  $w = \sum_{l=0}^d t^l w_l$  et  $w_l = (w_{l,1} \ w_{l,2})^T \in \mathbb{k}^2$  est un vecteur fixé. Si  $d > \deg_t P = 1$ , alors  $P(v) = w$  n'admet pas de solution. Supposons que  $d \leq 1$ , c'est-à-dire que  $w = w_0 + t w_1$ . En considérant  $v(t) = \sum_{k=0}^r t^k v_k$ , où  $v_k = (v_{k,1} \ v_{k,2})^T \in \mathbb{k}^2$ , le système  $\mathbb{k}$ -linéaire (4.6) est alors donné par

$$\begin{cases} 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ v_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{0,1} \\ w_{0,2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ v_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

En résolvant le système linéaire ci-dessus dans les  $\deg_\partial P + 1 = 3$  vecteurs inconnus  $\{v_0, v_1, v_2\}$ , c'est-à-dire dans  $3 \times 2 = 6$  inconnues, nous obtenons finalement

$$v(t) = \begin{pmatrix} w_{1,1} - w_{0,1} + 2 v_{2,1} \\ w_{1,2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_{0,2} + w_{1,2} \\ w_{0,1} - 2 v_{2,1} \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} + t^3 \tilde{v}(t),$$

où  $v_{2,1}$  et  $v_{2,2}$  sont des constantes arbitraires de  $\mathbb{k}$ , et où  $\tilde{v}(t)$  est un vecteur polynomial arbitraire dans  $\mathbb{k}[t]^2$ .

#### 4.2.2 Cas $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$

L'objectif de cette section est de paramétrer l'ensemble des solutions polynomiales  $v$  d'un système linéaire intégro-différentiel inhomogène  $P(v) = w$ , où  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$ ,  $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$ , et où  $w \in \mathbb{k}[t]^l$  est fixé. Nous énonçons le résultat principal.

**Théorème 4.2.2.** Soient  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$ ,  $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^l$ . Il existe un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  et  $\partial^N(w) = 0$ . D'après le théorème 4.1.3, appliqué à  $P = P_N$ , nous avons

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_N \bullet) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid s \in \mathbb{k}[t]^n\},$$

où les matrices  $Q$  et  $T$  correspondent à la matrice  $P_N \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$ . Soit  $T_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} e \partial^k$  l'opérateur de Taylor d'ordre  $(N-1)$ . Alors, l'ensemble des solutions polynomiales  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  du système linéaire inhomogène  $P(v) = w$  est donné par

$$\{v = T'(u_g) + Q(s) \mid \forall s \in \mathbb{k}[t]^n : (T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)\}. \quad (4.8)$$

Comme  $T_{N-1} P Q \in \langle e \rangle^{l \times n}$  et  $w - (T_{N-1} P T')(u_g) \in \mathbb{k}[t]^l$ , les conditions  $\mathbb{k}$ -linéaires sur le paramètre  $s \in \mathbb{k}[t]^n$  de la paramétrisation (4.8)

$$(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)$$

peuvent être rendues explicites en utilisant l'algorithme 9 de la section 4.2.1.

*Démonstration.* Soit  $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$ . D'après le point 2 du lemme 2.2.2, il existe un entier  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^{N_1} P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  et  $\partial^{N_1} P \neq 0$ . Soit  $N_2$  le degré maximal en  $t$  des entrées de  $w$  et posons  $N = \max\{N_1, N_2 + 1\}$ .

Ainsi, nous avons  $\partial^N(w) = 0$  et le système linéaire intégro-différentiel inhomogène  $P(v) = w$  conduit au système différentiel linéaire homogène  $P_N(v) = 0$ , où  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  et  $P_N \neq 0$ .

Supposons maintenant que  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  soit une solution de  $P_N(v) = 0$ . Grâce au lemme 2.2.5, nous avons l'identité  $1 = T_{N-1} + I^N \partial^N$ , où  $T_{N-1}$  est l'opérateur de Taylor d'ordre  $N-1$  (voir la définition 2.8). Nous en déduisons  $P(v) = ((T_{N-1} + I^N \partial^N) P)(v) = (T_{N-1} P)(v)$ .

Ainsi, l'égalité  $P(v) = w$  entraîne  $(T_{N-1} P)(v) = w$  et les solutions polynomiales de  $P(v) = w$  sont alors celles du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} P_N(v) = 0, \\ (T_{N-1} P)(v) = w. \end{cases} \quad (4.9)$$

Le théorème 4.1.3 fournit une paramétrisation des solutions polynomiales de  $P_N(v) = 0$ , qui s'écrit sous la forme

$$v = T'(u_g) + Q(s), \quad s \in \mathbb{k}[t]^n.$$

En substituant  $v = T'(u_g) + Q(s)$  dans la seconde équation de (4.9), soit  $(T_{N-1} P)(v) = w$ , nous obtenons

$$(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g),$$

où  $s \in \mathbb{k}[t]^n$ ,  $(T_{N-1} P Q) \in \langle e \rangle^{l \times n}$ , et  $w - (T_{N-1} P T')(u_g) \in \mathbb{k}[t]^l$ . Nous sommes ainsi ramenés au problème étudié dans la section 4.2.1.

En appliquant l'algorithme 9, nous obtenons finalement un nombre fini de conditions  $\mathbb{k}$ -linéaires sur le vecteur polynomial libre  $s \in \mathbb{k}[t]^n$  de la paramétrisation  $v = T'(u_g) + Q(s)$  de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_N)$ .

Notons que  $u_g$  est la solution générale d'un système différentiel linéaire holonome; elle dépend donc de certaines constantes arbitraires dans  $\mathbb{k}$  (voir le théorème 4.1.3). Cela implique que le membre de droite du système inhomogène  $(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)$  contient des paramètres. Cependant, l'algorithme 9 peut être facilement adapté pour traiter le cas d'un membre de droite contenant des paramètres. □

### 4.2.3 Algorithme principal

Le résultat du théorème 4.2.2 conduit à un algorithme basé sur les algorithmes 8 et 9 pour le calcul des solutions polynomiales des systèmes linéaires inhomogènes d'équations intégro-différentielles.

---

**Algorithme 10** Solutions polynomiales de  $P(v) = w$  où  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$ ,  $w \in \mathbb{k}[t]^l$

---

**Entrée**  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^l$ .

**Sortie** Ensemble des solutions de  $P(v) = w$  sous la forme  $v(t) = T'(u_g) + Q(s)$  où  $s$  est la sortie de l'Étape 4.

- 1: **Si**  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$ , **alors Retourner** la sortie de l'algorithme 9 appliqué à  $(P, w)$ .
- 2: Calculer  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  et  $\partial^N(w) = 0$ .
- 3: Appliquer l'algorithme 8 à  $P_N$ . On obtient alors :

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_N \bullet) = \{T'(u_g) + Q(s) \mid \forall s \in \mathbb{k}[t]^n\}.$$

- 4: Appliquer l'algorithme 9 à  $(T_{N-1} P Q, w - (T_{N-1} P T')(u_g))$ .
  - 5: **Retourner**  $T'(u_g) + Q(s)$ .
- 

**Exemple 4.2.2.** Décrivons toutes les étapes de l'algorithme 10 sur un exemple simple.

Soit  $P = (\partial \ 1 + e) \notin \langle e \rangle^{1 \times 2}$  et  $w = 0$ . On a  $N = 1$ , ainsi on pose  $P_1 = \partial P = (\partial^2 \ \partial) \in \mathbb{A}_1^{1 \times 2}$ . Calculons  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_1 \bullet)$  en appliquant l'algorithme 8 à  $P_1$ . Nous obtenons d'abord :

$$P' = \begin{pmatrix} \partial & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \partial \end{pmatrix},$$

ainsi nous avons

$$u_g = c, \quad c \in \mathbb{k}, \quad T' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et enfin

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_1 \bullet) = \left\{ v(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c + \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} \cdot s(t) \mid s \in \mathbb{k}[t], c \in \mathbb{k} \right\}.$$

Dans cet exemple simple, remarquons que cette paramétrisation peut être trouvée par un calcul direct. En effet, soit  $v = (v_1 \ v_2)^T \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(P_1 \bullet)$ , c'est-à-dire,

$$v_1''(t) + v_2'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1'(t) + v_2(t) = u(t), \\ u'(t) = 0. \end{cases}$$

Nous avons donc  $v_1'(t) + v_2(t) = c \in \mathbb{k}$ , ce qui est entraîne

$$\forall c \in \mathbb{k}, \forall s = v_1 \in \mathbb{k}[t], v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c + \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} \cdot s(t).$$

Calculons maintenant  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet)$ . Nous avons  $T_{N-1} = T_0 = e$  et donc

$$T_{N-1} P Q = -e \partial, \quad T_{N-1} P T' = 2e,$$

ce qui implique que nous devons appliquer l'algorithme 9 à  $(-e \partial, -2c) \in \langle e \rangle \times \mathbb{k}[t]$ . Nous obtenons alors la condition linéaire  $s'(0) = 2c$  et donc les solutions polynomiales de  $-e \partial(s(t)) = -2c$  sont données par  $s(t) = s(0) + 2ct + \tilde{s}(t)t^2$ , où  $s(0) \in \mathbb{k}$  et  $\tilde{s} \in \mathbb{k}[t]$  sont libres. Finalement, nous avons obtenu :

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c + \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} \cdot s(t) \mid s(t) = s(0) + 2ct + t^2 \tilde{s}(t), \tilde{s} \in \mathbb{k}[t], c \in \mathbb{k} \right\}.$$

L'exemple suivant illustre l'algorithme 10 dans le cas d'un système inhomogène.

**Exemple 4.2.3.** Résolvons  $P(v) = w$  avec  $P = \begin{pmatrix} tI & te \\ \partial & t\partial \end{pmatrix}$  et  $w = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ .

Dérivons une première fois  $P$ . Nous obtenons :

$$\partial P = \begin{pmatrix} t+I & e \\ \partial^2 & t\partial^2 + \partial \end{pmatrix} \notin \mathbb{A}_1^{2 \times 2}.$$

Dérivons alors une deuxième fois pour obtenir :

$$\partial^2 P = \begin{pmatrix} t\partial + 2 & 0 \\ \partial^3 & t\partial^3 + 2\partial^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_1^{2 \times 2}.$$

Ainsi, nous avons  $N = 2$  et  $P_2 = \partial^2 P$ . Avec `OreModules`, nous calculons une matrice  $Q$  telle que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q)$ . Nous trouvons alors  $Q = 0$ . Par conséquent, nous avons  $P' = I_2$ ; où  $I_2$  désigne la matrice identité de taille 2;  $T' = I_2$ ,  $P'' = P_2$  et

$$H = \begin{pmatrix} t\partial + 2 & 0 \\ \partial^3 & t\partial^3 + 2\partial^2 \end{pmatrix} = \partial^2 P = P_2,$$

qui définit un  $\mathbb{A}_1$ -module de torsion et donc holonome. Posons alors  $u_g = (y_1 \ y_2)^T$  la solution générale de  $H(u_g) = 0$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} H(u_g) = 0 &\iff \begin{cases} t y_1(t) + 2 y_1(t) = 0 \\ y_1^{(3)}(t) + t y_2^{(3)}(t) + 2 y_2''(t) = 0 \end{cases} \\ &\iff Y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{24}{t^4} & 0 & 0 & -\frac{2}{t} \end{pmatrix}}_{C(t)} Y(t) \end{aligned}$$

avec  $Y(t) = (y_1(t) \ y_2(t) \ y_2'(t) \ y_2''(t))^T$ . Grâce au package `IntegrableConnections` de Maple, nous pouvons calculer les solutions polynomiales de la connexion  $Y'(t) = C(t)Y(t)$ , qui sont les combinaisons  $\mathbb{k}$ -linéaires des colonnes polynomiales de la matrice  $\phi$  suivante :

$$\phi := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{t^2} \\ t & 1 & -\frac{2}{3t^3} \\ 1 & 0 & \frac{2}{t^4} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{t^5} \end{pmatrix}.$$

On ne s'intéresse alors qu'aux deux premières lignes et colonnes, car on cherche  $y_1$  et  $y_2$  pour en déduire  $u_g$ . Rappelons que  $Y(t) = (y_1(t) \ y_2(t) \ y_2'(t) \ y_2''(t))^T$ . Ainsi, nous obtenons :

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_2 \cdot) = \left\{ T'(u_g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (u_g) \right\} = \{u_g\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{k} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t c_1 + c_2 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{k} \right\}.$$

Par ailleurs, nous avons  $N = 2$  donc  $T_{N-1} = T_1 = e + t e \partial$ , et

$$T_1 P T' = T_1 P = e P + t e \partial P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e \partial & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & e \\ e \partial^2 & e \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t e \\ e \partial + t e \partial^2 & t e \partial \end{pmatrix}.$$

De plus, nous avons

$$T_1 P T'(u_g) = \begin{pmatrix} 0 & t e \\ t e \partial + t e \partial^2 & t e \partial \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t c_2 \\ t c_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\tilde{w} = w - T_1 P T'(u_g) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t c_2 \\ t c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - c_2) t \\ (1 - c_1) t \end{pmatrix}.$$

L'étape 4 de l'algorithme 10, consiste à résoudre les solutions polynomiales de  $T_1 P Q = 0$  avec second membre  $\tilde{w}$ . Nous obtenons alors les contraintes :  $c_2 = c_1 = 1$ . Finalement,

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \cdot) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + t \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{k} \right\}.$$

**Exemple 4.2.4.** On considère le système d'équations integro-différentielles de Volterra étudié dans [173, Exemple 10.17, p. 335] donné par

$$\begin{cases} u'(t) = 2t^2 + \int_0^t ((t-x)u(x) + (t-x)v(x)) dx, & u(0) = 1, \\ v'(t) = -3t^2 - \frac{1}{10}t^5 + \int_0^t ((t-x)u(x) - (t-x)v(x)) dx, & v(0) = 1, \\ u(0) = 1, & v(0) = 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Pour calculer les solutions polynomiales de ce système, nous appliquons l'algorithme 10 à

$$P = \begin{pmatrix} \partial - tI + It & -tI + It \\ e & 0 \\ -tI + It & \partial + tI - It \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 1 \\ -3t^2 - \frac{1}{10}t^5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons  $N = 6$  et

$$P_6 = \begin{pmatrix} -\partial^4 + \partial^7 & -\partial^4 \\ 0 & 0 \\ -\partial^4 & \partial^4 + \partial^7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche de présentation finie  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times 2} / (\mathbb{A}_1^{1 \times 4} P_6)$  est un module de torsion et nous avons

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_6 \bullet) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 t^3 + c_3 t^2 + c_5 t + c_7 \\ c_2 t^3 + c_4 t^2 + c_6 t + c_8 \end{pmatrix} \right\},$$

où les  $c_i$  sont des constantes arbitraires dans  $\mathbb{k}$ . Ensuite, on considère le système

$$(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g) \Leftrightarrow 0 = q(t),$$

où  $q(t) \in \mathbb{k}[t]^4$  est donné par

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{c_1}{20} + \frac{c_2}{20} \right) t^5 + \left( \frac{c_3}{12} + \frac{c_4}{12} \right) t^4 + \left( \frac{c_5}{6} + \frac{c_6}{6} \right) t^3 + \left( 2 - 3c_1 + \frac{c_7}{2} + \frac{c_8}{2} \right) t^2 - 2c_3 t - c_5 \\ 1 - c_7 \\ \left( -\frac{1}{10} + \frac{c_1}{20} - \frac{c_2}{20} \right) t^5 + \left( \frac{c_3}{12} - \frac{c_4}{12} \right) t^4 + \left( \frac{c_5}{6} - \frac{c_6}{6} \right) t^3 + \left( -3 - 3c_2 + \frac{c_7}{2} - \frac{c_8}{2} \right) t^2 - 2c_4 t - c_6 \\ 1 - c_8 \end{pmatrix}.$$

En résolvant pour les constantes  $c_i$ , on obtient finalement

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet) = \left\{ \begin{pmatrix} t^3 + 1 \\ -t^3 + 1 \end{pmatrix} \right\},$$

et on retrouve ainsi le résultat obtenu dans [173, Exemple 10.17, p. 335] en utilisant la transformée de Laplace.

**Exemple 4.2.5.** Considérons le système d'équations intégrales étudié dans [44, Exemple 1] et donné par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Pour calculer les solutions polynomiales de ce système, nous appliquons l'Algorithme 10 à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & I \\ I & tI - It \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons  $N = 2$  et

$$P_2 = \begin{pmatrix} \partial^2 & \partial \\ \partial & 1 \end{pmatrix}.$$

Le  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche fini présenté  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times 2} / (\mathbb{A}_1^{1 \times 2} P_2)$  est sans torsion et nous avons

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_2 \bullet) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} s \mid \forall s \in \mathbb{k}[t] \right\}.$$

Ensuite, on considère le système

$$(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e \\ t e \end{pmatrix} s = 0,$$

ce qui entraîne  $s(0) = 0$ . Finalement, on obtient

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} s \mid \forall s = t \tilde{s} \in t \mathbb{k}[t] \right\},$$

de sorte que les solutions polynomiales de (4.11) sont données par

$$u(t) = t \tilde{s}(t) \quad \text{et} \quad v(t) = -\tilde{s}(t) - t \partial(\tilde{s}(t)),$$

pour tout polynôme  $\tilde{s} \in \mathbb{k}[t]$ .

Notons que dans [44, Exemple 1], les auteurs écrivent que les solutions sont données par  $u(t) = \phi(t)$  et  $v(t) = -\partial(\phi(t))$  pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ . Mais la première équation de (4.11) implique alors nécessairement que  $\phi(0) = 0$ , si bien que si  $\phi$  est un polynôme, on retrouve notre résultat.

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme général permettant de calculer les solutions polynomiales de systèmes linéaires inhomogènes rectangulaires d'équations intégro-différentielles ordinaires à coefficients polynomiaux. L'algorithme est implémenté dans le package **Bavula** du logiciel **Maple** ([69], disponible librement). Les résultats théoriques sont publiés dans [70].

Enfin, il convient de noter que la méthode présentée dans ce chapitre (notamment l'algorithme 10) pourrait probablement être étendue au calcul des solutions exponentielles (y compris rationnelles) des systèmes linéaires inhomogènes d'équations intégro-différentielles à coefficients polynomiaux et à second membre polynomial. Le package **IntegrableConnections** permet déjà de calculer de solutions exponentielles (voir [12]) d'une connexion, ce qui suggère que notre implémentation pourrait être adaptée en conséquence. Expliquons brièvement pourquoi cette extension est simple dans certains cas particuliers.

Soit  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times m} / (\mathbb{A}_1^{1 \times l} P_N)$ . Supposons que  $\mathcal{P}$  est un  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche (finiment présenté par la matrice  $P_N$  apparaissant à l'étape 2 de l'algorithme 10) de torsion. Dans ce cas, une paramétrisation des solutions exponentielles de  $P_N$  est donnée par  $\{T'(u_g)\}$ , où  $u_g$  est la solution exponentielle générale du système différentiel linéaire homogène holonome défini par  $P_N$ . Dans ce cas, à l'étape 4, on a  $T_{N-1} P Q = 0$  et, en supposant que  $u_g(t)$  peut être évalué en  $t = 0$ , on obtient  $w - (T_{N-1} P T')(u_g) \in \mathbb{k}[t]^l$ . Cela ne modifie pas le calcul des solutions polynomiales, puisque l'on doit seulement résoudre le système linéaire formé par les coefficients de  $w - (T_{N-1} P T')(u_g) \in \mathbb{k}[t]^l$  pour les constantes arbitraires apparaissant dans la solution exponentielle générale  $u_g$ .

Nous illustrons cette idée avec l'exemple simple suivant, calculé avec le package **Bavula**, où nous avons simplement remplacé le calcul des solutions polynomiales du système différentiel linéaire homogène holonome par celui de ses solutions exponentielles.

**Exemple 4.2.6.** Considérons l'équation intégrale de Volterra étudiée dans [173, Exemple 3.18, p. 91] et donnée par

$$u(t) = 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \int_0^t (t-x)^2 u(x) dx. \quad (4.12)$$

Posons alors

$$P = 1 - \frac{1}{2} t^2 I + t I t - \frac{1}{2} I t^2 \in \mathbb{I}_1, \quad w = 1 + t + \frac{1}{2} t^2 \in \mathbb{k}[t].$$

On a  $N = 3$ ,  $P_3 = \partial^3 - 1$ , et  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1 / (\mathbb{A}_1 P_3)$  est un  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche de torsion et donc holonome.

En utilisant **IntegrableConnections**, nous trouvons que la solution exponentielle générale du système différentiel linéaire homogène holonome défini par  $P_3$  est donnée par

$$u_g(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-\alpha_1 t) + c_3 \exp(-\alpha_2 t),$$

où  $\alpha_1, \alpha_2$  sont les deux racines complexes conjuguées de  $Z^2 - Z + 1$  et  $c_1, c_2, c_3$  sont des constantes arbitraires dans  $\mathbb{k}$ . Comme  $T' = 1$ , nous obtenons que les solutions exponentielles de  $P_3$  sont données par  $u_g$ . Il reste alors à résoudre  $w - (T_{N-1} P T')(u_g) = 0$ , ce qui revient à résoudre un système linéaire en  $c_1, c_2, c_3$ . Nous obtenons  $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$ . Finalement, nous retrouvons la solution  $u(t) = \exp(t)$  de (4.12), comme obtenue dans [173, Exemple 3.18, p. 91] par la *méthode d'itération variationnelle*.

Enfin, si le  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times m} / (\mathbb{A}_1^{1 \times l} P_N)$  (finiment présenté par la matrice  $P_N$  de l'Étape 2 de l'Algorithme 10) n'est pas un module de torsion, alors il reste à généraliser le contenu de la section 4.2.1 afin de pouvoir l'appliquer au calcul des solutions exponentielles du système  $(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)$ . Un autre point à considérer est le cas des solutions exponentielles qui ne peuvent pas être évaluées en zéro. La généralisation de l'approche développée dans cette section au cas du calcul de solutions exponentielles aux systèmes intégro-différentiels de la forme  $P(v) = w$  où  $w$  est un vecteur d'exponentielles fixé et  $v$  un vecteur d'exponentielles recherché, est aussi intéressant pour les applications. Ces questions seront abordées dans de futurs travaux de recherche.

Comme mentionné plus haut, l'algorithme 10 constitue une étape clé dans le développement d'une version effective de la propriété de cohérence de  $\mathbb{I}_1$  qui sera développée dans le prochain chapitre, et donc d'une approche d'analyse algébrique effective pour les systèmes linéaires d'équations intégro-différentielles à coefficients polynomiaux. En effet, comme montré dans les deux prochains chapitres, le calcul des solutions polynomiales est nécessaire pour déterminer les modules des syzygies à gauche/droite, les inverses à gauche/droite, ainsi que les factorisations à gauche/droite des matrices d'opérateurs intégro-différentiels. Ces études font l'objet des prochains chapitres.

# Chapitre 5

## Preuve constructive de la cohérence de $\mathbb{I}_1$

Nous rappelons que le but premier de ce travail de thèse est de contribuer au développement d'une théorie de l'élimination intégro-différentielle effective. En effet, bien que les équations intégro-différentielles soient très présentes dans le monde de la biologie et de l'ingénierie, elles ont été bien moins étudiées en tant que telles comparativement aux équations différentielles. Le théorème de [16, Théorème 4.4] montrant que l'anneau des opérateurs intégro-différentiels  $\mathbb{I}_1$  est cohérent est le point de départ du développement d'une approche effective par l'analyse algébrique des systèmes intégro-différentiels.

Dans le chapitre 3, nous avons rendu effectif le calcul de l'annulateur d'un élément de  $\mathbb{I}_1$ , le calcul du noyau d'une matrice à coefficients dans l'idéal bilatère  $\langle e \rangle$ , ainsi que le calcul de l'intersection de deux idéaux d'évaluation de  $\mathbb{I}_1$ . Pour plus de détails, voir le chapitre 3.

Dans le présent chapitre, nous allons rendre effective la propriété de cohérence de l'anneau  $\mathbb{I}_1$ . Pour cela, nous commençons par rappeler la définition d'un anneau cohérent, qui consiste essentiellement à dire que le noyau à gauche et à droite de toute matrice rectangulaire à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$  est de type fini. Le chapitre sera alors consacré au calcul effectif des générateurs du noyau à gauche/droite d'une matrice rectangulaire quelconque à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ .

### 5.1 Rappel sur la propriété de cohérence

Dans cette section, on rappelle la notion de cohérence d'un anneau. Tout anneau peut être vu comme un module sur lui-même, ce qui permet de donner plusieurs définitions toutes équivalentes.

**Définition 5.1.1.** ([171],[107, p. 140]) Un anneau  $\mathcal{A}$  est dit *cohérent à gauche* si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall R \in \mathcal{A}^{q \times p}, \quad \ker_{\mathcal{A}}(.R) = \{Q \in \mathcal{A}^{1 \times q} \mid QR = 0\}$$

est un  $\mathcal{A}$ -module à gauche finiment engendré.

De manière similaire, un anneau  $\mathcal{A}$  est dit *cohérent à droite* si

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall R \in \mathcal{A}^{q \times p}, \quad \ker_{\mathcal{A}}(R.) = \{Q \in \mathcal{A}^{p \times 1} \mid RQ = 0\}$$

est un  $\mathcal{A}$ -module à droite finiment engendré.

Un anneau  $\mathcal{A}$  est dit *cohérent* si  $\mathcal{A}$  est à la fois cohérent à gauche et à droite.

**Définition 5.1.2.** ([171, 25],[107, p. 140]) Un  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $\mathcal{M}$  est dit *cohérent* si  $\mathcal{M}$  est finiment engendré et si tout sous- $\mathcal{A}$ -module à gauche de  $\mathcal{M}$  finiment engendré est de présentation finie, c'est-à-dire isomorphe à  $\text{coker}_{\mathcal{A}}(.L)$  pour une matrice  $L$  à coefficients dans  $\mathcal{A}$ . De manière équivalente, nous avons la caractérisation de la cohérence donnée par la proposition 3.1.1, prouvée dans l'annexe A.2.

**Remarque 5.1.1.** Lorsque l'on considère un anneau  $\mathcal{A}$  comme un module sur lui-même, un sous-module est alors un idéal. Ainsi, tout sous-module de type fini est de présentation finie signifie que tout idéal de type fini est de présentation finie. Si l'on considère un idéal à gauche (resp. à droite) de type fini  $\mathcal{I}$  engendré par des éléments  $f_1, \dots, f_n$  mis dans un vecteur colonne  $R \in \mathcal{A}^{n \times 1}$ , alors dire que l'idéal est de présentation finie à gauche (resp. à droite) revient à dire que le noyau à gauche (resp. à droite) de ce vecteur  $R$  est de type fini. On voit ainsi le lien entre les deux précédentes définitions.

La *catégorie* des modules de présentation finie/modules cohérents sur un anneau cohérent est *abélienne* [166], ce qui montre que les méthodes standard d'*algèbre homologique* [166] peuvent être utilisées pour étudier les systèmes linéaires polynomiaux intégré-différentiels. Cette catégorie ressemble fortement à celle des modules de type fini sur un anneau noethérien, voir annexe A.1.5 et [166].

## 5.2 Le « Horseshoe Lemma »

Cette section illustre l'importance de l'unique idéal bilatère  $\langle e \rangle$  de l'anneau  $\mathbb{I}_1$ . On va regarder avec précision les restrictions de morphismes à cet idéal qui nous serviront par la suite. On rappelle les notations suivantes. Soit  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . Définissons l'homomorphisme à gauche  $\cdot R$  de  $\mathbb{I}_1$  comme suit :

$$\begin{aligned} \cdot R : \mathbb{I}_1^{1 \times q} &\longrightarrow \mathbb{I}_1^{1 \times p} \\ \lambda &\longmapsto (\cdot R)(\lambda) = \lambda R. \end{aligned}$$

Le fait que  $\langle e \rangle$  soit un idéal à gauche de  $\mathbb{I}_1$  induit le morphisme à gauche de  $\mathbb{I}_1$  suivant :

$$\begin{aligned} \cdot R : \langle e \rangle^{1 \times q} &\longrightarrow \langle e \rangle^{1 \times p} \\ \varepsilon &\longmapsto (\cdot R)(\varepsilon) = \varepsilon R. \end{aligned}$$

On rappelle que  $\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$ , voir la proposition 2.2.5. En combinant ces deux morphismes, on obtient le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\langle e \rangle}(\cdot R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{R}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times q} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times q} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathbb{B}_1^{1 \times q} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cdot R & & \downarrow \cdot R & & \downarrow \cdot \bar{R} \\ 0 & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times p} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times p} & \xrightarrow{id_p \otimes \pi} & \mathbb{B}_1^{1 \times p} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \kappa & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{coker}_{\langle e \rangle}(\cdot R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{R}) \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0, \end{array}$$

où  $\pi$  et  $\kappa$  sont respectivement les projections canoniques de  $\mathbb{I}_1^{1 \times p}$  dans  $\mathbb{B}_1^{1 \times p} = (\mathbb{I}_1 / \langle e \rangle)^{1 \times p}$  et de  $\langle e \rangle^{1 \times p}$  dans  $\text{coker}_{\langle e \rangle}(\cdot R)$ . Enfin,  $\pi$  et  $\tilde{\pi}$  sont définis comme suit

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{I}_1 &\longrightarrow \mathbb{B}_1 \\ \lambda &\longmapsto \pi(\lambda) := \lambda \pmod{\langle e \rangle}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \tilde{\pi} : \mathbb{I}_1^{1 \times q} &\longrightarrow \mathbb{B}_1^{1 \times q} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_q) &\longmapsto (\pi(\lambda_1), \dots, \pi(\lambda_q)). \end{aligned}$$

D'après le *lemme du serpent* (voir [108, p. 157]), on a le diagramme commutatif de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \ker_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R}) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times q} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times q} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathbb{B}_1^{1 \times q} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \cdot R & & \downarrow \cdot R & & \downarrow \cdot \overline{R} \\
0 & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times p} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times p} & \xrightarrow{id_p \otimes \pi} & \mathbb{B}_1^{1 \times p} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \kappa & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0,
\end{array}$$

c'est-à-dire, nous avons la suite exacte longue de  $\mathbb{I}_1$ -modules à gauche suivante,

$$0 \longrightarrow \ker_{\langle e \rangle}(.R) \longrightarrow \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) \longrightarrow \ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R}) \xrightarrow{\delta} \text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) \longrightarrow \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) \longrightarrow \text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R}) \longrightarrow 0,$$

où on définit  $\delta$  comme suit,

$$\begin{array}{ccc}
\delta : \ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R}) & \longrightarrow & \text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) = \langle e \rangle^{1 \times p} / \langle e \rangle^{1 \times q} R \\
\tilde{\pi}(\mu) & \longmapsto & \kappa(\mu R).
\end{array}$$

**Proposition 5.2.1.** *Avec les notations précédentes, on a  $\delta = 0$ .*

*Démonstration.* Grâce au lemme du serpent on sait en particulier que  $\delta$  est un  $\mathbb{I}_1$ -morphisme à gauche bien défini comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
\delta : \ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R}) & \longrightarrow & \text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) = \langle e \rangle / \langle e \rangle^{1 \times q} R \\
\tilde{\pi}(\mu) & \longmapsto & \kappa(\mu R).
\end{array}$$

Par ailleurs, pour tout  $m \in \mathbb{N}$  on a

$$\delta(\tilde{\pi}(\mu)) = \delta(\sigma^{-m} \sigma^m \tilde{\pi}(\mu)) = I^m \delta(\sigma^m \tilde{\pi}(\mu)) = I^m \delta(\tilde{\pi}(\partial^m \mu)) = I^m \kappa(\partial^m \mu R). \quad (5.1)$$

Or, comme nous avons  $\mu R \in \langle e \rangle^{1 \times p}$  il existe donc  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^{m_0} \mu R = 0$ . En appliquant (5.1) avec ce  $m_0$  et  $\bar{\mu} = \tilde{\pi}(\mu) \in \ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R})$  quelconque, on obtient  $\delta(\tilde{\pi}(\mu)) = 0$ . Ainsi, nous avons  $\delta = 0$ .  $\square$

En conséquence, la suite exacte longue ci-dessus donne les deux suites exactes courtes de modules à gauche sur  $\mathbb{I}_1$  suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R}) \longrightarrow 0, \\
0 & \longrightarrow & \text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R}) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

On peut maintenant énoncer un résultat important dû au fait que  $\delta = 0$ .

**Lemme 5.2.1.** *Soit  $\bar{\mu} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R})$ , c'est-à-dire que  $\mu \in \mathbb{I}_1^{1 \times q}$  satisfait  $\mu R \in \langle e \rangle^{1 \times p}$ . Alors, il existe  $\nu \in \langle e \rangle^{1 \times q}$  tel que  $\mu R = \nu R$ , ce qui montre que  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot(\mu - \nu)) = \mathbb{I}_1(\mu - \nu) \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ .*

*Démonstration.* Si  $\bar{\mu} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{.R})$ , alors en utilisant  $\delta(\bar{\mu}) = \kappa(\mu R) = 0$ , on obtient  $\mu R \in \langle e \rangle^{1 \times p}$ , ce qui montre qu'il existe  $\nu \in \langle e \rangle^{1 \times q}$  tel que  $\mu R = \nu R$  et ainsi, on a  $(\mu - \nu) R = 0$ , c'est-à-dire,  $\nu - \mu \in \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ .  $\square$

**Remarque 5.2.1.** Le lemme 5.2.1 joue un rôle important dans toute la suite, c'est pourquoi nous trouvons intéressant d'en donner également une preuve alternative n'utilisant pas d'arguments d'algèbre homologique. En effet, si  $\bar{\mu} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$ , alors nous avons  $\mu R \in \langle e \rangle^{1 \times p}$  et donc, d'après le lemme 2.2.2, il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^M \mu R = 0$ . Par conséquent, nous avons  $I^M \partial^M \mu R = 0$  et en utilisant le lemme 2.2.5, nous obtenons  $(1 - T_{M-1}) \mu R = 0$ . Cela montre que  $\nu = T_{M-1} \mu \in \langle e \rangle^{1 \times q}$  vérifie  $\mu R = \nu R$ .

Une conséquence directe de ce lemme est la proposition suivante.

**Proposition 5.2.2.** Soient  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ ,  $\bar{R} \in \mathbb{B}_1^{q \times p}$  la matrice formée par les classes de ses coefficients dans  $\mathbb{B}_1$  et  $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  une matrice telle que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$ . Alors, il existe  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  telle que :

$$L R = E R.$$

Ainsi, en notant  $L' := L - E \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$ , on a  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(L') \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(R)$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du lemme 5.2.1. □

**Remarque 5.2.2.** Notons qu'il est également possible de montrer la proposition 5.2.2 sans argument d'algèbre homologique. En effet, si  $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  vérifie  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$  alors  $\bar{L} \bar{R} = 0$ , c'est-à-dire  $L R \in \langle e \rangle^{r \times q}$ . Il existe alors, d'après le lemme 2.2.2,  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^M L R = 0$ . On peut alors choisir  $E = T_{M-1} L$  qui vérifie  $E R = L R$ . Ainsi, en notant  $L' := L - E \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$ , on a  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(L') \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(R)$ .

**Remarque 5.2.3.** Notons qu'à chaque exemple où nous devons calculer un élément de  $\mathbb{B}_1$  nous ferons une identification  $\mathbb{B}_1 \cong \mathbb{L}_1$  via l'isomorphisme de la proposition 2.2.5.

**Exemple 5.2.1.** Considérons  $R = (\partial \quad I \quad t \quad e)^T \in \mathbb{I}_1^{4 \times 1}$ . Alors, nous avons

$$\bar{R} = (\sigma \quad \sigma^{-1} \quad (H-1)\sigma^{-1} \quad 0)^T \in \mathbb{B}_1^{4 \times 1},$$

et en utilisant l'implémentation **Bavula** pour le calcul du noyau des matrices avec des entrées dans  $\mathbb{B}_1$  (voir section 2.4.3), nous obtenons  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \mathbb{B}_1^{1 \times 3} \bar{L}$ , où

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \sigma^{-2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & H-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} I^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t\partial & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_1^{3 \times 4}.$$

Nous avons alors  $L R = (-te \quad 0 \quad e)^T \in \langle e \rangle^{3 \times 1}$ . Si nous considérons la matrice  $E$  suivante

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -te \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \in \langle e \rangle^{3 \times 4},$$

alors nous pouvons vérifier que  $E R = L R$ , ce qui montre que  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(L') \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(R)$ , où

$$L' := L - E = \begin{pmatrix} I^2 & -1 & 0 & te \\ 0 & t\partial & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-e \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_1^{3 \times 4}. \quad (5.2)$$

**Remarque 5.2.4.** Notons que  $E$  n'est pas unique. En effet, comme  $\ker_{\langle e \rangle}(R) \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(R)$ , nous avons :

$$\forall F \in \langle e \rangle^{r \times q} : F R = 0 \Rightarrow \text{im}_{\mathbb{I}_1}((L - (E + F))) \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(R).$$

Ainsi, nous sommes amenés à étudier l'ensemble des solutions  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  du système linéaire intégro-différentiel non homogène

$$G R = L R \in \langle e \rangle^{r \times p}. \quad (5.3)$$

L'ensemble des solutions  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  du système linéaire intégro-différentiel inhomogène  $GR = LR \in \langle e \rangle^{r \times p}$  est formé de la somme d'une solution particulière  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  de  $GR = LR$  et de matrices de  $r$  lignes avec des coefficients dans le  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche défini par un ensemble de générateurs de  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$ .

Supposons que  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  soit un  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche finiment engendré.

Alors, il existe  $M \in \langle e \rangle^{s \times q}$  satisfaisant  $\ker_{\langle e \rangle}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.M)$  et nous avons le diagramme commutatif exact de  $\mathbb{I}_1$ -modules à gauche suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbb{I}_1^{1 \times s} & & \mathbb{I}_1^{1 \times r} & \xrightarrow{\text{id}_r \otimes \pi} & \mathbb{B}_1^{1 \times r} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow .M & & \downarrow .(L-E) & & \downarrow .\bar{L} & \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{B}_1}(.R) & \longrightarrow 0. \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & \\ & & 0 & & & & 0 & \end{array}$$

Le *Horseshoe lemma* (voir, par exemple, [166, Proposition 6.24]) montre alors que nous avons le diagramme commutatif exact de  $\mathbb{I}_1$ -modules à gauche suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times s} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times r} \oplus \mathbb{I}_1^{1 \times s} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times r} & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow .M & & \downarrow .\begin{pmatrix} L-E \\ M \end{pmatrix} & & \downarrow .\bar{L} \circ (\text{id}_r \otimes \pi) & \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{B}_1}(.R) & \longrightarrow 0. \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1^{1 \times (r+s)} \begin{pmatrix} L-E \\ M \end{pmatrix} = \text{im}_{\mathbb{I}_1} \left( \begin{pmatrix} L-E \\ M \end{pmatrix} \right),$$

c'est-à-dire, un ensemble de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  est obtenu en concaténant un ensemble de générateurs de  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  définissant un ensemble de générateurs de la partie homogène de (5.3), et des lignes de la matrice  $L' = L - E$ , où  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  est une solution particulière de (5.3).

Notons que  $\langle e \rangle^{1 \times r} (L - E) \subseteq \ker_{\langle e \rangle}(.R)$ . Dans la section suivante, nous montrerons que nous n'avons pas besoin de calculer un ensemble fini de générateurs de  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  pour obtenir un ensemble de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  mais seulement de considérer un nombre fini d'éléments de  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  qui ne sont pas des combinaisons linéaires à gauche des lignes de  $L'$ , c'est-à-dire qui ne sont pas dans  $\langle e \rangle^{1 \times r} (L - E)$ .

**Exemple 5.2.2.** Si  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ , alors  $\bar{R} = 0$  implique  $\ker_{\mathbb{B}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(.I_q)$ . Ainsi, nous avons

$$r = q, \quad \bar{L} = \bar{I}_q, \quad L = I_q, \quad I_q R = ER,$$

pour une certaine matrice  $E \in \langle e \rangle^{q \times q}$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^N R = 0$  (voir le lemme 2.2.2), alors  $I^N \partial^N R = 0$ , donc  $(1 - T_{N-1}) I_q R = 0$ . On en déduit,  $I_q R = T_{N-1} R$  et  $T_{N-1} I_q \in \langle e \rangle^{q \times q}$ . Ainsi, on peut poser  $E = T_{N-1} I_q \in \langle e \rangle^{q \times q}$  une solution particulière de  $GR = LR$ , d'inconnue  $G \in \langle e \rangle^{r \times p}$  et ainsi, nous avons :

$$L - E = I_q - T_{N-1} I_q, \quad \text{im}_{\mathbb{I}_1}(L - E) \subset \ker_{\mathbb{I}_1}(.R).$$

Cet exemple est à rapprocher de la remarque 5.2.2.

### 5.3 Le calcul de $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$

Dans cette section, nous prouvons qu'un ensemble fini de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  existe toujours et peut être calculé pour tout  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . Comme expliqué dans la section précédente, un ensemble de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  peut être calculé en étudiant l'ensemble des solutions  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  du système intégro-différentiel  $GR = LR \in \langle e \rangle^{r \times p}$ . On commence donc par essayer de trouver une solution particulière  $E$  vérifiant ainsi  $ER = LR$ , puis on regarde

comment calculer les solutions du système homogène  $GR = 0$ , qui sont donc les éléments de  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$ . On verra qu'on ne saura pas explicitement calculer une matrice  $M$  telle que  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot M) = \ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$ , mais qu'il nous suffira de calculer des éléments de  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$  qui ne sont pas déjà dans l'image de  $L - E$ .

Commençons donc par la recherche d'une solution particulière  $E$ .

### 5.3.1 Solution particulière de $GR = LR \in \langle e \rangle^{r \times p}$ avec $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$

Étudions les solutions  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  du système linéaire inhomogène  $GR = LR$ , où  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{L})$ . Pour simplifier, notons  $H = LR$ .

Nous posons les notations suivantes :

$$H = \sum_{i=0}^m t^i e H_i(\partial), \quad G = \sum_{k=0}^n t^k e G_k(\partial), \quad H_m(\partial) \neq 0, \quad G_n(\partial) \neq 0,$$

$$\begin{cases} H_i(\partial) = \sum_{j=0}^{\alpha_i} H_{i,j} \partial^j, & H_{i,j} \in \mathbb{k}^{r \times p}, \quad j = 0, \dots, \alpha_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ G_k(\partial) = \sum_{l=0}^{\beta_k} G_{k,l} \partial^l, & G_{k,l} \in \mathbb{k}^{r \times q}, \quad l = 0, \dots, \beta_k, \quad k = 0, \dots, n. \end{cases}$$

Nous rappelons la définition 2.2.7.

**Définition 5.3.1.** Soient  $a \in \mathbb{k}[\partial]$  et  $b \in \mathbb{k}[t]$ . Nous définissons :

- $\check{a}$  comme l'élément de  $\mathbb{k}[t]$  obtenu en remplaçant  $\partial^i$  par  $\frac{t^i}{i!}$  dans  $a(\partial)$ .
- $\hat{b}$  comme l'élément de  $\mathbb{k}[\partial]$  obtenu en remplaçant  $t^i$  par  $i! \partial^i$  dans  $b(t)$ .

**Remarque 5.3.1.** La définition précédente s'étend aux vecteurs et aux matrices.

Ainsi, pour  $R = (r_{i,j}(\partial)) \in \mathbb{k}[\partial]^{q \times p}$ ,  $\check{R}$  désigne la matrice dont les coefficients sont les  $r_{i,j}^{\check{}}(t)$  et, de manière analogue,  $\hat{Q}$  désigne la matrice dont les coefficients sont les  $q_{i,j}^{\hat{}}(\partial)$ , pour  $Q = (q_{i,j}(t)) \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$ .

En utilisant l'involution  $\theta$  de  $\mathbb{I}_1$  (voir la proposition 2.2.7), nous avons

$$GR = H \Leftrightarrow \theta(R) \theta(G) = \theta(H), \quad (5.4)$$

où  $\theta(G)$  et  $\theta(H)$  s'écrivent

$$\theta(G) = \sum_{k=0}^n G_k(I)^T e (\partial t \partial)^k = \sum_{k=0}^n G_k(I)^T e k! \partial^k = \sum_{k=0}^n \check{G}_k(t)^T e k! \partial^k,$$

car, en utilisant l'identité  $Ie = te$ , nous avons

$$G_k(I)^T e = \sum_{l=0}^{\beta_k} G_{k,l}^T I^l e = \sum_{l=0}^{\beta_k} G_{k,l}^T \frac{t^l}{l!} e = \check{G}_k(t)^T e.$$

De même, nous avons  $\theta(H) = \sum_{i=0}^m \check{H}_i(t)^T e i! \partial^i$ . Par conséquent, (5.4) donne

$$\theta(R) \left( \sum_{k=0}^n \check{G}_k(t)^T e k! \partial^k \right) = \sum_{i=0}^m \check{H}_i(t)^T e i! \partial^i.$$

En utilisant le lemme 2.2.1 et le fait que  $\theta(R) (\check{G}_k(t)^T) \in \mathbb{k}[t]^{p \times r}$ , l'égalité ci-dessus est équivalente à l'égalité des deux formes normales suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \theta(R) (\check{G}_k(t)^T) e k! \partial^k = \sum_{i=0}^m \check{H}_i(t)^T e i! \partial^i.$$

Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

1. Si  $m > n$ , alors  $GR = H$  n'a pas de solution.
2. Si  $m \leq n$ , alors  $GR = H$  est équivalent au système linéaire

$$\begin{cases} \theta(R) (\check{G}_k(t)^T) = \check{H}_k(t)^T, & k = 0, \dots, m, \\ \theta(R) (\check{G}_k(t)^T) = 0, & k = m + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (5.5)$$

L'existence de solutions de  $GR = H$  est alors équivalente à l'existence de solutions polynomiales d'un système linéaire intégro-différentiel inhomogène de la forme  $P(v) = w$ , où  $P \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^{p \times r}$  sont donnés, et  $v \in \mathbb{k}[t]^{q \times r}$  est l'inconnue.

**Remarque 5.3.2.** L'exemple 5.2.2, permet de traiter  $GR = LR$ , avec  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$ , dans le cas particulier où  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ . En effet,  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$  si, et seulement si,  $\theta(R) \in \langle e \rangle^{q \times p}$ . Ainsi, si  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$  et  $N$  vérifient  $\partial^N R = 0$ , d'après l'exemple 5.2.2, nous pouvons prendre  $E = T_{N-1} I_q$  comme solution particulière de l'équation  $GR = LR$  avec  $L = I_q$ ,  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$ .

Dans le cas d'un opérateur scalaire, c'est-à-dire  $l = m = 1$ , ce problème est résolu dans [144, 10]. Le cas général est l'objet du chapitre 4 et son implémentation est réalisée dans le package `Bavula` [69], voir l'annexe B. On rappelle les deux résultats suivants du chapitre 4 qui permettent de trouver les solutions polynomiales d'un système intégro-différentiel général :

**Théorème 5.3.1** ([70]). Soient  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$ ,  $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^l$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  et  $\partial^N(w) = 0$ . Nous définissons des matrices  $Q$ ,  $P'$ ,  $M'$ ,  $P''$ ,  $H$  et  $T'$  à coefficients dans  $\mathbb{A}_1$  telles que

- $\ker_{\mathbb{A}_1}(P_N \cdot) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q \cdot)$ ,
- $\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot P')$ ,
- $\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot P')$ ,
- $\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot M')$ ,
- $P_N = P'' P'$ ,
- $H = (M'^T \quad P''^T)^T$ ,
- $P' T' P' = P'$ .

L'ensemble de toutes les solutions polynomiales  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  du système linéaire inhomogène  $P(v) = w$  est paramétré par

$$\{v = T'(u_g) + Q(s) \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1} : (T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)\},$$

où  $u_g$  est la solution polynomiale générale du système différentiel linéaire holonome homogène défini par la matrice  $H$  et les conditions  $\mathbb{k}$ -linéaires  $(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)$  sur le paramètre  $s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1}$  peuvent être rendues explicites.

**Remarque 5.3.3.** Notons que toutes les matrices impliquées dans le théorème 5.3.1 peuvent être calculées à l'aide du package `OreModules` [59] et que  $u_g$  peut être calculé grâce à `IntegrableConnections` [12].

**Théorème 5.3.2.** Soient  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^l$ . Notons  $P = \sum_{k=0}^c t^k e P_k(\partial)$ , avec  $P_c(\partial) \neq 0$ ,  $w = \sum_{l=0}^d t^l w_l$ , avec  $w_d \neq 0$  et  $P_k(\partial) = \sum_{i=0}^{d_k} P_{k,i} \partial^i$  pour tout  $k = 0, \dots, c$ . Considérons le système en les inconnues  $v_j \in \mathbb{k}^m$  suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\min\{d_k, r\}} j! P_{k,j} v_j = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ \sum_{j=0}^{\min\{d_k, r\}} j! P_{k,j} v_j = 0, & k = d + 1, \dots, c. \end{cases} \quad (5.6)$$

Alors,

1. Si  $d > c$ , le système linéaire  $P(v) = w$  n'a pas de solution.
2. Si  $d \leq c$ , les solutions polynomiales du système intégro-différentiel  $P(v) = w$ , avec  $v(t) \in \mathbb{k}[t]^m$  s'écrivent

$$v(t) = \sum_{j=0}^s t^j v_j + t^{s+1} \tilde{v}(t),$$

avec  $v_j \in \mathbb{k}^m$  les solutions du système linéaire (5.6),  $s := \max\{d_0, \dots, d_c\}$  et  $\tilde{v}(t)$  un vecteur de  $\mathbb{k}[t]^m$  quelconque.

Enfin, remarquons que le calcul de  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  satisfaisant  $ER = LR$  correspond au calcul d'une solution polynomiale particulière d'un système linéaire intégro-différentiel inhomogène de la forme  $P(v) = w$ , et que le calcul de  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$  correspond au calcul de toutes les solutions polynomiales du système linéaire homogène  $P(v) = 0$ .

Résumons dans un algorithme la méthode de recherche d'une solution particulière de l'équation  $GR = LR$  d'inconnue  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  où  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{L})$  pour  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  fixé.

---

**Algorithme 11** Solution particulière de  $GR = LR$  d'inconnue  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  avec  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{L})$ .

---

**Entrée**  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ .

**Sortie** Matrice  $L$  telle que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{L})$  et une solution particulière  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  de  $GR = LR$ .

- 1: **Si**  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$  **alors**,
  - 2:     Calculer  $N$  tel que  $\partial^N R = 0$ . (existe grâce au lemme 2.2.2)
  - 3:     **Retourner**  $L := I_q$  et  $G := T_{N-1} I_q$ .
  - 4: **Sinon**
  - 5:     Calculer  $L$  telle que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{L})$ .
  - 6:     Écrire  $H = LR$  sous la forme  $H = \sum_{i=0}^m t^i e H_i(\partial)$ ,  $H_m(\partial) \neq 0$ .
  - 7:     Calculer  $\theta(R)$ . (grâce à la proposition 2.2.7)
  - 8:     Former le système (5.5) d'inconnues les  $\check{G}_k(t)^T$ .
  - 9:     Résoudre le système (5.5). (grâce à l'algorithme 10)
  - 10:    Fixer les paramètres  $v_j$  libres et la fonction  $\tilde{v}$  à 0 pour obtenir une solution particulière.
  - 11:    Former la matrice d'opérateurs  $G = \sum_{k=0}^n t^k e G_k(\partial)$ .
  - 12:    **Retourner**  $L$  et  $G$
  - 13: **fin Si**
- 

**Exemple 5.3.1.** Reprenons l'exemple 5.2.1. Montrons comment calculer une solution particulière  $E \in \langle e \rangle^{3 \times 4}$  du système inhomogène  $ER = H := LR \in \langle e \rangle^{3 \times 1}$ , où  $R = (\partial \ I \ t \ e)^T$  et  $H = (-te \ 0 \ e)^T = eH_0 + t eH_1$ , avec  $H_0 = (0 \ 0 \ 1)^T$  et  $H_1 = (-1 \ 0 \ 0)^T$ .

Nous avons alors  $\theta(R) = (I \ \partial \ \partial t \partial \ e)$  et, en posant  $E = eE_0(\partial) + t eE_1(\partial) \in \langle e \rangle^{3 \times 4}$  avec  $E_0, E_1 \in \mathbb{k}[\partial]^{3 \times 4}$ , l'équation  $\theta(R)\theta(E) = \theta(F)$  est équivalente à la recherche de solutions polynomiales particulières  $(\check{E}_0(t)^T, \check{E}_1(t)^T)$  du système linéaire inhomogène défini par

$$\theta(R) (\check{E}_i(t)^T) = H_i^T \quad i = 0, 1.$$

Ce problème est équivalent à  $(I \ \partial \ \partial t \partial \ e)v(t) = w$ , c'est-à-dire,

$$\int_0^t v_1(\tau) d\tau + \dot{v}_2(t) + t \ddot{v}_3(t) + \dot{v}_3(t) + v_4(0) = w, \quad (5.7)$$

où  $w = 0$  ou 1. Notons que le système linéaire intégro-différentiel est *sous-déterminé*, cela signifie qu'il admet une infinité de solutions.

Des solutions particulières sont  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$  pour  $w = 0$  et  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$  et  $v_4 = 1$  pour  $w = 1$ , et nous retrouvons ainsi la matrice  $E$  donnée dans l'exemple 5.2.1. En effet,

$$E_0(t)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1(t)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -te \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

et on peut alors vérifier que

$$ER = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -te \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \\ I \\ t \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te \\ 0 \\ e \end{pmatrix} = H.$$

Enfin,  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$  définit l'ensemble des solutions polynomiales de (5.7) avec  $w = 0$ .

**Remarque 5.3.4.** Il est à noter qu'une solution particulière de  $GR = H$  permet de factoriser à gauche  $H$  par  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  donnée. Par ailleurs, notons que si  $R \notin \langle e \rangle^{q \times p}$ , alors l'algorithme 11 permet de calculer une factorisation dans  $\langle e \rangle$  par  $R$  d'une matrice  $H$  à coefficients dans  $\langle e \rangle$  quelconque. Savoir résoudre ce type de problème de factorisation sera également utile dans le chapitre 6 pour le calcul de l'inverse à gauche (ou à droite) d'une matrice  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . Écrivons ainsi l'algorithme correspondant, qui n'est alors qu'un sous-cas de l'algorithme 11.

---

**Algorithme 12** Solution particulière de  $GR = H$  d'inconnue  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  où  $H \in \langle e \rangle^{r \times p}$

---

**Entrée**  $R \notin \langle e \rangle^{q \times p}$ ,  $H \in \langle e \rangle^{r \times p}$ .

**Sortie** Solution particulière  $G$  de  $GR = H$ .

- 1: Écrire  $H = LR$  sous la forme  $H = \sum_{i=0}^m t^i e H_i(\partial)$ .
  - 2: Calculer  $\theta(R)$  (grâce à la proposition 2.2.7).
  - 3: Former le système (5.5) d'inconnues les  $\check{G}_k(t)^T$ .
  - 4: Résoudre le système (5.5) (grâce à l'algorithme 10).
  - 5: Sélectionner la solution correspondant à  $\check{v}(t) = 0$ .
  - 6: Former la matrice d'opérateurs  $G = \sum_{k=0}^n t^k e G_k(\partial)$ .
  - 7: **Retourner**  $G$ .
- 

### 5.3.2 Caractérisation effective de $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R)$ pour $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$

Soit  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . Dans cette section, nous allons montrer que le  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R)$  est obtenu en complétant les lignes de la matrice  $L' = L - E$  dans  $\mathbb{I}_1^{r \times q} \setminus \langle e \rangle^{r \times q}$  (voir la section 5.2) par un nombre fini d'éléments de  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$  qui ne sont pas des  $\langle e \rangle$ -combinaisons à gauche des lignes de  $L'$ , c'est-à-dire, qui ne sont pas dans  $\langle e \rangle^{1 \times r}(L - E)$ .

Énonçons un résultat préliminaire au résultat principal de cette section.

**Proposition 5.3.1.** *Soit  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . On introduit les objets suivants :*

- $\bar{R} \in \mathbb{B}_1^{q \times p}$ , la matrice dont les coefficients sont les classes des coefficients de  $R$  dans  $\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$ ,
- $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  tel que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$ ,
- $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  satisfaisant  $ER = LR \in \langle e \rangle^{r \times p}$ ,
- $P = \theta(R) \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$ ,
- Le plus petit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$ ,
- $Q \in \mathbb{A}_1^{q \times n}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P_N \cdot) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q \cdot)$ .

Alors, il existe  $G \in \mathbb{I}_1^{n \times r}$  et  $F \in \langle e \rangle^{n \times q}$  tels que

$$\theta(Q) = G(L - E) + F. \quad (5.8)$$

*Démonstration.* Nous avons  $P_N Q = 0$ , c'est-à-dire  $\partial^N \theta(R) Q = 0$ , ce qui, par application de l'involution  $\theta$ , est équivalent à  $\theta(Q) R I^N = 0$ . Ainsi, dans  $\mathbb{B}_1$ , nous avons  $\theta(Q) \bar{R} \sigma^{-N} = 0$ , soit  $\theta(Q) \bar{R} = 0$  puisque  $\sigma^{-N}$  est inversible dans  $\mathbb{B}_1$ . Cela montre que  $\text{im}_{\mathbb{B}_1}(\theta(Q)) \subseteq \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$ , et donc, il existe  $G \in \mathbb{I}_1^{n \times r}$  tel que  $\theta(Q) = \bar{G} \bar{L}$ . Par conséquent, il existe  $E' \in \langle e \rangle^{n \times q}$  tel que  $\theta(Q) = GL + E'$ , et ainsi, nous obtenons  $\theta(Q) = G(L - E) + F$ , où  $F = E' + GE \in \langle e \rangle^{n \times q}$ .  $\square$

Le résultat principal de ce chapitre et de ce mémoire est le théorème suivant qui donne une preuve effective du fait que  $\mathbb{I}_1$  est un anneau cohérent en explicitant une méthode de calcul effectif des générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R)$  pour toute matrice  $R$  de  $\mathbb{I}_1^{q \times p}$ .

**Théorème 5.3.3.** Soit  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . On introduit les objets suivants :

- $\bar{R} \in \mathbb{B}_1^{q \times p}$ , la matrice dont les coefficients sont les classes des coefficients de  $R$  dans  $\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$ ,
- $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  tel que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$ ,
- $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  satisfaisant  $E R = L R \in \langle e \rangle^{r \times p}$ ,
- $P = \theta(R) \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$ ,
- Le plus petit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$ ,
- $Q \in \mathbb{A}_1^{q \times n}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P_N \cdot) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q \cdot)$ ,
- $G \in \mathbb{I}_1^{n \times r}$  et  $F \in \langle e \rangle^{n \times q}$  tels que  $\theta(Q) = G(L - E) + F$
- $P' \in \mathbb{A}_1^{p' \times q}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot P')$ ,
- $M' \in \mathbb{A}_1^{q' \times p'}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot M')$ ,
- $P'' \in \mathbb{A}_1^{p \times p'}$  tel que  $P_N = P'' P'$ ,
- $H := (M'^T P''^T)^T$ ,
- $u_g \in \mathbb{k}[t]^{p' \times 1}$  la solution générale de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \cdot) = \left\{ v \in \mathbb{k}[t]^{p' \times 1} \mid H(v) = 0 \right\}$ ,
- $T' \in \mathbb{A}_1^{q \times p'}$  un inverse généralisé de  $P'$ , c'est-à-dire, une matrice vérifiant  $P' T' P' = P'$ .

Nous avons alors,

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) = \mathbb{I}_1^{1 \times r} (L - E) + \sum_{i=1}^m \mathbb{I}_1 M_i = \mathbb{I}_1^{1 \times (r+m n)} \begin{pmatrix} L - E \\ M_1 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix},$$

où  $\{M_i\}_{i=1, \dots, m}$  est une base finie de l'espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{k}$  suivant

$$\mathcal{E} = \left\{ e \widehat{u}_g^T(\partial) \theta(T') + e \widehat{s}(\partial)^T F \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1} (T_{N-1} P Q)(s) = -(T_{N-1} P T')(u_g) \right\}. \quad (5.9)$$

*Démonstration.* Comme expliqué précédemment, le calcul de  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$  est lié au calcul de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R) \cdot)$ . Rappelons rapidement pourquoi. Nous avons  $X R = 0$  si, et seulement si,  $\theta(R) \theta(X) = 0$ .

Si on écrit  $X = \sum_{i=0}^r t^i e X_i(\partial) \in \langle e \rangle^{r \times q}$ , avec  $X_r(\partial) \neq 0$ , alors on obtient  $\theta(X) = \sum_{i=0}^r \theta(X_i(\partial)) \theta(e) \theta(t^i)$  et

$$\theta(R) \theta(X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^r i! \theta(R) (X_i(t)^T) e \partial^i = 0.$$

Ainsi,  $X_i(t)^T$  est une solution polynomiale de  $\theta(R)(v) = 0$ .

En appliquant le théorème 5.3.1 à  $P = \theta(R) \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$  et  $w = 0$ , nous avons

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R) \cdot) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1} : (T_{N-1} P Q)(s) = -(T_{N-1} P T')(u_g)\}. \quad (5.10)$$

Caractérisons maintenant  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$ . En utilisant le lemme 2.2.1 et le point (2) de la définition 2.2.7, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} v \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R) \cdot) &\Leftrightarrow \theta(R)(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta(R) v e = 0 \\ &\Leftrightarrow e \theta(v) R = 0 \\ &\Leftrightarrow e \theta(v) \in \ker_{\langle e \rangle}(\cdot R) \\ &\Leftrightarrow \theta(e) \theta(v) \in \ker_{\langle e \rangle}(\cdot R) \\ &\Leftrightarrow \theta(v e) \in \ker_{\langle e \rangle}(\cdot R). \end{aligned}$$

Soit  $v \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R) \cdot)$ , détaillons  $\theta(v e)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \theta(v e) &= \theta(T'(u_g(t)) e + Q(s(t)) e) \\ &= \theta(T' u_g(t)) e + Q(s(t)) e \\ &= e u_g(\partial t \partial)^T \theta(T') + e s(\partial t \partial)^T \theta(Q) \\ &= e \widehat{u}_g(\partial)^T \theta(T') + e \widehat{s}(\partial)^T \theta(Q), \end{aligned}$$

pour tout  $s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1}$  satisfaisant les contraintes linéaires  $(T_{N-1} P Q)(s) = -(T_{N-1} P T')(u_g)$ . Maintenant, d'après la proposition 5.3.1, nous avons  $\theta(Q) = G(L - E) + F$  et donc

$$\theta(v e) = e \widehat{u}_g(\partial)^T \theta(T') + e \widehat{s}(\partial)^T F + e \widehat{s}(\partial)^T G(L - E). \quad (5.11)$$

Comme montré dans la section 5.2, nous avons  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot)(L - E) \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot)(R)$ . Ainsi, à partir de (5.11), pour calculer un ensemble fini de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot)(R)$ , nous devons uniquement considérer les éléments de  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot)(R)$  qui engendrent  $\mathcal{E}$  (voir section 5.2).

Il reste à prouver que  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ .

Premièrement,  $u_g$  est la solution polynomiale générale d'un système différentiel linéaire holonome (voir [70]) et appartient donc à un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{k}$  d'après le théorème 4.1.2. Ensuite, il existe  $\ell \geq 0$  tel que  $\partial^\ell F = 0$  car  $F \in \langle e \rangle^{n \times p}$  (voir le point 1 du lemme 2.2.2), ce qui fournit une borne sur le degré de  $s$  et donc sur la dimension de  $\mathcal{E}$ . Cela conclut la preuve.  $\square$

### 5.3.3 Algorithme et exemples du calcul de $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot)(R)$ pour $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$

Nous combinons les résultats obtenus dans ce chapitre pour fournir un algorithme permettant de calculer un ensemble fini de générateurs du module de syzygies  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot)(R)$  pour une matrice  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  donnée.

---

**Algorithme 13** Ensemble fini de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot)(R)$  pour  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$

---

**Entrée**  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$

**Sortie** Matrice dont les lignes forment un ensemble générateur de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot)(R)$

- 1: Calculer la paramétrisation de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R))$ . (Voir (5.10))
  - 2: Calculer  $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  tel que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot)(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\cdot)(\bar{L})$ . (Voir la section 2.4.3)
  - 3: Calculer  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  tel que  $ER = LR$ . (Voir l'algorithme 11)
  - 4: Calculer  $G \in \mathbb{I}_1^{n \times r}$  tel que  $\overline{\theta(Q)} = \overline{GL}$ . (Voir la section 2.4.3)
  - 5: Calculer  $F = \theta(Q) - G(L - E)$ .
  - 6: Calculer une base  $\{M_i\}_{i=1, \dots, m}$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}$  défini par (5.9).
  - 7: **Retourner**  $\left( (L - E)^T \quad M_1^T \quad \dots \quad M_m^T \right)^T$ .
- 

Nous avons une implémentation de cet algorithme dans `Maple` [69]. Voir le package `Bavula` décrit dans l'annexe B. Comme mentionné précédemment, elle repose sur les packages `IntDiffOp` [103] pour les calculs dans  $\mathbb{I}_1$ , `OreModules` [59] pour les calculs dans  $\mathbb{A}_1$  et  $\mathbb{B}_1$ , et `IntegrableConnections` [12] pour le calcul des solutions polynomiales d'une connexion. Les Étapes 1 et 3 peuvent être réalisées en utilisant l'implémentation de l'algorithme développée dans [70] (voir chapitre 4).

L'algorithme suivant est une version davantage « self-contained » de l'algorithme 13.

---

**Algorithme 14** Ensemble fini de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  pour  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$

---

**Entrée**  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ .

**Sortie** Matrice dont les lignes forment un ensemble générateur de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ .

- 1: Calculer  $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  tel que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\overline{L})$ .
- 2: Calculer  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  tel que  $ER = LR$  (grâce à l'algorithme 11).
- 3: Calculer  $P = \theta(R) \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$ .
- 4: Calculer le plus petit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$ .
- 5: Calculer  $Q \in \mathbb{A}_1^{q \times n}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P_N.) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q.)$ .
- 6: Calculer  $G \in \mathbb{I}_1^{n \times r}$  tel que  $\overline{\theta(Q)} = \overline{GL}$ .
- 7: Calculer  $F = \theta(Q) - G(L - E) \in \langle e \rangle^{n \times q}$ .
- 8: Calculer  $P' \in \mathbb{A}_1^{p' \times q}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P')$ .
- 9: Calculer  $M' \in \mathbb{A}_1^{q' \times p'}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.M')$ .
- 10: Calculer  $P'' \in \mathbb{A}_1^{p \times p'}$  tel que  $P_N = P'' P'$ .
- 11: Calculer  $H := (M'^T P''^T)^T$ .
- 12: Calculer  $u_g \in \mathbb{k}[t]^{p' \times 1}$  la solution générale de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \bullet) = \{v \in \mathbb{k}[t]^{p' \times 1} \mid H(v) = 0\}$ .
- 13: Calculer  $T' \in \mathbb{A}_1^{q \times p'}$  un inverse généralisé de  $P'$ , c'est-à-dire, une matrice vérifiant  $P' T' P' = P'$ .
- 14: Calculer une base  $\{M_i\}_{i=1, \dots, m}$  de l'espace vectoriel

$$\mathcal{E} = \left\{ e \widehat{u}_g^T (\partial) \theta(T') + e \widehat{s}(\partial)^T F \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1} (T_{N-1} P Q)(s) = -(T_{N-1} P T')(u_g) \right\}.$$

- 15: **Retourner**  $\left( (L - E)^T \quad M_1^T \quad \dots \quad M_m^T \right)^T$ .
- 

**Exemple 5.3.2.** Détaillons les étapes de l'algorithme 14 sur un exemple simple. Soit  $R = \begin{pmatrix} \partial \\ I \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_1^{2 \times 2}$ . Nous avons alors :

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma^{-1} \end{pmatrix}, \quad \overline{L} = (1 \quad -\sigma^2), \quad L = (1 \quad -\partial^2).$$

On calcule alors le produit  $LR$  qui donne :

$$LR = (1 \quad -\partial^2) \begin{pmatrix} \partial \\ I \end{pmatrix} = 0, \quad E = 0, \quad L' = L.$$

Étudions maintenant  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$ . Posons  $P = \theta(R) = (I \quad \partial)$ , ainsi, nous avons  $P_1 = \partial \theta(R) = (1 \quad \partial^2) \in \mathbb{A}_1^{1 \times 2}$  et  $N = 1$ . Les étapes 5 et 6 donnent alors :

$$Q = \begin{pmatrix} \partial^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \theta(Q) = (I^2 \quad -1), \quad \overline{\theta(Q)} = (\sigma^{-2} \quad -1) = \underbrace{\sigma^{-2}}_{=G} \underbrace{(1 \quad -\sigma^2)}_{=\overline{L}}, \quad G = I^2.$$

Ensuite, calculons  $F$  comme suit :

$$F = \theta(Q) - G(L - E) = (I^2 \quad -1) - I^2 (1 \quad -\partial^2) = (0 \quad -ete\partial).$$

Le noyau à gauche de  $Q$  vaut  $P' = (1 \quad \partial^2)$ . Ainsi, nous avons  $M' = 0$  et  $P'' = 1$ . Finalement,  $H = 1$  et  $u_g = 0$ . Ainsi, nous avons :

$$\mathcal{E} = \{e \widehat{s}(\partial) (0 \quad -e - te\partial) \mid s \in \mathbb{k}[t], T_0 P Q(s) = 0\}.$$

On calcule  $T_0 P Q = e (I \quad \partial) \begin{pmatrix} \partial^2 \\ -1 \end{pmatrix} = -e\partial$ .

Ainsi, nous avons

$$\mathcal{E} = \{e \hat{s}(\partial) (0 - e - t e \partial) \mid s \in \mathbb{k}[t], s'(0) = 0\}.$$

Maintenant,  $s \in \mathbb{k}[t]$  vérifiant  $s'(0) = 0$  est équivalent à  $s = s_0 + t^2 q(t)$  pour un certain  $q \in \mathbb{k}[t]$  quelconque. Nous pouvons alors calculer l'involution de  $s$  et nous obtenons ainsi,

$$e \hat{s}(\partial) (0 - e - t e \partial) = s_0 + 2 \hat{q}(\partial) \partial^2 (0 - e - t e \partial) = -s_0 e,$$

et, donc nous avons

$$\mathcal{E} = \{(0 - s_0 e) \mid s_0 \in \mathbb{k}\}.$$

L'espace vectoriel  $\mathcal{E}$  est ainsi un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension 1 ayant pour base  $(0 e)$ .

Nous pouvons ainsi en conclure que :

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \begin{pmatrix} 1 & \partial^2 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

**Exemple 5.3.3.** Nous poursuivons l'exemple 5.2.1 dans lequel nous avons  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(.L') \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , où  $L' = L - E$  est défini par (5.2). Étudions maintenant  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$ . Pour cela, nous devons caractériser  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R) \bullet)$ , où  $P = \theta(R) = (I \ \partial \ \partial t \partial \ e) \notin \mathbb{A}_1^{1 \times 4}$ . Ainsi, considérons  $P_1 = \partial \theta(R) = (1 \ \partial^2 \ \partial^2 t \partial \ 0) \in \mathbb{A}_1^{1 \times 4}$ . Les solutions polynomiales de  $P_1(v) = 0$  sont alors définies par

$$\forall s \in \mathbb{k}[t]^{3 \times 1}, \quad v(t) = Q(s(t)), \quad Q = \begin{pmatrix} -\partial^2 & -\partial^2 t \partial & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les solutions polynomiales de  $\theta(R)(v) = 0$  sont définies par  $v(t) = Q(s(t))$ , où  $s \in \mathbb{k}[t]^{3 \times 1}$  satisfait

$$(e \theta(R))(v(t)) = ((0 \ e \partial \ e \partial \ e) Q)(s(t)) = \dot{s}_1(0) + \dot{s}_2(0) + s_3(0) = 0.$$

Ensuite,  $\theta(v(t) e) = \theta(Q(s) e) = \theta(Q s e) = e \hat{s}(\partial)^T \theta(Q)$ , où

$$\theta(Q) = \begin{pmatrix} -I^2 & 1 & 0 & 0 \\ -tI & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, nous avons l'identité  $\theta(Q) = G L' + F$ , où

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -t \partial & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t e \\ 0 & 0 & 0 & t e \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

ce qui donne  $\theta(v(t) e) = e \hat{s}(\partial)^T \theta(Q) = e \hat{s}(\partial)^T (G L' + F)$ . En utilisant

$$\mathbb{I}_1^{1 \times 3} L' \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R), \quad \hat{s}(\partial)^T = (\hat{s}_1(\partial) \ \hat{s}_2(\partial) \ \hat{s}_3(\partial))^T,$$

où

$$\begin{cases} s_1(t) = s_1(0) + \dot{s}_1(0) t + r_1(t) t^2, \\ s_2(t) = s_2(0) + \dot{s}_2(0) t + r_2(t) t^2, \\ s_3(t) = -(\dot{s}_1(0) + \dot{s}_2(0)) + r_3(t) t, \end{cases}$$

pour tous  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{k}[t]$ , nous avons,

$$\begin{cases} \hat{s}_1(\partial) = s_1(0) + \dot{s}_1(0) \partial + \sum_{j=0}^{d_1} (j+2)! r_{1,j} \partial^{j+2}, \\ \hat{s}_2(\partial) = s_2(0) + \dot{s}_2(0) \partial + \sum_{j=0}^{d_2} (j+2)! r_{2,j} \partial^{j+2}, \\ \hat{s}_3(\partial) = -(\dot{s}_1(0) + \dot{s}_2(0)) + \sum_{j=0}^{d_3} (j+1)! r_{3,j} \partial^{j+2}, \end{cases}$$

et nous pouvons considérer seulement le terme

$$e \hat{s}(\partial)^T F = (0 \ 0 \ 0 \ e(\hat{s}_1(\partial) + \hat{s}_2(\partial)) t e + e \hat{s}_3(\partial) e) = 0,$$

ce qui prouve finalement que  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1^{1 \times 3} L' = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.L')$ .

Dans l'exemple suivant, nous allons calculer les conditions de compatibilités d'un système intégro-différentiel à deux variables. On rappelle que les conditions de compatibilité du système  $Ry = z$ , avec  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ , sont données par  $Qz = 0$  avec  $Q \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  telle que  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(.Q) = \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ . En effet, en multipliant par  $Q$  l'égalité  $Ry = z$ , on obtient bien  $Qz = 0$  car  $QR = 0$  et le noyau de  $R$  est bien généré par les lignes de  $Q$ .

**Exemple 5.3.4.** Calculons les conditions de compatibilité du système intégral linéaire inhomogène

$$\begin{cases} t v_1(t) + \int_0^t v_2(\tau) d\tau = w_1(t), \\ t v_1(t) + \int_0^t (v_2(\tau) - \tau v_1(\tau)) d\tau = w_2(t). \end{cases} \quad (5.12)$$

Pour ce faire, calculons  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , où

$$R = \begin{pmatrix} t & I \\ t - It & I \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_1^{2 \times 2}.$$

Nous avons

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} (H-1)\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \\ (H-1)\sigma^{-1} - (H-2)\sigma^{-2} & \sigma^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{B}_1^{2 \times 2},$$

et un calcul de syzygies sur  $\mathbb{B}_1$  montre que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(. \bar{R}) = 0$ . Ainsi, nous avons  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \ker_{\langle e \rangle}(.R)$ . Caractérisons  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  à l'aide de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R))$ , où  $\theta(R)$  est défini par

$$\theta(R) = \begin{pmatrix} \partial t \partial & \partial t \partial - \partial t \partial^2 \\ \partial & \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \partial + 1 & (t \partial + 1)(1 - \partial) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial.$$

Notons que  $P = \theta(R) \in \mathbb{A}_1^{2 \times 2}$  et que  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times 2} / (\mathbb{A}_1^{1 \times 2} P)$  est un  $\mathbb{A}_1$ -module à gauche de torsion, et donc holonome, voir la proposition 4.1.3. Calculons une base du  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R))$ . En posant  $y(t) = \dot{v}(t)$ , l'équation  $\theta(R)(v(t)) = 0$  donne

$$\begin{pmatrix} t \partial + 1 & (t \partial + 1)(1 - \partial) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (y(t)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_2(t) = -y_1(t), \\ (t \partial + 1) \dot{y}_1(t) = 0. \end{cases}$$

De plus,  $(t \partial + 1)(t^n) = (n+1)t^n$  ce qui montre que l'équation indicielle en  $t = 0$  de  $t \partial + 1$  est  $n+1 = 0$  qui n'admet aucune solution  $n \in \mathbb{N}$  [144]. Ainsi, l'équation différentielle ordinaire  $(t \partial + 1)(z(t)) = 0$  n'a que 0 comme solution polynomiale, ce qui implique  $\dot{y}_1(t) = 0$ , c'est-à-dire  $y_1(t) = c \in \mathbb{k}$ , et donc,  $y_2(t) = -c$ . On en déduit que

$$v(t) = \begin{pmatrix} ct + d \\ -ct + f \end{pmatrix},$$

pour tous  $d, f \in \mathbb{k}$ . Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} \theta(v(t)e) &= \theta \left( \begin{pmatrix} ct + d \\ -ct + f \end{pmatrix} e \right) \\ &= e(c \partial t \partial + d \quad -c \partial t \partial + f) \\ &= e(c \partial + d \quad -c \partial + f) \\ &= ce(\partial \quad -\partial) + de(1 \quad 0) + fe(0 \quad 1), \end{aligned}$$

ce qui montre finalement que

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1^{1 \times 3} \begin{pmatrix} e \partial & -e \partial \\ e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Finalement, le système (5.12) admet les conditions de compatibilité suivantes :

$$\dot{w}_1(0) - \dot{w}_2(0) = 0, \quad w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 0.$$

Reprenons maintenant la suite de l'exemple 5.2.2 et traitons le cas où  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ . Soit  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ . Nous avons  $\overline{R} = 0$ , et donc,  $\ker_{\mathbb{B}}(\overline{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\overline{I_q}) = \mathbb{B}^{1 \times q} I_q$ , c'est-à-dire qu'on peut prendre  $\overline{L} = I_q$  et  $L = I_q$ .

En utilisant le point 1 du lemme 2.2.2, soit  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^M R = 0$ , et en utilisant l'identité  $1 = I^M \partial^M + T_{M-1}$  (voir le lemme 2.2.5), on obtient  $R = T_{M-1} R$ , ce qui montre que l'on peut poser  $E = T_{M-1} I_q$ , et ainsi :

$$\text{im}_{\mathbb{I}}(L - E) \subseteq \ker_{\mathbb{I}}(.R),$$

où  $L - E = (1 - T_{M-1}) I_q$ .

Maintenant, posons  $P = \theta(R) \in \langle e \rangle^{p \times q}$ . D'après le point 1 du lemme 2.2.2, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P_N = \partial^N \theta(R) = 0$ , donc  $P = T_{N-1} P$ . Par conséquent, on peut prendre  $Q = I_q$  dans le théorème 5.3.1 et  $H = 0$ , de sorte que :

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P \bullet) = \{v = s \mid s \in \mathbb{k}[t]^{q \times 1} \text{ et } P(s) = 0\}.$$

De plus, on a l'identité :

$$\theta(Q) = I_q = L - E + T_{M-1} I_q,$$

ce qui montre que l'on peut poser  $F = E = T_{M-1} I_q$ . Par conséquent, l'équation (5.9) donne :

$$\mathcal{E} = \{e \widehat{s}(\partial) T_{M-1} I_q \mid s \in \mathbb{k}[t]^{q \times 1} \text{ et } P(s) = 0\}.$$

En extrayant une base finie  $\{M_i\}_{i=1, \dots, m}$  du  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel  $\mathcal{E}$ , on obtient :

$$\ker_{\mathbb{I}}(.R) = (((1 - T_{M-1}) I_q)^T \quad M_1^T \quad \dots \quad M_m^T)^T.$$

**Exemple 5.3.5.** Nous considérons à nouveau l'exemple 3.3.3, à savoir  $R = te + te\partial \in \langle e \rangle$ . On a  $M = 2$ , de sorte que  $1 - T_1 = 1 - e - te\partial$  appartient à  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ . De plus, nous avons :

$$\theta(R) = e\partial + Ie\partial = e\partial + te\partial.$$

Les solutions polynomiales de  $\theta(R)$  sont définies par

$$(1 + t)\dot{p}(0) = 0,$$

c'est-à-dire  $\dot{p}(0) = 0$ , ce qui donne

$$p(t) = p_0 + t^2 p_2'(t), \quad \forall p_0 \in \mathbb{k}, p_2' \in \mathbb{k}[t].$$

On en déduit que :

$$\mathcal{E} = \left\{ e \left( p_0 + 2p_2'(\partial) \partial^2 \right) T_1 \mid p_0 \in \mathbb{k}, p_2' \in \mathbb{k}[t] \right\} = \{e p_0 \mid p_0 \in \mathbb{k}\}.$$

Ainsi,

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1(1 - e - te\partial) + \mathbb{I}_1 e.$$

Dans l'exemple 3.3.3, nous avons montré que

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1(1 - t\partial) + \mathbb{I}_1 \partial^2,$$

ce qui est correct puisque l'on a :

$$\begin{pmatrix} 1 - t\partial \\ \partial^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t\partial e \\ \partial^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e - te\partial \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 - e - te\partial \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I^2 \\ e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - t\partial \\ \partial^2 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 5.3.6.** Reprenons l'exemple 3.3.5 du chapitre 3 avec la méthode décrite par l'algorithme 14.

Soient  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1(t^2 + 1)e = \mathbb{I}_1 g$  et  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1(te + t^2 e \partial) = \mathbb{I}_1 h$ . Pour calculer un ensemble fini de générateurs de  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ , nous définissons d'abord

$$R = \begin{pmatrix} (t^2 + 1)e \\ te + t^2 e \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in \langle e \rangle^{2 \times}.$$

Nous avons alors :

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{L} = \bar{I}_2, \quad L = I_2.$$

On cherche alors à factoriser  $LR = R$  par  $R$  via une matrice  $E$  à coefficients dans  $\langle e \rangle$ . On peut prendre la matrice suivante,

$$E = \begin{pmatrix} e + te \partial & 0 \\ 0 & e + te \partial + \frac{t^2}{2} e \partial^2 \end{pmatrix},$$

qui vérifie bien

$$ER = \begin{pmatrix} e + te \partial & 0 \\ 0 & e + te \partial + \frac{t^2}{2} e \partial^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t^2 + 1)e \\ te + t^2 e \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t^2 + 1)e \\ te + t^2 e \partial \end{pmatrix} = R.$$

Étudions maintenant  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$ . Nous avons  $P = \theta(R) = (e + 2e \partial^2 \quad e \partial + 2te \partial^2)$ . Nous avons alors,

$$N = 2, \quad P_2 = \partial^2 P = 0, \quad Q = I_2, \quad P' = 0, \quad M' = I_2, \quad H = I_2, \quad u_g = 0$$

et

$$\theta(Q) = I_2, \quad \overline{\theta(Q)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{G} = 1, \quad G = 1.$$

Poursuivons en calculant la matrice  $F = \theta(Q) - G(L - E) = I_2 - 1(I_2 - E) = E$  et

$$T_1 P = (e + te \partial) (e + 2e \partial^2 \quad e \partial + 2te \partial^2) = (e + 2e \partial^2 \quad e \partial + 2te \partial^2) = P.$$

Ainsi, nous avons :

$$\mathcal{E} = \{e \hat{s}(\partial) F \mid s \in \mathbb{k}[t]^{2 \times 1}, P(s) = 0\}.$$

Soit  $s = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{2 \times 1}$ . Nous écrivons :

$$\begin{cases} s_1(t) = s_0^1 + s_1^1 t + s_2^1 t^2 + \dots \\ s_2(t) = s_0^2 + s_1^2 t + s_2^2 t^2 + \dots \end{cases}$$

Ainsi,  $P(s) = 0$  équivalent à  $s_1(0) + 2s_1''(0) + s_2'(0) + 2ts_2''(0) = 0$  donne les contraintes linéaires suivantes sur les coefficients de  $s$  :

$$\begin{cases} s_0^1 + 4s_2^1 + s_1^2 + 4ts_2^2 = 0 \\ s_2^2 = 0. \end{cases}$$

On écrit,

$$s(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \end{pmatrix} t^2 + \dots,$$

et

$$\hat{s}(\partial) = (s_0^1 \quad s_0^2) + (s_1^1 \quad s_1^2) \partial + (s_2^1 \quad s_2^2) \partial^2 + \dots$$

Ainsi, nous obtenons

$$e \hat{s}(\partial) F = e \hat{s}(\partial) \begin{pmatrix} e + te \partial & 0 \\ 0 & e + te \partial + \frac{t^2}{2} e \partial^2 \end{pmatrix} = (s_0^1 e + 4s_2^1 e + s_1^2 e \quad 2s_2^2 e \partial^2) = (0 \quad 0).$$

Finalement,  $\mathcal{E} = \{0\}$  et

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1^{1 \times 2}(L - E) = \begin{pmatrix} 1 - (t^2 + 1)e & 0 \\ -te & 1 - \frac{1}{2}t^2 e \partial^2 \end{pmatrix} = (L_1 \quad -L_2).$$

Enfin, on a  $L_1 g = L_2 h = \begin{pmatrix} 0 \\ -te \end{pmatrix}$ . On en conclut que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathbb{I}_1 te = \mathbb{I}_1 e$  ce qui est cohérent avec ce que l'on avait trouvé précédemment.

**Remarque 5.3.5.** Le choix de la matrice  $E$  dans l'exemple 5.3.6 n'est pas unique comme le montre la remarque 5.2.4. En accord avec l'exemple 5.2.2, nous aurions pu choisir  $\tilde{E} = T_2 I_2$ . Vérifions que  $\tilde{E} - E \in \ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$ . Nous avons

$$\tilde{E} - E = \begin{pmatrix} -t^2 e + te\partial + \frac{1}{2}t^2 e\partial^2 & 0 \\ -te & e + te\partial \end{pmatrix},$$

et

$$(\tilde{E} - E)R = \begin{pmatrix} -t^2 e + te\partial + \frac{1}{2}t^2 e\partial^2 & 0 \\ -te & e + te\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t^2 + 1)e \\ te + t^2 e\partial \end{pmatrix} = 0.$$

Étudions maintenant le cas de l'intersection de deux idéaux  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  dans le cas où  $\mathcal{I} \subset \langle e \rangle$  et  $\mathcal{J} \not\subset \langle e \rangle$ . Notons alors  $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^m \mathbb{I}_1 g_i$  et  $\mathcal{J} = \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_1 h_j$ , avec  $g_1, \dots, g_m \in \langle e \rangle$  et  $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ . Nous posons :

$$R = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous avons :

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{h}_1 \\ \vdots \\ \bar{h}_n \end{pmatrix}, \quad \ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot h) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{L}_2), \quad \bar{L}_2 \in \mathbb{B}_1^{r \times n}, \quad \ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot R) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \bar{L}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}_1^{(r+m) \times q}.$$

D'après la proposition 5.2.2, il existe  $E_2 \in \mathbb{I}_1^{r \times n}$  tel que  $(L - E)h = 0$ . Par ailleurs, d'après le lemme 2.2.2, il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $\partial^M g = 0$  ce qui implique  $(I_m - T_{M-1})g = 0$ . Ainsi, on pose

$$E = \begin{pmatrix} T_{M-1}I_m & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

et on obtient

$$L - E = \begin{pmatrix} I_m - T_{M-1}I_m & 0 \\ 0 & L_2 - E_2 \end{pmatrix},$$

qui vérifie  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(L - E) \subset \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R)$ .

Regardons maintenant  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R) \cdot)$ . On écrit

$$\theta(R) = (\theta(g) \quad \theta(h)) \in \mathbb{I}_1^{1 \times (m+n)}, \quad \partial^N \theta(R) = (0 \quad \partial^N \theta(h)) \in \mathbb{A}_1^{1 \times (m+n)}.$$

Posons  $\tilde{P} = \partial^N \theta(R)$  et  $v(t) = (p(t)^T \quad q(t)^T)^T \in \mathbb{k}[t]^{(m+n) \times 1}$  une solution de  $\tilde{P}(v(t)) = 0$ . Alors  $\tilde{P}(v(t)) = 0$  est équivalent à  $\partial^N \theta(h)(q(t)) = 0$  et  $p(t) \in \mathbb{k}[t]^{m \times 1}$  arbitraire. Posons  $P = \partial^N \theta(h)$ .

Si  $n = 1$  le système  $\partial^N \theta(h)(q(t)) = 0$  est déterminé, le module associé est de torsion, si  $n \geq 2$  alors le système est sous-déterminé et l'on note  $Q_2 \in \mathbb{A}_1^{n \times n_2}$  une paramétrisation, c'est-à-dire, que  $\partial^N \theta(h)(q(t)) = 0$  si, et seulement si,  $q(t) = Q_2(s_2(t)) + T'_2(u_g)$  où  $s_2(t) \in \mathbb{k}[t]^{n_2 \times 1}$ ,  $T'_2$  et  $u_g$  sont définis dans les notations du théorème 5.3.3 appliqué à  $P = \theta(h)$ . D'après la proposition 5.3.1, on peut écrire :

$$\theta(Q_2) = G_2(L_2 - E_2) + F_2,$$

ainsi que

$$Q = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} (1 - T_M) I_m & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} T_{M-1} I_m & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}$$

et vérifier que l'on a

$$\theta(Q) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \theta(Q_2) \end{pmatrix} = G(L - E) + F.$$

Comme  $v(t)$  est une solution polynomiale de  $\tilde{P}$  nous avons

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} (s(t)) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_2' \end{pmatrix} (u_g).$$

Ainsi, nous avons

$$\mathcal{E} = \left\{ e \widehat{u}_g^T(\partial) \theta(T_2') + e \widehat{s}(\partial)^T F \mid s = (s_1 \ s_2)^T \in \mathbb{k}[t]^{(m+n_2) \times 1}, (T_{N-1} \theta(h) Q_2)(s_2) = -(T_{N-1} \theta(h) T_2')(u_g) \right\}.$$

**Exemple 5.3.7.** Soient  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1 e$  et  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1 (t\partial + e) + \mathbb{I}_1 \partial^2$ . Calculons  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ . Nous avons :

$$R = \begin{pmatrix} e \\ t\partial + e \\ \partial^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^{-1} H \sigma \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ H - 1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_2 = (\sigma^2 \quad -(H + 1)), \quad L_2 = (\partial^2 \quad -t\partial - 2).$$

Comme  $\partial^2 t\partial = t\partial^3 + 1\partial^2$  nous avons  $L_2 h = 0$  et donc  $E_2 = (0 \ 0)$ . Ainsi,  $M = 1$  et :

$$E = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L - E = \begin{pmatrix} 1 - e & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2 & -t\partial - 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons bien  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(L - E) \subset \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R)$ .

Regardons maintenant les solutions polynomiales de  $\theta(R) = (e \ t\partial + e \ I^2)$ . On calcule  $N = 2$  et

$$P = \partial^N \theta(R) = (0 \ \partial^2 t\partial \ 1), \quad \ker_{\mathbb{A}_1}((\partial^2 t\partial \ 1)) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}((1 \ -\partial^2 t\partial)).$$

Ainsi nous avons

$$Q_2 = (1 \ -\partial^2 t\partial), \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\partial^2 t\partial \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \theta(Q_2) &= (1 \ -tI) = \underbrace{I^2}_{G_2} (\partial^2 \ -t\partial - 2) + \underbrace{(T_1 \ 0)}_{F_2}, \\ \theta(Q) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t\partial \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - e & 0 \\ 0 & I^2 \end{pmatrix}}_G \begin{pmatrix} 1 - e & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2 & -t\partial - 2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 \end{pmatrix}}_F. \end{aligned}$$

Soit  $v(t) = (p(t) \ q_1(t) \ q_2(t))^T$  une solution de  $P(v(t)) = 0$ , alors  $v(t) = Q(s(t))$  pour  $s(t) = (s_1(t) \ s_2(t))^T \in \mathbb{k}[t]^{2 \times 1}$ . Plus précisément, nous avons :

$$v(t) = Q(s(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\partial^2 t\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ -2s_2(t) + s_2''(t) \end{pmatrix}.$$

On réinjecte  $v(t)$  dans l'équation  $\theta(R)(v(t)) = 0$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \theta(R)(v(t)) = 0 &\iff (e \ t\partial + e \ I^2) \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ -2s_2(t) + s_2''(t) \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff s_1(0) + s_2(0) + t s_2'(t) + I^2(-s_2(t) + s_2''(t)) = 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Écrivons  $s_1$  et  $s_2$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} s_1(t) = s_0^1 + s_1^1 t + s_2^1 t^2 + \dots \\ s_2(t) = s_0^2 + s_1^2 t + s_2^2 t^2 + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} t s_2(t) = s_0^2 t + s_1^2 t^2 + s_2^2 t^3 + \dots \\ I^2(s_2(t)) = s_0^2 \frac{t^2}{2} + s_1^2 \frac{t^3}{6} + s_2^2 \frac{t^5}{20} + \dots \\ I^2(s_2''(t)) = s_2^2 t^2 + s_3^2 t^3 + \dots \end{cases}$$

Le terme en  $\deg_t = 0$  de l'équation (5.13) donne la condition  $s_0^1 = -s_0^2$ . Le terme en  $\deg_t = 1$  induit  $s_1^2 = 0$ . Les autres coefficients sont libres. Nous pouvons donc écrire  $s(t)$  sous la forme :

$$s(t) = \begin{pmatrix} -s_0^2 + s_1^1 t + t^2 r_1(t) \\ s_0^2 + t^2 r_2(t) \end{pmatrix}, \quad s_0^2, s_1^1 \in \mathbb{k}, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{k}[t].$$

On s'intéresse maintenant à  $e \hat{s}(\partial) F$ . Nous avons :

$$e \hat{s}(\partial) F = e \begin{pmatrix} -s_0^2 + s_1^1 \partial + \hat{r}_1(\partial) \partial^2 & s_0^2 + \hat{r}_2(\partial) \partial^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e + t e \partial & 0 \end{pmatrix} = s_0^2 \begin{pmatrix} -e & e & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, nous avons :

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \begin{pmatrix} 1 - e & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2 & -t \partial - 2 \\ -e & e & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons  $L_1 = \begin{pmatrix} 1 - e \\ 0 \\ -e \end{pmatrix}$  et  $L_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial^2 & -t \partial - 2 \\ e & 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi, nous concluons :

$$L_1 g = L_2 h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathbb{I}_1 e.$$

## Chapitre 6

# L'anneau $\mathbb{I}_1$ est un anneau de Cramer effectif

Le chapitre 4 introduit une méthode pour déterminer les solutions polynomiales  $v \in \mathbb{k}[t]^{m \times 1}$  d'un système intégral différentiel inhomogène de la forme  $P(v) = w$ , où  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$  et  $w \in \mathbb{k}[t]^l$ . Cette méthode repose sur la résolution d'un système différentiel inhomogène et sur l'équation matricielle  $GR = LR$ , où  $R$  est une matrice fixée à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ ,  $L$  une matrice telle que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{L}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$ , et  $G$  une matrice inconnue à coefficients dans  $\langle e \rangle$ . Ces résultats, sont essentiels pour le chapitre 5, qui traite du calcul explicite d'un système fini de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\bar{R})$  pour une matrice donnée  $R \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$ . Ce résultat permet en particulier de résoudre le problème du calcul d'un ensemble de générateurs du module des syzygies d'un idéal de  $\mathbb{I}_1$ .

Dans ce chapitre, nous exploitons les résultats des chapitres 4 et 5 pour résoudre des systèmes linéaires de la forme  $XA = Y$  ou  $AX = Y$  avec  $A, Y$  des matrices rectangulaires à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$  fixées et  $X$  une matrice inconnue à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ .

### 6.1 Anneau de Cramer

Commençons par donner la définition d'un anneau de *Cramer*.

- Définition 6.1.1.**
1. Un anneau  $\mathcal{A}$  est appelé un *anneau de Cramer à gauche* si, pour toutes matrices fixées  $A \in \mathcal{A}^{m \times l}$  et  $Y \in \mathcal{A}^{n \times l}$ , le problème consistant à trouver toutes les matrices  $X \in \mathcal{A}^{n \times m}$  telles que  $XA = Y$  est résoluble.
  2. Un anneau  $\mathcal{A}$  est appelé un *anneau de Cramer à droite* si, pour toutes matrices fixées  $A \in \mathcal{A}^{l \times m}$  et  $Y \in \mathcal{A}^{l \times n}$ , le problème consistant à trouver toutes les matrices  $X \in \mathcal{A}^{m \times n}$  telles que  $AX = Y$  est résoluble.
  3. Un anneau  $\mathcal{A}$  est un *anneau de Cramer* si  $\mathcal{A}$  est à la fois un anneau de Cramer à gauche et à droite.
  4. Un anneau de Cramer est dit *effectif* si les systèmes linéaires  $AX = Y$  et  $XA = Y$  peuvent être résolus de manière effective.

**Remarque 6.1.1.** La notion d'anneau de Cramer effectif est équivalente à *un computational ring* au sens de Barakat et Lange-Hegermann [8, 132], ou encore à un anneau *fortement discret* au sens de Mines-Richman-Ruitenburg [123]

La résolution du système  $XA = Y$  se décompose en deux sous-problèmes que nous énonçons. Soient  $A \in \mathcal{A}^{m \times l}$  et  $Y \in \mathcal{A}^{n \times l}$  deux matrices fixées. On considère alors les problèmes suivants :

- **Problème de factorisation à gauche :** Déterminer s'il existe une matrice  $X_* \in \mathcal{A}^{n \times m}$  telle que  $X_*A = Y$ , et en calculer une si possible.  
Si une telle factorisation n'existe pas, alors le système linéaire inhomogène  $XA = Y$  n'admet aucune solution.

- **Problème du calcul du noyau à gauche** : Calculer le noyau à gauche de  $A$ , c'est-à-dire déterminer une matrice  $B \in \mathcal{A}^{p \times m}$  telle que

$$\ker_{\mathcal{A}}(.A) = \text{im}_{\mathcal{A}}(.B).$$

Si l'équation  $X A = Y$  admet une solution particulière  $X_{\star} \in \mathcal{A}^{n \times m}$ , alors l'ensemble des solutions de  $X A = Y$  est donné par :

$$\{X_{\star} + Q B \mid Q \in \mathcal{A}^{n \times p}\}.$$

Introduisons un troisième problème.

- **Problème du calcul d'un inverse à gauche** : Déterminer si la matrice  $A \in \mathcal{A}^{m \times l}$  admet un inverse à gauche, c'est-à-dire une matrice  $C \in \mathcal{A}^{l \times m}$  telle que  $C A = I_l$ , où  $I_l$  désigne la matrice identité de taille  $l \times l$ . Si un tel inverse existe, on souhaite également en calculer un.

Pour plus de détails, voir [8].

Notons que ces trois sous-problèmes ont leur problème équivalent énoncé « à droite » menant à l'étude du système linéaire  $A X = Y$ . Soient  $A \in \mathcal{A}^{l \times m}$  et  $Y \in \mathcal{A}^{l \times n}$  deux matrices fixées. On considère alors les trois problèmes suivants :

- **Problème de factorisation à droite** : Déterminer s'il existe une matrice  $X_{\star} \in \mathcal{A}^{m \times n}$  telle que  $A X_{\star} = Y$ , et en calculer une si possible. Si une telle factorisation n'existe pas, alors le système linéaire inhomogène  $A X = Y$  n'admet aucune solution.
- **Problème du calcul du noyau à droite** : Calculer le noyau à droite de  $A$ , c'est-à-dire déterminer une matrice  $B \in \mathcal{A}^{m \times p}$  telle que

$$\ker_{\mathcal{A}}(A.) = \text{im}_{\mathcal{A}}(B.).$$

Dans le cas où l'équation  $A X = Y$  admet une solution particulière  $X_{\star} \in \mathcal{A}^{m \times n}$ , l'ensemble des solutions s'écrit alors :

$$\{X_{\star} + B Q \mid Q \in \mathcal{A}^{p \times n}\}.$$

- **Problème du calcul d'un inverse à droite** : Déterminer si la matrice  $A \in \mathcal{A}^{l \times m}$  admet un inverse à droite, c'est-à-dire une matrice  $C \in \mathcal{A}^{m \times l}$  telle que  $A C = I_l$ , où  $I_l$  désigne la matrice identité de taille  $l \times l$ . Si c'est le cas, on cherche également à en calculer un.

**Remarque 6.1.2.** Notons que le problème du calcul d'un inverse à gauche (respectivement à droite) est un cas particulier du problème de factorisation à gauche (respectivement à droite) avec  $Y = I_l$ .

Comme évoqué précédemment dans ce mémoire, les équations matricielles  $A X = Y$ ,  $A B = 0$ , et  $A C = I_l$ , sont respectivement équivalentes aux équations  $\theta(X) \theta(A) = \theta(Y)$ ,  $\theta(B) \theta(A) = 0$  et  $\theta(C) \theta(A) = I_l$ , où  $\theta$  est l'involution de  $\mathbb{I}_1$  définie dans la proposition 2.2.7. Ainsi, nous avons le lemme suivant.

**Lemme 6.1.1.** *Si  $\mathcal{A} = \mathbb{I}_1$ , alors nous avons les équivalences suivantes.*

- *Le problème de factorisation à droite est résoluble si, et seulement si, le problème de factorisation à gauche est résoluble.*
- *Le problème du calcul du noyau à droite est résoluble si, et seulement si, le problème du calcul du noyau à gauche est résoluble.*
- *Le problème du calcul d'un inverse à droite est résoluble si, et seulement si, le problème du calcul d'un inverse à gauche est résoluble.*

Par conséquent, nous allons exclusivement étudier les problèmes précédents énoncés à gauche, tout en gardant en tête que leur résolution, dans le cas  $\mathcal{A} = \mathbb{I}_1$ , résout également leur version écrite à droite.

Dans la deuxième section, nous étudions le problème d'inverse à gauche. Dans la troisième section de ce chapitre nous nous intéressons au problème de factorisation. Pour cela, nous montrons que le problème de l'inverse à gauche (resp. à droite) et celui du calcul du noyau à gauche (resp. à droite) sont équivalents au problème de la factorisation à gauche (resp. à droite) et à celui du calcul du noyau à gauche (resp. à droite). Enfin, nous terminons avec une section sur les résolutions libres de modules et le calcul de modules d'extension. La propriété de Cramer effectif pour un anneau  $\mathcal{A}$  autorise une approche effective et algorithmique des méthodes d'algèbre homologique.

## 6.2 Calcul d'inverses à gauche

La proposition suivante donne une condition d'existence de l'inverse à gauche d'une matrice  $R$  de  $\mathbb{I}_1$  donnée. Il est à noter que si  $T \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$  est un inverse à droite de  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ , c'est-à-dire que  $RT = I_q$ , alors  $\theta(T)\theta(R) = I_q$ , donc  $\theta(T)$  est un inverse à gauche de  $\theta(R)$ .

**Proposition 6.2.1.** *Soit  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . Alors, avec les notations des chapitres précédents, nous avons l'équivalence suivante :*

$$R \text{ admet un inverse à gauche dans } \mathbb{I}_1 \iff \begin{cases} \bar{R} \text{ a un inverse à gauche dans } \mathbb{B}_1, \\ \phi : \begin{array}{ccc} \langle e \rangle^{1 \times q} & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times p} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda R \end{array} \text{ est une application surjective.} \end{cases}$$

*Démonstration.* On rappelle le diagramme suivant (voir section 5.2) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times q} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times q} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathbb{B}_1^{1 \times q} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cdot R & & \downarrow \cdot R & & \downarrow \bar{R} \\ 0 & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times p} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times p} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{B}_1^{1 \times p} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \kappa & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0. \end{array}$$

(une flèche orange  $\delta$  relie  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$  à  $\text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$ )

D'après la proposition 5.2.1, on a  $\delta = 0$  et donc la suite exacte courte de  $\mathbb{I}_1$ -modules à gauche suivante :

$$0 \longrightarrow \text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) \longrightarrow \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) \longrightarrow \text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) \longrightarrow 0.$$

Comme  $\mathbb{I}_1$  et  $\mathbb{B}_1$  sont des anneaux avec une unité,  $\text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) = 0$  (respectivement  $\text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = 0$ ) équivaut à  $R$  (respectivement  $\bar{R}$ ) admettant un inverse à gauche sur  $\mathbb{I}_1$  (respectivement  $\mathbb{B}_1$ ).

Détaillons cet argument pour  $\mathcal{A} = \mathbb{I}_1$  ou  $\mathbb{B}_1$  et  $1 = 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$  l'unité de  $\mathcal{A}$ .

Supposons  $\text{coker}_{\mathcal{A}}(.R) = \mathcal{A}^{1 \times p} / (\mathcal{A}^{1 \times q} R) = 0$ , alors,  $\mathcal{A}^{1 \times p} = \mathcal{A}^{1 \times q} R$ . Le vecteur  $e_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \in \mathcal{A}^{1 \times p}$  donc il existe  $u_1 \in \mathcal{A}^{1 \times q}$  tel que  $e_1 = u_1 R$ . De même, pour tout  $i = 1, \dots, p$ , il existe  $u_i \in \mathcal{A}^{1 \times q}$  tel que  $e_i = u_i R$ . Ainsi, en notant  $U \in \mathcal{A}^{p \times q}$  la matrice dont les lignes sont les  $u_i$ , nous avons  $UR = I_p$  et  $U \in \mathcal{A}^{p \times q}$  est un inverse à gauche de  $R$ . Réciproquement, si  $U \in \mathcal{A}^{p \times q}$  est un inverse à gauche, alors pour tout  $\mu \in \mathcal{A}^{1 \times p}$ , nous avons  $\mu = \mu U R \in \mathcal{A}^{1 \times q} R$ . Ainsi, nous avons l'égalité  $\mathcal{A}^{1 \times p} = \mathcal{A}^{1 \times q} R$  et  $\text{coker}_{\mathcal{A}}(.R) = 0$ .

Finalement, nous avons les équivalences suivantes :

$$\text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) = 0 \iff \begin{cases} \text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = 0, \\ \text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{R} \text{ a un inverse à gauche dans } \mathbb{B}_1, \\ \phi : \begin{array}{ccc} \langle e \rangle^{1 \times q} & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times p} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda R \end{array} \text{ surjective.} \end{cases}$$

En effet,  $\text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = 0$  est équivalent à  $\mathbb{B}_1^{1 \times p} = \mathbb{B}_1^{1 \times q} \bar{R}$ . Or, comme  $\mathbb{B}_1$  est un anneau, cela revient à dire que  $\bar{R}$  a un inverse à gauche. De même,  $\text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) = 0$  est équivalent à  $\langle e \rangle^{1 \times p} = \langle e \rangle^{1 \times q} R$ . En revanche, comme  $\langle e \rangle$  n'est pas un anneau, mais seulement un idéal bilatère, il n'a pas d'unité, ainsi  $\langle e \rangle^{1 \times p} = \langle e \rangle^{1 \times q} R$  implique seulement la surjectivité de l'application de  $\langle e \rangle^{1 \times q}$  dans  $\langle e \rangle^{1 \times p}$ , qui à  $\lambda \in \langle e \rangle^{1 \times q}$  associe  $\lambda R \in \langle e \rangle^{1 \times p}$ .  $\square$

Supposons que nous cherchions à vérifier si  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  admet un inverse à gauche à gauche. D'après la proposition 6.2.1, il nous faut vérifier la surjectivité de  $\phi$ . La proposition suivante permet de donner une caractérisation de la surjectivité de l'application  $\phi$ .

**Proposition 6.2.2.** *Soit  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . Notons*

$$\begin{array}{ccc} \phi : \langle e \rangle^{1 \times q} & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times p} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda R, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \psi : \mathbb{k}[t]^{q \times 1} & \longrightarrow & \mathbb{k}[t]^{p \times 1} \\ p(t) & \longmapsto & \theta(R)(p(t)) \end{array} .$$

Alors,  $\phi$  est surjective si, et seulement si,  $\psi$  l'est.

*Démonstration.* Soit l'équation  $\lambda R = \mu$ , avec  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  fixée,  $\mu \in \langle e \rangle^{1 \times p}$  et  $\lambda \in \langle e \rangle^{1 \times q}$ . Écrivons  $\lambda = \sum_{i=0}^n t^i e \lambda_i(\partial)$  et  $\mu = \sum_{i=0}^m t^i e \mu_i(\partial)$ , les formes normales de  $\mu$  et  $\lambda$ , avec  $\lambda_i \in \mathbb{k}[\partial]^{1 \times q}$  et  $\mu_i \in \mathbb{k}[\partial]^{1 \times p}$ . Alors, d'après les calculs de la section 5.3.1, nous avons

$$\sum_{i=0}^n \theta(R) (\check{\lambda}_i(t)^T) e i! \partial^k = \sum_{i=0}^m \check{\mu}_i(t)^T e i! \partial^k$$

puis,

$$\theta(R) (\check{\lambda}_i(t)^T) = \check{\mu}_i(t)^T, \quad i = 0, \dots, \min\{m, n\}.$$

Lorsque  $\mu$  décrit tout  $\langle e \rangle^{1 \times p}$ ,  $\sum_{i=0}^m \check{\mu}_i(t)^T e i! \partial^i$  décrit également tout  $\langle e \rangle^{1 \times p}$ . Donc  $\check{\mu}_i(t)^T$  décrit tout  $\mathbb{k}[t]^{p \times 1}$ . À l'inverse, si  $\mu_i(t)$  décrit tout  $\mathbb{k}[t]^{1 \times q}$ , alors  $\check{\mu}_i(t)^T$  décrit tout  $\mathbb{k}[t]^{p \times 1}$  et donc  $\mu$  décrit tout  $\langle e \rangle^{1 \times p}$ . Ainsi,  $\phi$  surjective équivaut à  $\psi$  surjective.  $\square$

**Exemple 6.2.1.** L'opérateur  $R = I$  admet un inverse à gauche puisque  $\partial I = 1$ .

On peut vérifier a posteriori que  $\theta(R) = \partial$  définit bien le morphisme surjectif

$$\begin{array}{ccc} \partial : \mathbb{k}[t] & \longrightarrow & \mathbb{k}[t] \\ p(t) & \longmapsto & p'(t), \end{array}$$

et que  $\bar{R} = \sigma^{-1}$  admet l'inverse à gauche  $\sigma$ . Ainsi, les deux conditions de la proposition 6.2.1 sont bien remplies.

**Exemple 6.2.2.** Considérons  $R = \partial$ . Alors, nous avons  $\theta(R) = I$ .

Le morphisme

$$\begin{array}{ccc} I : \mathbb{k}[t] & \longrightarrow & \mathbb{k}[t] \\ p(t) & \longmapsto & \int_0^t p(\tau) d\tau, \end{array}$$

n'est pas surjectif. En effet,  $1 \notin I(\mathbb{k}[t])$ . Ainsi,  $\partial$  n'admet pas d'inverse à gauche.

Fixons une matrice  $R$  à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ . À l'aide des résultats du chapitre 4 on peut tester les deux conditions d'existence d'un inverse à gauche données par la proposition 6.2.1, c'est-à-dire, tester si  $\bar{R}$  admet un inverse à gauche dans  $\mathbb{B}_1$  et tester si  $\phi$  est surjective. Quant à l'existence et le calcul de l'inverse de  $\bar{R}$  dans  $\mathbb{B}_1$ , ce sont des problèmes algorithmiquement résolus, car  $\mathbb{B}_1$  est isomorphe à  $\mathbb{L}_1$ , un anneau des polynômes de Laurent, qui est un anneau effectif. Voir [112, 60, 56] et la section 2.4.3.

La surjectivité de l'application  $\phi$  s'étudie par la résolution de l'équation  $FR = E$  avec  $E$  dans  $\langle e \rangle^{p \times p}$  fixée et  $F$  inconnue. C'est exactement l'objet des sections 5.3.1 et 5.3.2 et plus précisément de l'algorithme 12.

Considérons  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  une matrice de  $\mathbb{I}_1$  admettant un inverse à gauche que l'on souhaite calculer. On peut calculer sa classe  $\bar{R} \in \mathbb{B}_1^{q \times p}$ . Dans  $\mathbb{B}_1$ , on peut alors déterminer son inverse à gauche, noté  $\bar{S} \in \mathbb{B}_1^{p \times q}$ , que l'on sait exister d'après la proposition 6.2.1 puisque  $\bar{R}$  admet un inverse à gauche.

Si  $S$  est un relevé de  $\bar{S}$  dans  $\mathbb{I}_1$ , alors  $SR = I_p + E$  pour une certaine matrice  $E \in \langle e \rangle^{p \times p}$ . Comme  $R$  admet un inverse à gauche, toujours d'après la proposition 6.2.1, on sait qu'il existe une factorisation de  $E$  par  $R$  par une certaine matrice  $F \in \langle e \rangle^{p \times q}$ , c'est-à-dire satisfaisant  $FR = E$ .

Pour calculer une telle matrice  $F$ , on peut se référer aux sections 5.3.1 et 5.3.2 qui se basent sur le calcul des solutions polynomiales d'un système inhomogène rectangulaire de  $\mathbb{I}_1$  développée au chapitre 4. Notons que si  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ , alors  $\overline{R} = 0$  n'admet pas d'inverse à gauche dans  $\mathbb{B}_1$ . Ainsi, on peut se limiter au cas  $R \notin \langle e \rangle^{q \times p}$  et utiliser l'algorithme 12 pour le calcul de  $F$ .

Par conséquent, si  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  est une matrice de  $\mathbb{I}_1$  admettant un inverse à gauche et  $S$  est un relevé de  $\overline{S}$ , inverse à gauche de  $\overline{R}$  dans  $\mathbb{B}_1$ , alors  $SR = I_p + FR$ . D'après ce qui précède, on dispose de  $F \in \langle e \rangle^{p \times q}$  telle que  $E = FR$ . Ainsi,  $(S - F)R = I_p$  et  $S - F$  est un inverse à gauche de  $R$  dans  $\mathbb{I}_1$ .

Écrivons cette méthode à l'aide d'un algorithme.

---

**Algorithme 15** Calcul de l'inverse à gauche d'une matrice  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  (si possible)

---

**Entrée**  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ .

**Sortie** Une matrice  $C$  vérifiant  $CR = I_p$ , (si elle existe).

- 1: Calculer  $\overline{R}$  la classe de  $R$  dans  $\mathbb{B}_1$ .
  - 2: **Si**  $\overline{R}$  admet un inverse à gauche **alors**
  - 3:     Calculer  $\overline{S}$  un inverse à gauche de  $\overline{R}$ .
  - 4: **Sinon**
  - 5:     **Retourner** [].
  - 6: **fin Si**
  - 7: Soit  $S$  un relevé de  $\overline{S}$  dans  $\mathbb{I}_1$ . Calculer  $E = SR - I_p$ .
  - 8: **Si** il existe  $F \in \langle e \rangle^{p \times q}$  tel que  $E = FR$  **alors**
  - 9:     Calculer  $F \in \langle e \rangle^{p \times q}$  tel que  $E = FR$  grâce à l'algorithme 12.
  - 10:    **Retourner**  $S - F$ .
  - 11: **Sinon**
  - 12:    **Retourner** []
  - 13: **fin Si**
- 

**Exemple 6.2.3.** Prenons  $R = 1 + \gamma e$  avec  $\gamma \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$ . Nous avons  $\overline{R} = 1$  qui admet bien sur un inverse à gauche  $\overline{S} = 1$  dans  $\mathbb{B}_1$ . De plus,  $SR = 1 + \gamma e$ , c'est-à-dire,  $E = \gamma e$ . On remarque que  $\theta(R) = R$ . Étudions la surjectivité de

$$\begin{aligned} \theta(R) : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] \\ p(t) &\longmapsto p(t) + \gamma p(0). \end{aligned}$$

Nous avons  $\theta(R)(p(t)) = R(p(t)) = p(t) + \gamma p(0)$ . Notons  $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots$  alors nous avons :

$$\begin{aligned} \theta(R)(p(t)) &= \gamma p_0 + p_0 + p_1 t + \dots \\ &= (1 + \gamma) p_0 + p_1 t + \dots \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $\gamma \neq -1$ , l'endomorphisme  $\theta(R)$  de  $\mathbb{k}[t]$  est surjectif et donc  $R$  admet un inverse à gauche. Supposons que  $\gamma \neq -1$  et calculons un inverse à gauche de  $R$ . Nous résolvons ainsi l'équation  $FR = E$  avec  $E = \gamma e$ . Pour cela, il suffit de chercher un antécédent de  $\gamma$  par  $\theta(R)$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \theta(R)(p(t)) = R(p(t)) = \gamma e &\iff (1 + \gamma) p_0 + p_1 t + \dots = \gamma \\ &\iff \begin{cases} p_i = 0, & i \geq 1, \\ (1 + \gamma) p_0 = \gamma, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} p_i = 0, & i \geq 1, \\ p_0 = \frac{\gamma}{(1 + \gamma)}, \end{cases} \\ &\iff p(t) = \frac{\gamma}{(1 + \gamma)}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $F = \frac{\gamma}{(1+\gamma)} e$  et  $S' = S - F = 1 - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} e$  est un inverse à gauche de  $R$ . En effet, nous pouvons vérifier que

$$S' R = \left(1 - \frac{\gamma}{(1+\gamma)}\right) (1 + \gamma e) = 1 + \gamma e - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} e - \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} e = 1 + \frac{(\gamma^2 + \gamma) e - \gamma e - \gamma^2 e}{\gamma + 1} = 1.$$

**Exemple 6.2.4.** Étudions  $R = 1 + \mu t e \partial$ , avec  $\mu \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$ .

Comme précédemment, nous avons  $\bar{R} = 1$  qui admet  $\bar{S} = 1$  pour inverse à gauche dans  $\mathbb{B}_1$ . De plus,  $S R = 1 + \mu t e \partial$ , c'est-à-dire,  $E = \mu t e \partial$ . Par ailleurs, nous avons  $\theta(R) = R$  et

$$\begin{aligned} \theta(R) : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t] \\ p(t) &\longmapsto p(t) + \mu t p'(0). \end{aligned}$$

En notant  $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \theta(R)(p(t)) &= \mu t p_1 + p_0 + p_1 t + \dots \\ &= p_0 + (1 + \mu) p_1 t + p_2 t^2 + \dots \end{aligned}$$

Ainsi, l'application  $\theta(R)$  est surjective si, et seulement si,  $\mu \neq -1$ . En supposant donc que  $\mu \neq -1$ , nous pouvons calculer  $F \in \langle e \rangle$  tel que  $F R = E$  avec  $E = \mu t e \partial$ . Pour cela, on cherche un antécédent polynomial de  $\mu t$  par l'application  $\theta(R)$ . Nous avons ainsi,  $p(t) = \frac{\mu}{1+\mu} t$  et  $F = \frac{\mu}{1+\mu} t e \partial$ .

On en conclut que  $S' = S - F = 1 - \frac{\mu}{1+\mu} t e \partial$  est un inverse à gauche de  $R$ . En effet, nous avons :

$$S' R = \left(1 - \frac{\mu}{1+\mu} t e \partial\right) (1 + \mu t e \partial) = 1 + \mu t e \partial - \frac{\mu}{1+\mu} t e \partial - \frac{\mu^2}{1+\mu} t e \partial = 1.$$

Ces exemples, notamment les exemples 6.2.4 et 6.2.3 illustrent bien le théorème de [16] suivant :

**Théorème 6.2.1.** ([16, Corollaire 7.2, p. 520]) *Un élément  $a \in \mathbb{I}_1$  admet un inverse à gauche si, et seulement si,  $a = a' I^n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  et  $a' \in \mathbb{k} \setminus \{0\} + \langle e \rangle$  tel que l'endomorphisme  $\theta(a')$  de  $\mathbb{k}[t]$  dans  $\mathbb{k}[t]$  soit surjectif.*

Donnons maintenant quelques exemples matriciels d'application de l'algorithme 15.

**Exemple 6.2.5.** Soit  $R = \begin{pmatrix} I & t \\ 0 & I \end{pmatrix}$ . Calculons, s'il existe, un inverse à gauche. Nous avons :

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1} & (H-1)\sigma^{-1} \\ 0 & \sigma^{-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma - (H-1)\sigma \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \partial & -\partial - x \partial^2 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}.$$

On calcule le produit  $S R$  et on obtient :

$$S R = \begin{pmatrix} \partial & -\partial - x \partial^2 \\ 0 & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & t \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainsi,  $E = F = 0$  et  $S$  est un inverse à gauche de  $R$ .

**Exemple 6.2.6.** Considérons  $R = \begin{pmatrix} 1 & t e \\ e & I \end{pmatrix}$ , et calculons s'il existe un inverse à gauche. Nous avons :

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}.$$

Calculons le produit  $S R$ . Nous avons :

$$S R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t e \\ e & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_E.$$

On cherche  $F \in \langle e \rangle^{2 \times 2}$  tel que  $E = FR$ . À l'aide de notre implémentation *Bavula* dans *Maple* de l'algorithme 12, nous trouvons :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & te\partial \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $S - F$  est un inverse à gauche de  $R$  avec

$$S - F = \begin{pmatrix} 1 & -te\partial \\ 0 & \partial \end{pmatrix}.$$

### 6.3 Factorisation de matrices à coefficients dans $\mathbb{I}_1$

La section précédente explique, comment le calcul des solutions polynomiales d'un système intégral-différentiel, et plus particulièrement d'une solution particulière à un système de la forme  $E = FR$  avec  $F \in \langle e \rangle^{p \times q}$ , résout le problème d'inverse à gauche d'une matrice à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ .

De plus, le chapitre 5 résout le problème du calcul du noyau d'une matrice à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$  et donc du calcul des modules de syzygies d'un idéal de type fini de  $\mathbb{I}_1$ . La proposition suivante énonce le lien entre les problèmes de factorisation, de calcul d'inverse et de calcul de noyau.

**Proposition 6.3.1.** *Les problèmes d'inverse à gauche et de calcul de noyau à gauche sont résolubles si, et seulement si, les problèmes de factorisation à gauche et de calcul de noyau à gauche sont résolubles. De façon schématique, nous avons :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inverse à gauche} \\ + \\ \text{Calcul de noyau à gauche} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Factorisation à gauche} \\ + \\ \text{Calcul de noyau à gauche.} \end{array} \right.$$

*Démonstration.*  $\diamond$  Supposons que le problème de factorisation soit résoluble. D'après la remarque 6.1.2, le problème d'inverse à gauche est alors résoluble en tant que cas particulier. Ainsi, la résolution du problème de factorisation induit la résolution du problème d'inverse à gauche.

$\diamond$  Supposons maintenant que le problème d'inverse à gauche et de calcul de noyau soient résolubles. Montrons que le problème de factorisation est alors résoluble. Soient  $A \in \mathcal{A}^{m \times l}$  et  $Y \in \mathcal{A}^{n \times l}$  deux matrices, on cherche  $X_* \in \mathcal{A}^{n \times m}$  tel que  $X_* A = Y$ . Soient  $D_1 \in \mathcal{A}^{q \times n}$ ,  $D_2 \in \mathcal{A}^{q \times m}$  deux matrices telles que  $\ker_{\mathcal{A}} \left( \cdot \begin{pmatrix} Y \\ -A \end{pmatrix} \right) = \text{im}_{\mathcal{A}} (\cdot (D_1 \ D_2))$ , nous avons alors :

$$\begin{aligned} & X_* A = Y \\ \iff & (I_n \ X_*) \begin{pmatrix} Y \\ -A \end{pmatrix} = 0 \\ \iff & (I_n \ X_*) \mathcal{A}^{1 \times n} \subseteq \ker_{\mathcal{A}} \left( \cdot \begin{pmatrix} Y \\ -A \end{pmatrix} \right) \underbrace{=}_{\text{calcul de noyau}} \text{im}_{\mathcal{A}} (\cdot (D_1 \ D_2)), \quad D_1 \in \mathcal{A}^{q \times n}, D_2 \in \mathcal{A}^{q \times m} \\ \iff & \exists U \in \mathcal{A}^{n \times q}, \quad (I_n \ X_*) = U (D_1 \ D_2) \\ \iff & \exists U \in \mathcal{A}^{n \times q}, \quad \begin{cases} I_n = U D_1, & \text{calculable car on peut calculer un inverse à gauche} \\ X_* = U D_2, & \text{vérifiable par produit matriciel.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, cela montre qu'en sachant calculer un inverse à gauche et un noyau matriciel on peut en déduire le calcul d'une factorisation matricielle.  $\square$

Ainsi, d'après la proposition 6.3.1, disposant de l'algorithme 14 pour le calcul de noyau et de l'algorithme 15 pour le calcul d'inverse à gauche, on peut en déduire l'algorithme de factorisation suivant.

---

**Algorithme 16** Factorisation à gauche de  $Y \in \mathbb{I}_1^{n \times l}$  par  $A \in \mathbb{I}_1^{m \times l}$  (si possible)

---

**Entrée**  $A \in \mathbb{I}_1^{m \times l}$  et  $Y \in \mathbb{I}_1^{n \times l}$

**Sortie**  $X_*$  tel que  $X_* A = Y$ , si possible, sinon []

- 1: **Si**  $\ker_{\mathbb{I}_1} \left( \cdot \begin{pmatrix} Y^T & -A^T \end{pmatrix}^T \right) = 0$  **alors**
  - 2:     **Retourner** [ ]
  - 3: **Sinon**
  - 4:     Calculer  $D$  tel que  $\ker_{\mathbb{I}_1} \left( \cdot \begin{pmatrix} Y^T & -A^T \end{pmatrix}^T \right) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot D)$  (grâce à l'algorithme 14)
  - 5:     Écrire  $D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix}$  avec  $D_1 \in \mathbb{I}_1^{q \times n}$ ,  $D_2 \in \mathbb{I}_1^{q \times m}$
  - 6:     Tester si  $D_1$  admet un inverse à gauche avec l'algorithme 15
  - 7:     **Si**  $D_1$  admet un inverse à gauche **alors**
  - 8:         Calculer  $U$  un inverse à gauche de  $D_1$  (avec l'algorithme 15)
  - 9:         **Retourner**  $U D_2$
  - 10:     **Sinon**
  - 11:         **Retourner** [ ]
  - 12:     **fin Si**
  - 13: **fin Si**
- 

**Exemple 6.3.1.** Soit  $Y = e\partial + I$  un opérateur que l'on cherche à factoriser à gauche par  $A = \begin{pmatrix} \partial \\ I \end{pmatrix}$ .

En suivant les étapes de l'algorithme 16, nous écrivons la matrice

$$\begin{pmatrix} Y \\ -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\partial + I \\ -\partial \\ -I \end{pmatrix},$$

dont nous calculons le noyau grâce à l'algorithme 13.

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \ker_{\mathbb{I}_1} \left( \cdot \begin{pmatrix} Y \\ -A \end{pmatrix} \right) &= \ker_{\mathbb{I}_1} \left( \cdot \begin{pmatrix} e\partial + I \\ -\partial \\ -I \end{pmatrix} \right), \\ &= \text{im}_{\mathbb{I}_1} \left( \cdot \begin{pmatrix} I & & te & I \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 I - tIt + \frac{1}{2}It^2 & -I + \frac{1}{2}t^2 e\partial \end{pmatrix} \right), \\ &= \text{im}_{\mathbb{I}_1} \left( \cdot \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

avec  $D_1 = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $D_2 = \begin{pmatrix} te & I \\ \frac{1}{2}t^2 I - tIt + \frac{1}{2}It^2 & -I + \frac{1}{2}t^2 e\partial \end{pmatrix}$ .

Un inverse à gauche de  $D_1$  est alors  $U = (\partial \ 0)$ . Ainsi, nous obtenons

$$X_* = U D_2 = (\partial \ 0) \begin{pmatrix} te & I \\ \frac{1}{2}t^2 I - tIt + \frac{1}{2}It^2 & -I + \frac{1}{2}t^2 e\partial \end{pmatrix} = (e \ 1).$$

On vérifie bien que  $X_* A = Y$ .

**Exemple 6.3.2.** Factorisons  $Y = \begin{pmatrix} t^2 e + e\partial & t - te \\ t & \partial^2 + te \end{pmatrix}$  par la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & e \\ e & \partial \end{pmatrix}$ . Commençons par former la matrice  $(Y^T \ -A^T)^T w$  et calculons son noyau à gauche grâce à notre implémentation de l'algorithme 14 dans

le package `Bavula` du logiciel `Maple`. Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} Y \\ -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 e + e \partial & t - t e \\ t & \partial^2 + t e \\ -1 & -e \\ -e & -\partial \end{pmatrix}, \quad \ker_{\mathbb{I}_1} \left( \cdot \begin{pmatrix} Y \\ -A \end{pmatrix} \right) = \text{im}_{\mathbb{I}_1} (.D)$$

avec,

$$D = \begin{pmatrix} tI - It & 0 & \frac{1}{2} t^2 e \partial & \frac{1}{6} t^3 I - \frac{1}{2} t I t^2 + \frac{1}{3} I t^3 \\ 0 & \frac{1}{2} t^2 I + \frac{1}{2} I t^2 - t I t & -t I t^2 + \frac{1}{2} I t^3 + \frac{1}{2} t^2 I t & t I - I t - \frac{1}{2} t^2 e \end{pmatrix}.$$

On pose alors :

$$D_1 = \begin{pmatrix} tI - It & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} t^2 I + \frac{1}{2} I t^2 - t I t \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 e \partial & \frac{1}{6} t^3 I - \frac{1}{2} t I t^2 + \frac{1}{3} I t^3 \\ -t I t^2 + \frac{1}{2} I t^3 + \frac{1}{2} t^2 I t & t I - I t - \frac{1}{2} t^2 e \end{pmatrix}.$$

Avec notre implémentation de l'algorithme 15 dans `Bavula`, on trouve que  $D_1$  admet  $U$  pour inverse à gauche avec

$$U = \begin{pmatrix} \partial^2 & 0 \\ 0 & \partial^3 \end{pmatrix}.$$

Finalement on trouve,

$$X_\star = U D_2 = \begin{pmatrix} e \partial & t I \\ t & \partial \end{pmatrix},$$

et on peut vérifier que  $X_\star A = Y$ .

Les deux algorithmes 16 et 15 mènent au théorème suivant.

**Théorème 6.3.1.** *Si  $\mathbb{k}$  est un corps effectif, alors  $\mathbb{I}_1$  est un anneau de Cramer effectif.*

*Démonstration.* En utilisant l'involution  $\theta$  de  $\mathbb{I}_1$  définie en (2.2.7), on a

$$X A = Y \quad \Leftrightarrow \quad \theta(A) \theta(X) = \theta(Y),$$

ce qui ramène le problème à l'étude des systèmes linéaires inhomogènes de la forme  $X A = Y$ , avec  $A \in \mathbb{I}_1^{m \times l}$  et  $Y \in \mathbb{I}_1^{n \times l}$ . La propriété de cohérence de  $\mathbb{I}_1$  montre que  $\ker_{\mathbb{I}_1} (.A)$  est de type fini. La preuve algorithmique de la cohérence de  $\mathbb{I}_1$  vue au chapitre 5 (voir aussi l'algorithme 14) établit qu'une matrice  $B \in \mathbb{I}_1^{p \times m}$  satisfaisant  $\ker_{\mathbb{I}_1} (.A) = \text{im}_{\mathbb{I}_1} (.B)$  peut être calculée. Étudions maintenant comment tester l'existence d'une solution particulière  $X_\star \in \mathbb{I}_1^{m \times n}$ . Comme expliqué ci-dessus, cela équivaut à tester l'existence d'une factorisation  $X_\star \in \mathbb{I}_1^{n \times m}$  telle que  $X_\star A = Y$ . En utilisant le fait que la propriété de cohérence de  $\mathbb{I}_1$  est effective, ce dernier problème peut être ramené à tester l'existence d'une inverse à gauche d'une matrice  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . Le problème d'inverse à gauche étant effectif d'après la section 6.2 (voir aussi l'algorithme 15), cela conclut la preuve.  $\square$

## 6.4 Analyse algébrique sur $\mathbb{I}_1$

Le fait que  $\mathbb{I}_1$  soit un anneau de Cramer effectif ou *un computation ring* au sens de Barakat et Lange-Hegermann [8, 132], ou encore un anneau *fortement discret* au sens de Mines-Richman-Ruitenburg [123], permet de rendre les méthodes d'algèbre homologique effectivement calculables.

Maintenant que les problèmes de calcul du noyau et d'inverse à gauche/droite de matrices de  $\mathbb{I}_1$  sont rendus effectifs, nous pouvons calculer la résolution libre d'un  $\mathbb{I}_1$ -module à gauche de présentation finie.

L'intérêt principal d'une résolution libre d'un module réside dans sa capacité à décrire les relations algébriques intrinsèques entre les équations constituant un système intégro-différentiel. Plus précisément, elle permet d'exhiber les syzygies entre opérateurs, c'est-à-dire les relations structurelles cachées qui régissent l'interaction entre les équations du système. Cette approche permet d'extraire des informations sur la résolution de systèmes linéaires inhomogènes. Voir [135, Section 1.6] et ses références.

Par ailleurs, la résolution libre offre un cadre adapté pour l'étude des foncteurs homologiques tels que  $\text{Tor}$  et  $\text{Ext}$ , permettant ainsi de caractériser les obstructions à la résolution exacte du système.

### 6.4.1 Définition d'une résolution libre et raccourcissement de résolution finie

Définissons la notion de résolution libre d'un module.

**Définition 6.4.1.** Soit  $\mathcal{A}$  un anneau et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche. Une *résolution libre* de  $\mathcal{M}$  est une suite exacte de la forme :

$$\dots \mathcal{A}^{1 \times r_3} \xrightarrow{\cdot R_3} \mathcal{A}^{1 \times r_2} \xrightarrow{\cdot R_2} \mathcal{A}^{1 \times r_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{A}^{1 \times r_0} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

avec pour  $i \geq 1$ ,  $R_i \in \mathcal{A}^{r_i \times r_{i-1}}$  et  $\cdot R_i : \mathcal{A}^{1 \times r_i} \rightarrow \mathcal{A}^{1 \times r_{i-1}}$  le morphisme de  $\mathcal{A}$ -modules défini par  $(\cdot R_i)(\lambda) = \lambda R_i$ , pour tout  $\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times r_i}$ .

S'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{1 \times r_n} \xrightarrow{\cdot R_n} \dots \xrightarrow{\cdot R_3} \mathcal{A}^{1 \times r_2} \xrightarrow{\cdot R_2} \mathcal{A}^{1 \times r_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{A}^{1 \times r_0} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

alors la résolution libre est dite *finie de taille n*.

La proposition suivante a pour but d'énoncer comment à partir d'une résolution libre finie, autrement dit qui se termine, on peut, sous certaines conditions, réduire la taille de cette résolution.

**Proposition 6.4.1.** [145, Proposition 20 et Corollaire 21] Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module défini par la résolution libre finie :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{1 \times r_m} \xrightarrow{\cdot R_m} \mathcal{A}^{1 \times r_{m-1}} \xrightarrow{\cdot R_{m-1}} \dots \xrightarrow{\cdot R_2} \mathcal{A}^{1 \times r_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{A}^{1 \times r_0} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

1. Si  $m \geq 3$  et s'il existe une matrice  $S_m \in \mathcal{A}^{r_{m-1} \times r_m}$  tel que  $R_m S_m = I_{r_m}$ , alors  $\mathcal{M}$  admet la résolution libre plus courte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{1 \times r_{m-1}} \xrightarrow{\cdot T_m} \mathcal{A}^{1 \times (r_{m-2} + r_{m-1})} \xrightarrow{\cdot T_{m-2}} \mathcal{A}^{1 \times r_{m-3}} \xrightarrow{\cdot R_{m-3}} \dots \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{A}^{1 \times r_0} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

avec les notations

$$\begin{cases} T_{m-1} &= (R_{m-1} \ S_m) \in \mathcal{A}^{r_{m-1} \times (r_{m-2} + r_m)}, \\ T_{m-2} &= \begin{pmatrix} R_{m-2} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^{(r_{m-2} + r_m) \times (r_{m-3})}. \end{cases}$$

2. Si  $m = 2$  et s'il existe  $S_2 \in \mathcal{A}^{r_1 \times r_2}$  telle que  $R_2 S_2 = I_{r_2}$ , alors  $\mathcal{M}$  admet la résolution libre plus courte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{1 \times r_1} \xrightarrow{\cdot T_1} \mathcal{A}^{1 \times (r_0 + r_2)} \xrightarrow{\tau} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

avec  $T_1 = (R_1 \ S_2) \in \mathcal{A}^{r_1 \times (r_0 + r_2)}$  et

$$\begin{aligned} \tau = \pi \oplus 0 : \mathcal{A}^{1 \times (r_0 + r_2)} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) &\longmapsto \tau(\lambda) = \pi(\lambda_1). \end{aligned}$$

**Remarque 6.4.1.** Dans le cas 2 de la proposition 6.4.1, on a :

$$\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathcal{A}}(\cdot R_1) = \mathcal{A}^{1 \times r_0} / (\mathcal{A}^{1 \times r_1} R_1) \cong \text{coker}_{\mathcal{A}}(\cdot T_1) = \mathcal{A}^{1 \times r_0 + r_2} / (\mathcal{A}^{1 \times r_1} T_1).$$

Du point de vue des systèmes, nous avons d'un côté le système  $R_1 \eta = 0$  défini par  $R_1$ , et de l'autre, le système  $R_1 \xi_1 + S_2 \xi_2 = 0$  défini par  $T_1$ . D'après la proposition 6.4.1, ces deux systèmes sont isomorphes. Montrons ce point par un calcul direct.

En appliquant  $R_2$  à gauche du second système, nous obtenons  $(R_2 R_1 \xi_1 + R_2 S_2 \xi_2) = 0$ . Or,  $R_2 R_1 = 0$  et  $R_2 S_2 = I_{r_2}$ . Ainsi, nous obtenons  $\xi_2 = 0$  et  $R_1 \xi_1 = 0$ .

**Exemple 6.4.1.** Prenons  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1$  et considérons la matrice  $R_1$  suivante :

$$R_1 = \begin{pmatrix} \partial \\ \partial^2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne  $R_2 = (\partial \quad -1)$  comme matrice génératrice du noyau.

Ainsi,  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.R_1) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.R_2)$ . Par ailleurs,  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.R_2) = 0$  donc nous avons la résolution libre finie suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{A}_1^{1 \times 1} \xrightarrow{.R_2} \mathbb{A}_1^{1 \times 2} \xrightarrow{.R_1} \mathbb{A}_1 \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Avec les notations de la proposition 6.4.1, nous avons  $r_1 = 2$  et  $r_2 = 1$ .

Poursuivons l'exemple. La matrice  $R_2$  admet un inverse à droite  $S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Nous pouvons alors définir la matrice  $T_1$  de la façon suivante :

$$T_1 = \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ \partial^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 6.4.1, on a alors la résolution libre courte de  $\mathcal{M}$  suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{A}_1^{1 \times 2} \xrightarrow{.T_1} \mathbb{A}_1^{1 \times (1+1)} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0. \quad (6.1)$$

La matrice  $T_1$  n'admet pas d'inverse à droite, voir la section 2.4.2. Nous ne pouvons donc pas réduire davantage la suite exacte (6.1).

Ainsi, pour calculer une résolution d'un  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{M}$  de présentation finie nous avons besoin de savoir calculer des noyaux de matrices à coefficients dans  $\mathcal{A}$ . De plus, pour réduire une résolution finie nous avons besoin de calculer des inverses à droite. Ces deux problèmes sont maintenant effectifs sur  $\mathbb{I}_1$ , on peut ainsi calculer une résolution libre.

## 6.4.2 Calcul de résolution libre et résolutions libres finies de $\mathbb{I}_1$ -modules

### 6.4.2.1 Comparaison des méthodes des chapitres 3 et 5 pour le calcul de noyau d'une matrice $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$

Cette section a pour objectif de souligner une différence importante entre les méthodes de calcul du noyau d'une matrice  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$  des chapitres 3 et 5 utile pour le calcul de résolutions libres finies de  $\mathbb{I}_1$ -modules. Rappelons les deux algorithmes correspondants à ces deux méthodes.

---

**Algorithme 5** Calcul de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  avec  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$

---

**Entrée**  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ .

**Sortie** Matrice  $G$  telle que  $R \in \langle e \rangle^{q \times p} = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.G)$ .

- 1: Écrire  $R = \sum_{k=0}^n R_k(t) e \partial^k$ .
- 2: Calculer  $m := \max_{k \in [0, n]} \deg_t R_k$ .
- 3: Calculer la matrice  $C$  associée à  $R$  définie par

$$C = \begin{pmatrix} R_0 & \dots & R_n \\ \vdots & & \vdots \\ R_0^{(m+1)} & \dots & R_n^{(m+1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{q(m+2) \times p(n+1)}.$$

- 4: Calculer  $D$  tel que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$ .
- 5: Poser  $J$  la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} I_q \\ I_q \partial \\ \vdots \\ I_q \partial^{m+1} \end{pmatrix}.$$

- 6: Calculer  $G = DJ$ .
  - 7: **Retourner**  $G$ .
-

---

**Algorithme 14** Ensemble fini de générateurs de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  pour  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$

---

**Entrée**  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ .

**Sortie** Matrice dont les lignes forment un ensemble générateur de  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ .

- 1: Calculer  $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  tel que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\overline{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\overline{L})$ .
- 2: Calculer  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  tel que  $ER = LR$  (grâce à l'algorithme 11).
- 3: Calculer  $P = \theta(R) \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$ .
- 4: Calculer le plus petit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$ .
- 5: Calculer  $Q \in \mathbb{A}_1^{q \times n}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P_N.) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q.)$ .
- 6: Calculer  $G \in \mathbb{I}_1^{n \times r}$  tel que  $\overline{\theta(Q)} = \overline{GL}$ .
- 7: Calculer  $F = \theta(Q) - G(L - E) \in \langle e \rangle^{n \times q}$ .
- 8: Calculer  $P' \in \mathbb{A}_1^{p' \times q}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P')$ .
- 9: Calculer  $M' \in \mathbb{A}_1^{q' \times p'}$  tel que  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.M')$ .
- 10: Calculer  $P'' \in \mathbb{A}_1^{p \times p'}$  tel que  $P_N = P'' P'$ .
- 11: Calculer  $H := (M'^T P''^T)^T$ .
- 12: Calculer  $u_g \in \mathbb{k}[t]^{p' \times 1}$  la solution générale de  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H \bullet) = \{v \in \mathbb{k}[t]^{p' \times 1} \mid H(v) = 0\}$ .
- 13: Calculer  $T' \in \mathbb{A}_1^{q \times p'}$  un inverse généralisé de  $P'$ , c'est-à-dire, une matrice vérifiant  $P' T' P' = P'$ .
- 14: Calculer une base  $\{M_i\}_{i=1, \dots, m}$  de l'espace vectoriel

$$\mathcal{E} = \left\{ e \widehat{u}_g^T(\partial) \theta(T') + e \widehat{s}(\partial)^T F \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1} (T_{N-1} P Q)(s) = -(T_{N-1} P T')(u_g) \right\}.$$

- 15: **Retourner**  $\left( (L - E)^T \quad M_1^T \quad \dots \quad M_m^T \right)^T$ .
- 

Appliquons maintenant ces deux algorithmes sur le cas simple, mais instructif  $R = e$ .

**Proposition 6.4.2.** Soit  $R = e \in \langle e \rangle^{1 \times 1}$ . Alors :

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(. \partial) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(. (1 - e)).$$

*Démonstration.* Appliquons les deux méthodes de recherche de noyau à  $R = e$ .

◊ Avec l'algorithme 5, nous avons  $R = 1 e$  ainsi :

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = (0 \quad 1), \quad J = \begin{pmatrix} 1 \\ \partial \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous avons  $G = D J = \partial$  et  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(. \partial)$ .

◊ Appliquons maintenant l'algorithme 14 à  $R = 1 e$ . Nous avons :

$$\overline{R} = 0, \quad \overline{L} = 1, \quad L = 1.$$

Comme  $L R = e = e^2$ , nous avons de plus  $E = e$  et  $L' = 1 - e$ . Soit  $v \in \mathbb{k}[t]$  une solution polynomiale de  $\theta(R) = \theta(e) = e$ . Nous avons  $P_1 = \partial \theta(R) = 0$ . Ainsi, nous avons  $Q = 1$  et la paramétrisation  $v(t) = Q(s(t))$  induit  $v(t) = s(t)$  libre. Par ailleurs, nous avons :

$$\theta(Q) = 1, \quad \overline{\theta(Q)} = 1, \quad \overline{\theta(G)} = 1, \quad G = 1, \quad F = e.$$

Enfin,  $\theta(R)(v(t)) = \theta(R)(s(t)) = 0$  implique  $s(0) = 0$  et donc  $s(t) = t r(t)$  pour  $r \in \mathbb{k}[t]$ . On en conclut :

$$e \widehat{s}(\partial) F = e \widehat{r}(\partial) \partial e = 0, \quad \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.L') = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(. (1 - e)).$$

□

**Remarque 6.4.2.** On peut prouver l'égalité  $\mathbb{I}_1 \partial = \mathbb{I}_1 (1 - e)$  par double inclusion. En effet, nous avons  $I \partial = 1 - e$  donc  $\mathbb{I}_1 \partial \subset \mathbb{I}_1 (1 - e)$  et  $\partial(1 - e) = \partial$  donc  $\mathbb{I}_1 (1 - e) \subset \mathbb{I}_1 \partial$ .

### 6.4.2.2 Exemples de calcul de résolution libre de $\mathbb{I}_1$ -modules

Cette section contient des exemples de calcul de résolution libres de  $\mathbb{I}_1$ -modules et illustre comment le choix présenté dans la section 6.4.2.1 permet d'obtenir, dans certains cas, une résolution libre finie à partir d'une résolution libre infinie cyclique.

**Exemple 6.4.2.** Considérons maintenant la matrice  $R_1 = I \in \mathbb{I}_1$  et le module  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(\cdot R_1)$  dont on veut calculer une résolution, si possible finie. En utilisant l'algorithme 14, nous obtenons  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot I) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot e)$  et  $R_2 = e$ , puis  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot e) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot (1-e))$  et  $R_3 = 1-e$ . En utilisant à nouveau l'algorithme 14, nous obtenons  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot (1-e)) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot e)$ .

Nous obtenons ainsi la résolution infinie cyclique suivante :

$$\dots \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot(1-e)} \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot e} \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot(1-e)} \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot e} \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot I} \mathbb{I}_1 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Remarquons que  $R_2 = e \in \langle e \rangle$ . Ainsi, plutôt que d'utiliser l'algorithme 14 pour calculer son noyau, nous pouvons utiliser l'algorithme 5 et, d'après la proposition 6.4.2, obtenir  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R_2) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot \partial)$  et  $\tilde{R}_3$ . Nous avons alors  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot \tilde{R}_3) = \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot \partial) = 0$ .

Ainsi,  $\mathcal{M}$  admet la résolution finie suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot \tilde{R}_3} \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot R_2} \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot R_1} \mathbb{I}_1 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

**Remarque 6.4.3.** Lorsque la matrice  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  appartient à l'idéal  $\langle e \rangle^{q \times p}$ , le choix de l'algorithme 5 plutôt que l'algorithme 14 permet d'obtenir des résolutions finies. En effet, la sortie de l'algorithme 5 est une matrice différentielle, c'est-à-dire une matrice à coefficients dans  $\mathbb{A}_1$ , elle admet donc une résolution finie.

Illustrons à nouveau la remarque 6.4.3 par un exemple matriciel.

**Exemple 6.4.3.** Calculons une résolution libre du module  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(\cdot R_1)$ , avec  $R_1 = \begin{pmatrix} I & I^2 \\ t & t^2 e \end{pmatrix}$ . Avec notre implémentation Bavula basée sur l'algorithme 14, nous trouvons :

$$R_2 = \begin{pmatrix} -4e\partial^2 & 2e\partial^2 \\ -e\partial & e\partial \\ e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1-e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-e \end{pmatrix} = (1-e)I_4, \quad R_4 = eI_4.$$

À nouveau, nous trouvons une résolution de  $\mathcal{M}$  infinie cyclique. Remarquons maintenant que  $R_2 \in \langle e \rangle^{4 \times 2}$ . Supposons que l'on applique l'algorithme 5 à  $R_2$ . On écrit,

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e\partial + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e\partial^2,$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors  $D = (0_4 \quad I_4)$  tel que  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot D)$ , où  $0_4$  désigne la matrice nulle de taille  $4 \times 4$ . On trouve ainsi  $\tilde{R}_3 = I_4 \partial$  est telle que  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R_2) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot \tilde{R}_3)$  et  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot \tilde{R}_3) = 0$ . Ainsi, nous avons la résolution libre finie suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{I}_1^{1 \times 4} \xrightarrow{\cdot \tilde{R}_3} \mathbb{I}_1^{1 \times 4} \xrightarrow{\cdot R_2} \mathbb{I}_1^{1 \times 2} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathbb{I}_1^{1 \times 2} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Intéressons-nous maintenant à la matrice  $\tilde{R}_3 = I_4 \partial$ . Elle admet un inverse à droite  $T_3 = I_4 I$ , car nous avons  $\partial I = 1$ . En notant  $\tilde{R}_2 = (R_2 \ T_3)$ , c'est-à-dire

$$\tilde{R}_2 = \begin{pmatrix} -4e\partial & e\partial & I & 0 & 0 & 0 \\ -e\partial & e\partial & 0 & I & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

D'après la proposition 6.4.1, en posant  $\tilde{R}_1 = (R_1 \ 0_4)^T$ , nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{I}_1^{1 \times 4} \xrightarrow{\cdot \tilde{R}_2} \mathbb{I}_1^{1 \times 6} \xrightarrow{\cdot \tilde{R}_1} \mathbb{I}_1^{1 \times 2} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0. \quad (6.2)$$

Il est légitime de se demander si  $\tilde{R}_2$  admet un inverse à droite pour recommencer le processus. Grâce à notre implémentation `Bavula`, nous pouvons vérifier que  $\tilde{R}_2$  n'admet pas d'inverse à droite. Ainsi, la suite exacte (6.2) est de longueur minimale.

Notons que dans l'exemple 6.4.3, nous avons pu trouver une résolution libre finie en changeant d'algorithme pour le calcul de la matrice  $R_2$ . Cette solution n'est pas toujours possible comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 6.4.4.** Considérons  $R_1 = \begin{pmatrix} t\partial \\ t^2 e \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(\cdot R_1)$ . À l'aide de notre implémentation `Bavula`, on obtient :

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & I - \frac{1}{6}t^3 e \partial^2 \\ e & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 - e \\ 6e\partial^3 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 - e & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - e \\ e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}, \quad R_6 = R_4.$$

Ici, un cycle infini se crée avec les matrices  $R_4$  et  $R_5$ . Néanmoins, ni  $R_4$ , ni  $R_5$  n'est une matrice à coefficients dans  $\langle e \rangle$  à qui l'on peut appliquer l'algorithme 5. Cet exemple est donc une perspective d'approfondissement pour un travail futur. En effet, il serait intéressant de savoir si  $\mathcal{M}$  admet ou non une résolution finie et, si tel est le cas, comment la calculer.

### 6.4.3 Calcul de modules d'extension

Nous introduisons la notion de *module d'extension* ([135, p. 15]).

Soient  $\mathcal{A}$  un anneau et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche. On peut penser à  $\mathcal{F} = \mathbb{k}[t]$  et  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1$  ou  $\mathbb{I}_1$ . De plus, soit  $R_1$  une matrice de  $\mathcal{A}^{r_0 \times r_1}$  définissant le système inhomogène  $R_1 \cdot \eta = \xi$  pour un  $\xi \in \mathcal{F}^{r_0 \times 1}$  fixé et  $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{1 \times r_1} / \mathcal{A}^{1 \times r_0} R_1$  le module associé.

Les conditions de compatibilités de ce système sont  $R_2 \cdot \xi = 0$  avec  $R_2$  une matrice définissant le noyau à gauche de  $R_1$ , c'est-à-dire,  $\ker_{\mathcal{A}}(\cdot R_1) = \text{im}_{\mathcal{A}}(\cdot R_2)$ . Cela signifie qu'une condition nécessaire pour que le système  $R_1 \cdot \eta = \xi$  admette des solutions est  $R_2 \cdot \xi = 0$ . On cherche maintenant à savoir dans quel cas cette condition est suffisante.

Expliquons pourquoi il nous faut étudier le défaut d'exactitude du complexe suivant

$$\mathcal{F}^{r_2} \xleftarrow{\cdot R_2 \cdot} \mathcal{F}^{r_1} \xleftarrow{\cdot R_1 \cdot} \mathcal{F}^{r_0} \quad (6.3)$$

avec  $R_i \cdot \eta = R_i(\eta)$  pour  $i = 1, 2$ .

Pour  $\xi \in \mathcal{F}^{r_0}$  fixé, il existe un  $\eta \in \mathcal{F}^{r_1}$  tel que  $R_1(\eta) = \xi$  si, et seulement si,  $\xi \in \text{im}_{\mathcal{F}}(R_1 \cdot)$  et  $\xi \in \ker_{\mathcal{F}}(R_2 \cdot)$  d'après les conditions de compatibilités ( $R_2 R_1 = 0$ ). Ainsi, il existe  $\eta \in \mathcal{F}^{r_0}$  solution du système  $R_1(\eta) = \xi$  si, et seulement si, la classe de  $\xi$  dans  $\ker_{\mathcal{F}}(R_2 \cdot) / \text{im}_{\mathcal{F}}(R_1 \cdot)$  est nulle. Cela explique pourquoi le défaut d'exactitude du

complexe (6.3) en  $\mathcal{F}^{r_1}$  joue un rôle important. Ainsi, si le défaut d'exactitude est nul alors  $\ker_{\mathcal{F}}(R_2 \bullet) = \text{im}_{\mathcal{F}}(R_1 \bullet)$  et la condition  $R_2(\xi) = 0$  est suffisante.

De manière similaire, définissons les défauts d'exactitude de degré supérieur d'un complexe.

**Définition 6.4.2.** ([135, p. 17]) Soient  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathcal{A}}(R_1)$  un module de présentation finie et le complexe de  $\mathcal{A}$ -modules suivant

$$\dots \xleftarrow{R_{i+1} \bullet} \mathcal{F}^{r_i} \xleftarrow{R_i \bullet} \dots \xleftarrow{R_2 \bullet} \mathcal{F}^{r_1} \xleftarrow{R_1 \bullet} \mathcal{F}^{r_0} \xleftarrow{\quad} 0,$$

avec  $R_i \bullet \eta = R_i(\eta)$  pour tout  $i$ . On définit alors :

$$\begin{cases} \text{ext}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{F}) & \cong \ker_{\mathcal{F}}(R_1 \bullet) \\ \text{ext}_{\mathcal{A}}^i(\mathcal{M}, \mathcal{F}) & \cong \ker_{\mathcal{F}}(R_{i+1} \bullet) / \text{im}_{\mathcal{F}}(R_i \bullet), \quad i \geq 1. \end{cases}$$

**Remarque 6.4.4.** Cette définition est bien posée, car  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^i(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  ne dépend que du module à gauche  $\mathcal{M}$  et non pas du choix d'une résolution. Voir, par exemple, [166, Proposition 6.40, p. 365].

Un cas particulier important de calcul de modules d'extension est le cas  $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ . Considérons maintenant notre contexte  $\mathcal{A} = \mathbb{I}_1$ . D'après la définition 6.4.2, nous avons  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \cong \ker_{\mathcal{F}}(R_1 \bullet) = \ker_{\mathcal{A}}(R_1 \bullet) = \ker_{\mathbb{I}_1}(R_1 \bullet)$ . Or, grâce à notre algorithme 13, nous pouvons caractériser  $\ker_{\mathbb{I}_1}(R_1 \bullet)$ . Ainsi, le calcul du module d'extension  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{A})$  revient au calcul du noyau  $\ker_{\mathcal{A}}(R_1 \bullet)$ .

Intéressons-nous maintenant au calcul de  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^i(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \cong \ker_{\mathcal{A}}(R_{i+1} \bullet) / \text{im}_{\mathcal{A}}(R_i \bullet)$ . Alors, toujours avec un notre algorithme de calcul des syzygies 13, nous pouvons calculer une matrice  $R'_i$  telle que  $\ker_{\mathcal{A}}(R_{i+1} \bullet) = \text{im}_{\mathcal{A}}(R'_i \bullet)$ . Ainsi, calculer le quotient  $\ker_{\mathcal{A}}(R_{i+1} \bullet) / \text{im}_{\mathcal{A}}(R_i \bullet) = \text{im}_{\mathcal{A}}(R'_i \bullet) / \text{im}_{\mathcal{A}}(R_i \bullet)$  revient à calculer, si elle existe, une factorisation de la forme  $R'_i = R_i F_i$  avec  $F_i$  une matrice à coefficients dans  $\mathcal{A}$ . Ainsi, dans notre cadre  $\mathcal{A} = \mathbb{I}_1$ , cette factorisation peut-être calculée, si elle existe, grâce à l'algorithme 16.

Une perspective de recherche future consiste à savoir si le théorème 2.3.3 se généralise au cas de  $\mathcal{A} = \mathbb{I}_1$  qui est un anneau non noethérien et non intègre. Néanmoins, un «  $\mathbb{I}_1$ -module de torsion » n'est pas bien défini car  $\mathbb{I}_1$  est un anneau avec des diviseurs de 0. Les deux exemples suivants ont pour but de comparer, pour un  $\mathbb{I}_1$ -module  $\mathcal{M}$  donné, la quantité  $\text{ext}_{\mathbb{I}_1}^1(T(\mathcal{M}), \mathbb{I}_1)$  à la liberté de  $\mathcal{M}$ . Cela offre également des exemples explicite de calcul de modules d'extension et de résolutions libres dans le cas  $\mathcal{A} = \mathbb{I}_1$ .

**Exemple 6.4.5.** Notons  $R = R_1 = \partial$  et  $\mathcal{M} = \mathbb{I}_1 / (\mathbb{I}_1 \partial)$ .

Appliquons l'algorithme 14 pour calculer  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\partial)$ . La classe de  $\partial$  dans  $\mathbb{B}_1$  est  $\sigma$  et  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\sigma) = 0$ , car  $\sigma$  est inversible dans  $\mathbb{B}_1$ . Étudions les solutions polynomiales de  $\theta(\partial) = I$ . Soit  $p(t) \in \mathbb{k}[t]$  alors  $I(p(t)) = 0$  implique  $\partial I(p(t)) = p(t) = 0$ , car  $\partial I = 1$ . Ainsi, nous avons  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\partial) = 0$ .

Nous avons ainsi la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{I}_1 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

En la transposant nous avons alors :

$$0 \longleftarrow T(\mathcal{M}) \longleftarrow \mathbb{I}_1 \xleftarrow{\partial} \mathbb{I}_1,$$

où  $T(\mathcal{M})$  est le transposé d'Auslander de  $\mathcal{M}$ , voir section 2.3.2, définition A.1.17.

Grâce à notre implémentation `Bavula`, nous calculons  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\partial) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(e)$ ,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(e) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(I)$  et  $\ker_{\mathbb{I}_1}(I) = 0$ . Finalement, nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \longleftarrow T(\mathcal{M}) \longleftarrow \mathbb{I}_1 \xleftarrow{\partial} \mathbb{I}_1 \xleftarrow{e} \mathbb{I}_1 \xleftarrow{I} \mathbb{I}_1 \longleftarrow 0.$$

En dualisant cette suite exacte de  $\mathbb{I}_1$ -modules, nous obtenons le complexe de  $\mathbb{I}_1$ -modules à gauche suivant :

$$0 \longleftarrow \mathbb{I}_1 \xleftarrow{I} \mathbb{I}_1 \xleftarrow{e} \mathbb{I}_1 \xleftarrow{\partial} \mathbb{I}_1 \longleftarrow 0.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{cases} \text{ext}_{\mathbb{I}_1}^0(T(\mathcal{M}), \mathbb{I}_1) = \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot\partial) = 0 \\ \text{ext}_{\mathbb{I}_1}^1(T(\mathcal{M}), \mathbb{I}_1) \cong \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot e) / \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot\partial) \cong \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot\partial) / \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot\partial) = 0 \\ \text{ext}_{\mathbb{I}_1}^2(T(\mathcal{M}), \mathbb{I}_1) \cong \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot I) / \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot e) \cong \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot e) / \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot e) = 0 \\ \text{ext}_{\mathbb{I}_1}^3(T(\mathcal{M}), \mathbb{I}_1) \cong \mathbb{I}_1 / (\mathbb{I}_1 I) = 0. \end{cases}$$

La dernière égalité vient du fait que  $I$  admet un inverse à gauche  $\partial$ . Ainsi, nous avons  $\partial I = 1$  et  $\mathbb{I}_1 I = \mathbb{I}_1$ .

De plus, puisque  $\partial I = 1$ , nous avons la suite exacte courte scindée suivante

$$0 \longrightarrow \mathbb{I}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot\partial} \\ \xleftarrow{I} \end{array} \mathbb{I}_1 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, nous avons  $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_1 \oplus \mathcal{M}$ , donc  $\mathcal{M}$  est stablement libre donc projectif et en particulier sans torsion (voir le théorème 2.3.2).

**Exemple 6.4.6.** Considérons  $R = (I^2 \quad -I)$  et  $\mathcal{M} = \mathbb{I}_1^{1 \times 2} / (\mathbb{I}_1 R)$ . Calculons  $\text{ext}_{\mathbb{I}_1}^1(T(\mathcal{M}), \mathbb{I}_1)$ . Nous avons la suite exacte suivante,

$$\mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot R} \mathbb{I}_1^{1 \times 2} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

que nous dualisons, pour obtenir

$$0 \longleftarrow T(\mathcal{M}) \longleftarrow \mathbb{I}_1 \xleftarrow{\cdot R} \mathbb{I}_1^{1 \times 2}.$$

Par ailleurs, nous calculons  $\ker_{\mathbb{I}_1}((I^2 \quad -I) \cdot) = \text{im}_{\mathbb{I}_1} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ I \end{pmatrix} \cdot \right)$ . Ainsi, nous pouvons prolonger la suite exacte précédente et, en posant  $T = \begin{pmatrix} 1 \\ I \end{pmatrix}$ , nous avons :

$$0 \longleftarrow T(\mathcal{M}) \longleftarrow \mathbb{I}_1 \xleftarrow{\cdot R} \mathbb{I}_1^{1 \times 2} \xleftarrow{\cdot T} \mathbb{I}_1.$$

En dualisant à nouveau, nous obtenons le complexe suivant :

$$\mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot R} \mathbb{I}_1^{1 \times 2} \xrightarrow{\cdot T} \mathbb{I}_1.$$

Enfin, on calcule  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot T) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot (I \quad -1))$ . Par conséquent, nous avons :

$$\text{ext}_{\mathbb{I}_1}^1(T(\mathcal{M}), \mathbb{I}_1) = \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot T) / \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) = \left( \mathbb{I}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ I \end{pmatrix} \right) / (\mathbb{I}_1 (I^2 \quad -I)) = (\mathbb{I}_1 (I \quad -1)) / (\mathbb{I}_1 (I^2 \quad -I)).$$

De plus,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot (I \quad -1)) = 0$  et  $(I^2 \quad -I) = I (I \quad -1)$ . Nous en concluons :

$$\text{ext}_{\mathbb{I}_1}^1(T(\mathcal{M}), \mathbb{I}_1) = (\mathbb{I}_1 (I \quad -1)) / (\mathbb{I}_1 (I^2 \quad -I)) \cong \mathbb{I}_1 / \mathbb{I}_1 I.$$

Enfin, comme  $I$  admet un inverse à gauche  $\partial$ , cela implique  $\mathbb{I}_1 / \mathbb{I}_1 I = 0$ . Finalement

$$\text{ext}_{\mathbb{I}_1}^1(T(\mathcal{M}), \mathbb{I}_1) = 0.$$

Montrons maintenant que  $\mathcal{M}$  est un module libre.

L'application qui à  $\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2) \in \mathbb{I}_1^{1 \times 2}$  associe  $\lambda T \in \mathbb{I}_1$  est surjective. En effet, soit  $\mu \in \mathbb{I}_1$ , le vecteur  $\nu = (\mu \quad 0)$  vérifie  $\nu \theta(T) = \mu$ . De plus, en posant  $Q = (I \quad -1)$ , nous avons  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot Q) = 0$ . Ainsi, nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\cdot Q} \mathbb{I}_1^{1 \times 2} \xrightarrow{\cdot T} \mathbb{I}_1 \longrightarrow 0.$$

Nous pouvons alors construire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{I}_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot Q} \\ \xleftarrow{\cdot S_2} \end{array} & \mathbb{I}_1^{1 \times 2} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\cdot T} \\ \xrightarrow{\cdot S_1} \end{array} & \mathbb{I}_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \cdot V & & \parallel & & \\
 & & \mathbb{I}_1 & \xrightarrow{\cdot R} & \mathbb{I}_1^{1 \times 2} & \longrightarrow & \mathcal{M} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où,  $V = I$ ,  $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $y = (y_1 \ y_2) \in \mathbb{k}[t]^{1 \times 2}$  une solution du système défini par la matrice  $R$ . Alors, nous avons  $R \cdot y = 0$  ce qui équivaut à  $I^2(y_1) - I(y_2) = I(I(y_1) - y_2) = 0$ . En posant,  $z = I(y_1) - y_2 \in \mathbb{k}[t]$ , nous obtenons  $I(z) = 0$  donc  $\partial I(z) = 0$ . Autrement dit, comme  $\partial I = 1$ , nous avons  $z = 0$ . Alors, nous avons l'égalité  $I(y_1) - y_2 = 0$  et  $y$  est solution du système défini par  $Q$ . Soit  $y' \in \mathbb{k}[t]^{1 \times 2}$  solution du système défini par la matrice  $Q$ , il est évident qu'elle est également solution du système défini par la matrice  $R$ .

Ainsi, nous obtenons  $\mathcal{M} \cong \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(\cdot Q) \cong \text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot T) = \mathbb{I}_1$  donc  $\mathcal{M} \cong \mathbb{I}_1$  est un module libre.

Le fait que  $\mathbb{I}_1$  soit un anneau de Cramer effectif permet ainsi le développement effectif des méthodes classiques d'algèbre homologique. Voir [8]. Nous venons de montrer brièvement comment des résolutions libres peuvent être calculées. Cette direction de recherche sera explorée dans de futurs travaux.

# Conclusion et perspectives

Ce mémoire étudie la propriété de cohérence de l'algèbre  $\mathbb{I}_1$  des opérateurs intégro-différentiels ordinaires à coefficients polynomiaux. Nous avons obtenu une preuve algorithmique de cette propriété et développé un algorithme de calcul du noyau de matrices à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$  que nous avons implanté dans un package `Maple`. Cette preuve utilise l'algèbre linéaire, la théorie des anneaux d'opérateurs fonctionnels, la théorie des modules, l'algèbre homologique ainsi que des méthodes de calcul formel. À notre connaissance, l'algèbre  $\mathbb{I}_1$  est la première algèbre non noethérienne cohérente implémentée dans un logiciel de calcul formel. Ce résultat nous a permis le développement d'une théorie de l'élimination pour les systèmes linéaires d'équations intégro-différentielles ordinaires. De plus, nous avons prouvé que l'anneau  $\mathbb{I}_1$  est un anneau de Cramer effectif (computational ring/anneau fortement discret), ce qui permet le développement de méthodes effectives d'algèbre homologique sur  $\mathbb{I}_1$  implémentables dans un logiciel de calcul formel.

Ces résultats ouvrent la possibilité d'une future étude des systèmes linéaires intégro-différentiels par des méthodes effectives d'analyse algébrique. Pour cela, il serait utile de développer des approches effectives de résultats obtenus par Bavula sur la théorie des  $\mathbb{I}_1$ -modules (classification des modules, en particulier des modules simples, généralisation du théorème de Stafford sur la possibilité de générer tout idéal de type fini par deux générateurs, etc.) et sur la catégorie des  $\mathbb{I}_1$ -modules cohérents [16, 18, 17]. En particulier, le concept de  $\mathbb{I}_1$ -modules de torsion devra être étudié grâce à la caractérisation explicite des éléments réguliers de  $\mathbb{I}_1$  et à la théorie de la localisation [111, 19]. Par ailleurs, une étude effective des morphismes de  $\mathbb{I}_1$ -modules de présentation finie permettrait d'étudier une extension des problèmes de factorisation, de réduction (de Serre), de décomposition, d'équivalence, etc. [141, 142, 143, 62] pour les systèmes linéaires intégro-différentiels.

Une extension des résultats de ce mémoire (cohérence effective, calcul de noyaux, théorie de l'élimination, théorie effective des modules, méthodes effectives d'algèbre homologique, etc.) au cas de l'anneau des opérateurs intégro-différentiels à coefficients dans une algèbre de fonctions exponentielles polynomiales serait importante pour l'étude effective des systèmes linéaires différentiels avec ou sans retard [136, 63, 137]. Un autre type de généralisation s'intéresserait au cas des anneaux d'opérateurs intégro-différentiels contenant plusieurs évaluations [144]. Dans le même esprit, il serait naturel de se poser la question de la cohérence de l'algèbre des opérateurs intégro-différentiels à coefficients dans un anneau de fonctions analytiques, de fonctions lisses, de séries formelles, etc., à coefficients dans un anneau  $\mathbb{k}'[t]$  avec  $\mathbb{k}' = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$  où  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  correspondent à des paramètres physiques d'un système. Ce type de résultat a une importance en théorie des systèmes et théorie du contrôle.

Bavula a prouvé que  $\mathbb{I}_n$  n'est pas cohérent pour  $n \geq 2$  [17], ce qui montre que nos résultats ne s'étendent pas au cas de plusieurs dérivées et intégrales. Néanmoins, il serait intéressant de caractériser les  $\mathbb{I}_n$ -modules de présentation finie admettant des modules de syzygies finiment engendrés et d'étudier la possibilité d'en calculer un nombre fini de générateurs (en étendant, si possible, les résultats obtenus dans ce mémoire). Est-ce qu'une telle classe inclurait les systèmes intégro-différentiels classiquement étudiés en physique mathématiques et sciences de l'ingénieur ?

Le calcul de solutions rationnelles, exponentielles, hypergéométriques, etc. de systèmes linéaires intégro-différentiels rectangulaires est une autre piste de recherche pour de futurs travaux en calcul formel. Voir la fin du chapitre 4.

Une autre perspective naturelle de ce travail concerne ses applications, en particulier dans le domaine de la théorie du contrôle et de l'analyse des systèmes dynamiques et des systèmes différentiels à retard (retards distribués) [136, 63, 137]. Les opérateurs intégro-différentiels apparaissent naturellement dans la modélisation de systèmes linéaires comportant des effets mémoire ou des contraintes non locales. Dans ce contexte, disposer d'une structure algébrique cohérente et d'algorithmes effectifs pour le calcul de noyaux ou d'annulateurs permet de développer des méthodes symboliques pour l'élimination de variables, la commande, l'observation et l'estimation de paramètres [50]. Ce lien entre structures algébriques et modélisation de systèmes ouvre la voie à des interactions entre les champs de l'algèbre, du calcul formel, des mathématiques appliquées et des sciences de l'ingénieur.

# Annexe A

## Quelques rappels d'algèbre homologique

Cette annexe a pour but de fournir un catalogue des définitions et propriétés d'algèbre homologique utilisées tout au long de ce manuscrit. Le texte principal y renvoie fréquemment pour poser ou rappeler certains cadres théoriques. Elle contient très peu de démonstrations, à l'exception notable de la section A.2, qui présente la preuve de la caractérisation de la cohérence en termes d'idéaux et d'annulateurs. Pour des démonstrations détaillées ou des approfondissements, on pourra consulter les références classiques telles que [108], [166] et [171]. Sauf mention contraire,  $\mathcal{A}$  désigne un anneau (non nécessairement commutatif), et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche.

### A.1 Définitions et propriétés d'algèbre homologique

#### A.1.1 Suites exactes

**Définition A.1.1.** Une suite de morphismes de  $\mathcal{A}$ -modules

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{M}_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \mathcal{M}_i \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

est appelée un *complexe (de modules)* si la composée de deux morphismes consécutifs est nulle, c'est-à-dire :

$$f_i \circ f_{i-1} = 0 \quad \text{pour tout } i.$$

Autrement dit, l'image de chaque  $f_{i-1}$  est incluse dans le noyau de  $f_i$  :

$$\text{im}_{\mathcal{A}}(f_{i-1}) \subseteq \ker_{\mathcal{A}}(f_i).$$

**Définition A.1.2.** Un complexe de  $\mathcal{A}$ -modules  $\mathcal{M}_i$  de la forme

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{M}_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \mathcal{M}_i \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

est appelé une suite *exacte en  $\mathcal{M}_i$*  si l'image de  $f_{i-1}$  est égale au noyau de  $f_i$ , c'est-à-dire :

$$\text{im}_{\mathcal{A}}(f_{i-1}) = \ker_{\mathcal{A}}(f_i).$$

On dit que la suite est *exacte* si elle est exacte en chaque  $\mathcal{M}_i$ .

**Définition A.1.3.** Soit la suite exacte de  $\mathcal{A}$ -modules :

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{M}_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \mathcal{M}_i \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

On dit que cette suite est *scindée en  $i$*  s'il existe deux morphismes de  $\mathcal{A}$ -modules,

$$s_i : \mathcal{M}_{i+1} \rightarrow \mathcal{M}_i \quad \text{et} \quad t_i : \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}_{i-1}$$

tels que l'on ait l'égalité,

$$\text{id}_{\mathcal{M}_i} = s_i \circ f_i + f_{i-1} \circ t_i.$$

Autrement dit, tout élément de  $\mathcal{M}_i$  peut être décomposé de manière unique en la somme d'une image de  $f_{i-1}$  et un antécédent par  $f_i$ . On écrit alors :

$$\dots \xrightarrow{f_{i-2}} \mathcal{M}_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \mathcal{M}_i \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$$

$\xleftarrow{t_i}$                        $\xleftarrow{s_i}$

**Définition A.1.4.** Une suite de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche est dite *exacte courte* si elle est exacte en chaque terme et de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \xrightarrow{f} \mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{M}'' \longrightarrow 0.$$

En d'autres termes, cela signifie que :

- $f$  est injectif,
- $\text{im}(f) = \ker(g)$ ,
- $g$  est surjectif.

**Proposition A.1.1.** Les assertions suivantes sont équivalentes pour une suite exacte courte de modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \longrightarrow 0$$

1. Il existe une section  $s : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$  telle que  $g \circ s = \text{id}_{\mathcal{P}}$ .
2. Il existe une rétraction  $r : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que  $r \circ f = \text{id}_{\mathcal{M}}$ .
3. On a  $\mathcal{N} \cong \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$ .

Dans ce cas, la suite est scindée et on a la décomposition de l'identité sur  $\mathcal{N}$ ,

$$\text{id}_{\mathcal{N}} = f \circ r + s \circ g,$$

et le diagramme suivant commute :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \longrightarrow 0$$

$\xleftarrow{r}$                        $\xleftarrow{s}$

*Démonstration.* Soit la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \longrightarrow 0$$

**(1)  $\implies$  (3) :** Supposons qu'il existe une section  $s : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$  telle que  $g \circ s = \text{id}_{\mathcal{P}}$ .

Soit  $n \in \mathcal{N}$ , posons  $p = g(n)$  et  $m$  tel que  $f(m) = n - s(p)$ . Comme  $g(n - s(p)) = g(n) - g(s(p)) = p - p = 0$ , alors  $n - s(p) \in \ker(g) = \text{im}(f)$ , donc  $m$  existe bien. Alors tout élément  $n \in \mathcal{N}$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = f(m) + s(p),$$

où  $m \in \mathcal{M}$  et  $p = g(n) \in \mathcal{P}$ .

De plus, cette décomposition est unique, car  $f$  est injectif et  $s$  est une section. On a donc un isomorphisme de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche :

$$\mathcal{N} \cong \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}.$$

**(3)  $\implies$  (2) :** Supposons  $\mathcal{N} \cong \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$ . Considérons la projection canonique sur  $\mathcal{M}$  dans cette somme directe,

$$r : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}.$$

On vérifie facilement que

$$r \circ f = \text{id}_{\mathcal{M}},$$

ce qui fait de  $r$  une rétraction de  $f$ .

(2)  $\implies$  (1) : Supposons qu'il existe une rétraction

$$r : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$$

telle que  $r \circ f = \text{id}_{\mathcal{M}}$ . Posons alors

$$s : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$$

défini par le choix d'un relèvement (section) de  $\mathcal{P} \cong \mathcal{N}/\text{im}(f)$ . Plus précisément, pour  $p \in \mathcal{P}$ , choisissons  $n \in \mathcal{N}$  tel que  $g(n) = p$ . Alors définissons

$$s(p) = n - f(r(n)).$$

On vérifie que  $s$  est bien un morphisme de modules, et que  $g \circ s = \text{id}_{\mathcal{P}}$ .

Finalement, on a donc montré l'équivalence des trois assertions. □

**Théorème A.1.1.** ([166, Exercice 3.16(i), p. 129]) Soit  $\mathcal{A}$  un anneau intègre et  $K = Q(\mathcal{A}) = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathcal{A}, b \neq 0\}$  son corps de fractions. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche et la suite exacte de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{1 \times r_n} \xrightarrow{\cdot R_n} \mathcal{A}^{1 \times r_{n-1}} \xrightarrow{\cdot R_{n-1}} \dots \mathcal{A}^{1 \times r_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{A}^{1 \times r_0} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Alors, nous avons :

$$\text{rang}_{\mathcal{A}} \mathcal{M} - r_0 + r_1 + \dots + (-1)^{n-1} r_n = 0, \tag{A.1}$$

où  $\text{rang}_{\mathcal{A}} \mathcal{M} = \dim_K(K \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M})$  est la dimension du  $K$ -espace vectoriel  $K \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$  engendré par  $\mathcal{M}$ . L'équation (A.1) est appelée caractéristique d'Euler-Poincaré.

## A.1.2 Modules de type fini et de présentation finie

**Définition A.1.5** ([171, 166]). Soit  $\mathcal{A}$  un anneau non commutatif et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche (respectivement, un  $\mathcal{A}$ -module à droite). On dit que le module  $\mathcal{M}$  est *de type fini* ou *finiment engendré* s'il existe une famille finie  $(g_i)_{i \in \llbracket 0, p \rrbracket}$ , où  $g_i \in \mathcal{M}$  et  $p$  est un entier naturel, telle que :

$$\forall m \in \mathcal{M}, \exists a_0, \dots, a_p \in \mathcal{A}^*, \quad m = \sum_{i=0}^p r_i g_i \quad \left( \text{respectivement, } m = \sum_{i=0}^p g_i r_i \right).$$

Autrement dit,  $\mathcal{M}$  est de type fini s'il existe un ensemble fini de générateurs pour  $\mathcal{M}$  ou, de manière équivalente, si la suite exacte suivante est satisfaite

$$\mathcal{A}^{1 \times p} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

où l'homomorphisme surjectif  $\pi$  est défini par

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A}^{1 \times p} &\longrightarrow \mathcal{M}, \\ e_i &\longmapsto g_i, \end{aligned} \tag{A.2}$$

où  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de la base canonique de  $\mathcal{A}^{1 \times p}$ , c'est-à-dire le vecteur ligne de longueur  $p$  avec un 1 à la  $i^{\text{ème}}$  position et 0 ailleurs.

**Définition A.1.6.** ([108]) Le module  $\mathcal{M}$  est dit *noethérien à gauche* (respectivement, *noethérien à droite*) si tous ses sous- $\mathcal{A}$ -modules à gauche (respectivement, à droite) sont de type fini. Un module est dit *noethérien* s'il est noethérien à gauche et à droite. L'anneau  $\mathcal{A}$  est noethérien (respect. noethérien à gauche, noethérien à droite) s'il est noethérien en tant que  $\mathcal{A}$ -module.

**Remarque A.1.1.** Il est à noter que les sous-modules (respect. à droite ou à gauche) d'un anneau sont ses idéaux (respect. à droite ou à gauche). Ainsi, l'anneau  $\mathcal{A}$  est dit *noethérien à gauche* (respect. *noethérien à droite*) si tous ses idéaux à gauche (respect. à droite ou à gauche) sont de type fini.

**Définition A.1.7** ([171, 166]). Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche (respectivement, un  $\mathcal{A}$ -module à droite), et  $\pi$  l'homomorphisme défini dans (A.2).

Alors,  $\mathcal{M}$  est dit *de présentation finie* si

$$\ker(\pi) = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathcal{A}^{1 \times p} \mid \pi(\lambda) = 0\}$$

est un  $\mathcal{A}$ -module à gauche (respectivement, à droite) de type fini.

Le fait que  $\ker \pi$  soit de type fini est équivalent à l'existence d'un ensemble fini de générateurs de  $\ker \pi$ , c'est-à-dire un ensemble fini d'éléments  $s_0, \dots, s_q \in \mathcal{A}^{1 \times p}$  tels que :

$$\forall \lambda \in \ker \pi, \quad \exists r_1, \dots, r_q \in \mathcal{A}, \quad \lambda = \sum_{i=0}^q r_i s_i = \underbrace{(r_1 \quad \dots \quad r_q)}_r \underbrace{\begin{pmatrix} \text{---}s_1\text{---} \\ \vdots \\ \text{---}s_q\text{---} \end{pmatrix}}_S = r S.$$

Ainsi, nous avons  $\ker(\pi) = \text{im}_{\mathcal{A}}(.S) = \{r S \mid r \in \mathcal{A}^{1 \times q}\}$ , où  $S \in \mathcal{A}^{q \times p}$ , ce qui est équivalent à l'existence de la suite exacte suivante de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche :

$$\mathcal{A}^{1 \times q} \xrightarrow{.S} \mathcal{A}^{1 \times p} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Remarquons que, par définition, un module de présentation finie est également de type fini.

**Remarque A.1.2.** Si on représente un module  $\mathcal{M}$  par générateurs et relations, alors un module de présentation finie est un module avec un nombre fini de générateurs et un nombre fini de relations génératrices. En d'autres termes, en plus d'avoir un nombre fini de générateurs, toute relation entre ces générateurs est combinaison linéaire finie d'un nombre fini de relations.

**Définition A.1.8.** Le module  $\ker(\pi)$  défini dans la définition A.1.7 est appelé le module des syzygies de  $\mathcal{M}$  et est souvent noté  $\text{Syz}(\mathcal{M})$ .

**Définition A.1.9.** ([171, 166]) Soit  $\mathcal{A}$  un anneau non commutatif et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche/droite. Le module  $\mathcal{M}$  est dit *cohérent à gauche/droite* si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module à gauche/droite de présentation finie et si tout sous-module de type fini de  $\mathcal{M}$  est également de présentation finie. L'anneau  $\mathcal{A}$  est appelé *cohérent à gauche/droite* si tous ses idéaux à gauche/droite de type fini sont de présentation finie. Enfin, un anneau est dit *cohérent* s'il est cohérent à la fois à gauche et à droite.

**Exemple A.1.1.** Les anneaux noethériens à gauche/droite sont des anneaux cohérents à gauche/droite. Des exemples d'anneaux cohérents mais non noethériens sont l'anneau  $\mathbb{k}[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$  des polynômes en un nombre infini de variables  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  à coefficients dans un corps  $\mathbb{k}$ , ou l'anneau des fonctions entières sur  $\mathbb{C}$ .

**Remarque A.1.3.** D'un point de vue effectif et calculatoire, considérer un  $\mathcal{A}$ -module de type fini  $\mathcal{M}$  engendré

par  $g_1, \dots, g_n$  est équivalent à regarder l'image à gauche de la colonne  $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$  qui est l'ensemble des  $\lambda G$  avec

$\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times n}$ . On a alors l'épimorphisme (A.2) qu'on réécrit ici

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{A}^{1 \times n} &\longrightarrow \mathcal{M}, \\ e_i &\longmapsto g_i. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Si on veut que  $\mathcal{M}$  soit de présentation finie, la définition A.1.7 nous dit qu'il faut que le  $\mathcal{A}$ -module  $\ker(\pi) = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{A}^{1 \times n} \mid \pi(\lambda) = 0\} = \{\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times n} \mid \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = 0\} = \ker(.G)$  soit de type fini. Ainsi, la cohérence (à gauche/ droite) de l'anneau  $\mathcal{A}$ , revient à demander que le noyau (à gauche/droite), de n'importe quelle matrice colonne  $G \in \mathcal{A}^{1 \times p}$  ou, de manière équivalente, de n'importe quelle matrice  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$ , soit de type fini.

**Proposition A.1.2.** ([25, 166]) Soit  $\mathcal{A}$  un anneau cohérent à gauche/à droite et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche/à droite. Alors,  $\mathcal{M}$  est cohérent à gauche/à droite si, et seulement si,  $\mathcal{M}$  est de présentation finie.

La prochaine proposition montre que les propriétés des modules de type finis sur des anneaux noethériens peuvent être étendues aux modules de présentation finie sur les anneaux cohérents.

**Proposition A.1.3.** ([25, 166]) Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M}', \mathcal{M}'' \subseteq \mathcal{M}$  des  $\mathcal{A}$ -modules à gauche/à droite et  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .

Alors, nous avons :

- $\mathcal{M}/\mathcal{M}', \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}, \mathcal{M}' \cap \mathcal{M}''$  et  $\mathcal{M}' + \mathcal{M}''$  sont des  $\mathcal{A}$ -modules cohérents à gauche/à droite.
- $\ker f, \text{im } f$ , et  $\text{coker } f$  sont des  $\mathcal{A}$ -modules cohérents à gauche/à droite.

De plus, si  $\mathcal{A}$  est commutatif, si  $I$  est un idéal cohérent de  $\mathcal{A}$  et si  $S$  est un ensemble multiplicativement fermé de  $\mathcal{A}$ , alors nous avons :

- $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  sont des  $\mathcal{A}$ -modules cohérents.
- La localisation  $S^{-1}\mathcal{A}$  de  $\mathcal{A}$  par rapport à  $S$  est un  $\mathcal{A}$ -module cohérent.
- $I\mathcal{M} = \{\sum_{k=1}^r a_i m_i \mid r \in \mathbb{N}, a_i \in I, m_i \in \mathcal{M}\}$  est un  $\mathcal{A}$ -module cohérent.
- $\text{ann}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}) = \{r \in \mathcal{A} \mid r\mathcal{M} = 0\}$  est un idéal cohérent de  $\mathcal{A}$ .

### A.1.3 Classification de modules

**Définition A.1.10.** ([166, Chapitre 4, p. 154]) Soit  $\mathcal{M}$  un module à gauche sur un anneau  $\mathcal{A}$ .

- On dit que  $\mathcal{M}$  est *simple* s'il est non nul et n'a pas de sous-modules à gauche propres non nuls.
- On dit que  $\mathcal{M}$  est *semi-simples* s'il est une somme directe de  $\mathcal{A}$ -modules à gauche simples.

**Définition A.1.11.** ([166, 108]) Soit  $\mathcal{A}$  un anneau et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module.

On dit que  $\mathcal{M}$  est un module *libre* de base  $\mathcal{B}$  si  $\mathcal{B}$  est un sous ensemble de  $\mathcal{M}$  libre et générateur, c'est-à-dire, vérifiant la propriété suivante

$$\forall m \in \mathcal{M}, \quad \exists (g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{B}^p, \quad \exists (a_1, \dots, a_p) \in (\mathcal{A}^*)^p, \quad m = \sum_{i=1}^p a_i g_i,$$

et  $m = \sum_{i=1}^p a_i g_i = 0$  implique  $g_1 = \dots = g_p = 0$ .

**Définition A.1.12.** Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module de type fini (voir définition A.1.5) et libre alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{A}^n.$$

Si l'anneau  $\mathcal{A}$  est commutatif ou bien noethérien, alors l'entier  $n$  est unique et est appelé le *rang* du module  $\mathcal{M}$ .

**Définition A.1.13.** Soit  $\mathcal{A}$  un anneau. Un  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{P}$  est *projectif* si, pour toute surjection de  $\mathcal{A}$ -modules  $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  et tout morphisme  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$ , il existe un morphisme  $\tilde{f} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  tel que :

$$g \circ \tilde{f} = f.$$

Cela signifie que le morphisme  $f$  se *relève* à  $\mathcal{M}$ , comme illustré dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} & \\ & \swarrow \tilde{f} & \downarrow f \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{g} & \mathcal{N} \longrightarrow 0. \end{array}$$

De manière équivalente,  $\mathcal{P}$  est un module projectif s'il est facteur direct d'un module libre, c'est-à-dire, s'il existe  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{A}$ -module libre et  $\mathcal{Q}$  un  $\mathcal{A}$ -module tels que :

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{L}.$$

**Définition A.1.14.** Un  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{M}$  est dit *stablement libre* s'il existe un  $\mathcal{A}$ -module libre de rang fini  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{F}$  soit un  $\mathcal{A}$ -module libre de rang fini. En particulier,  $\mathcal{M}$  est projectif et de type fini.

**Théorème A.1.2.** ([140]) *Nous avons les assertions suivantes.*

1.

$$\text{libre} \Rightarrow \text{stablement libre} \Rightarrow \text{projectif} \Rightarrow \text{sans torsion.}$$

2. ([166, Corollaire 4.16, p. 163]) *Si  $\mathcal{A}$  est un anneau principal et intègre alors :*

$$\text{sans torsion} = \text{libre.}$$

3. *Si  $\mathcal{A}$  est un anneau héréditaire, alors pour un module de type fini :*

$$\text{sans torsion} = \text{projectif.}$$

4. ([166, Théorème 4.100, p. 169]) *Si  $\mathcal{A} = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  alors pour un module de type fini :*

$$\text{projectif} = \text{libre.}$$

5. ([145], [170, Théorème 2.2]) *Si  $\mathcal{A} = \mathbb{A}_1$ , alors,*

$$\text{stablement libre} = \text{projectif,}$$

*et pour tous les modules de rang au moins 2 :*

$$\text{projectif} = \text{libre.}$$

#### A.1.4 Résolutions

**Définition A.1.15.** Un  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{M}$  admet une *résolution libre finie* de longueur  $n$ , s'il existe une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$  de  $\mathcal{A}$ -modules où les  $\mathcal{F}_i$  sont libres de type fini. Si les modules  $\mathcal{F}_i$  sont projectifs, on parle alors de *résolution projective*.

**Définition A.1.16.** On appelle *dimension projective* d'un  $\mathcal{A}$ -module à gauche  $\mathcal{M}$ , notée  $\text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ , la longueur minimale d'une résolution projective de  $\mathcal{M}$ , s'il en existe une. La *dimension globale* de  $\mathcal{A}$ , notée  $\text{gldim}(\mathcal{A})$ , est alors définie par :

$$\text{gldim}(\mathcal{A}) = \sup\{\text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ est un } \mathcal{A}\text{-module à gauche}\}.$$

Autrement dit, c'est la borne supérieure des dimensions projectives de tous les modules à gauche sur  $\mathcal{A}$ .

**Théorème A.1.3.** ([108, Chapitre 11]) *Pour un  $\mathcal{A}$ -module projectif  $\mathcal{M}$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$\mathcal{M}$  est stablement libre.*

2.  *$\mathcal{M}$  admet une résolution libre de longueur finie.*

**Proposition A.1.4.** ([145, Proposition 20, Corollaire 21]) *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module défini par la résolution libre finie :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{1 \times r_m} \xrightarrow{R_m} \mathcal{A}^{1 \times r_{m-1}} \xrightarrow{R_{m-1}} \dots \mathcal{A}^{1 \times r_1} \xrightarrow{R_1} \mathcal{A}^{1 \times r_0} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

1. Si  $m \geq 3$  et qu'il existe une matrice  $S_m \in \mathcal{A}^{r_{m-1} \times r_m}$  telle que  $R_m S_m = I_{r_m}$ , alors  $\mathcal{M}$  admet la résolution libre plus courte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{A}^{1 \times r_{m-1}} \xrightarrow{\cdot T_{m-1}} \mathcal{A}^{1 \times (r_{m-2} + r_m)} \xrightarrow{\cdot T_{m-2}} \mathcal{A}^{1 \times r_{m-3}} \xrightarrow{\cdot R_{m-3}} \dots \mathcal{A}^{1 \times r_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{A}^{1 \times r_0} \xrightarrow{\cdot \pi} \mathcal{M} \rightarrow 0,$$

avec les notations :

$$\begin{cases} T_{m-1} &= (R_{m-1} \ S_m) \in \mathcal{A}^{r_{m-1} \times (r_{m-2} + r_m)}, \\ T_{m-2} &= \begin{pmatrix} R_{m-2} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^{(r_{m-2} + r_m) \times (r_{m-3})}. \end{cases}$$

2. Si  $m = 2$  et s'il existe  $S_2 \in \mathcal{A}^{r_1 \times r_2}$  telle que  $R_2 S_2 = I_{r_2}$ , alors  $\mathcal{M}$  admet la résolution libre plus courte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{1 \times r_1} \xrightarrow{\cdot T_1} \mathcal{A}^{1 \times (r_0 + r_2)} \xrightarrow{\cdot \tau} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

avec  $T_1 = (R_1 \ S_2) \in \mathcal{A}^{r_1 \times (r_0 + r_2)}$ , et

$$\begin{aligned} \tau = \pi \oplus 0 : \mathcal{A}^{1 \times (r_0 + r_2)} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) &\longmapsto \tau(\lambda) = \pi(\lambda_1). \end{aligned}$$

**Définition A.1.17.** Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module finiment présenté par  $R \in \mathcal{A}^{m \times l}$ , c'est-à-dire, tel que  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathcal{A}}(R) = \mathcal{A}^{1 \times l} / (\mathcal{A}^{1 \times m} R)$ . On appelle le *transposé d'Auslander* de  $\mathcal{M}$ , noté  $T(\mathcal{M})$ , le module suivant :

$$T(\mathcal{M}) = \mathcal{A}^{m \times 1} / (R \mathcal{A}^{l \times 1}).$$

On a ainsi la suite exacte de  $\mathcal{A}$ -modules à droite suivante :

$$0 \longleftarrow T(\mathcal{M}) \longleftarrow \mathcal{A}^{m \times 1} \xleftarrow{R} \mathcal{A}^{l \times 1}.$$

## A.1.5 Catégories

**Définition A.1.18.** ([166, p. 8]) Une *catégorie*  $\mathcal{C}$  est la donnée de :

- une classe  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  d'objets ;
- pour chaque paire ordonnée d'objets  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , un ensemble  $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  d'applications appelées *morphismes* de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$  ;
- une *loi de composition* des morphismes :

$$\circ : \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \times \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

pour chaque triplet d'objets  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ .

Ces données satisfont les axiomes suivants :

- (i) Les ensembles  $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que chaque morphisme  $f$  a une source  $\mathcal{A}$  et un but  $\mathcal{B}$  bien définis.
- (ii) Pour tout objet  $\mathcal{A}$ , il existe un morphisme identité  $1_{\mathcal{A}} \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$   $1_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$  tel que pour tout  $f \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  on ait :

$$f \circ 1_{\mathcal{A}} = f \quad \text{et} \quad 1_{\mathcal{B}} \circ f = f.$$

- (iii) La composition est associative : pour toute suite de morphismes

$$\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{D}$$

on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**Définition A.1.19.** ([166, p. 17]) Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. Un *foncteur*  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  consiste en les données suivantes :

1. Pour tout objet  $\mathcal{A} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , un objet  $T(\mathcal{A}) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ .
2. Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathcal{C}$ . Pour tout morphisme  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ , un morphisme

$$T(f) : T(\mathcal{A}) \longrightarrow T(\mathcal{A}')$$

dans  $\mathcal{D}$ ;

3. Pour tout enchaînement de morphismes dans  $\mathcal{C}$  :

$$\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{A}' \xrightarrow{g} \mathcal{A}''$$

on a :

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f).$$

4. Pour tout objet  $\mathcal{A} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , on a :

$$T(1_{\mathcal{A}}) = 1_{T(\mathcal{A})}.$$

**Définition A.1.20.** ([166, p. 19]) Un *foncteur contravariant*  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , où  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont des catégories, est une application vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout objet  $\mathcal{C} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , on a  $T(\mathcal{C}) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ .
2. Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$ . À tout morphisme  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ , on associe un morphisme

$$T(f) : T(\mathcal{C}') \longrightarrow T(\mathcal{C})$$

dans  $\mathcal{D}$  (notez l'inversion des flèches) ;

3. Pour toute composition

$$\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{C}' \xrightarrow{g} \mathcal{C}''$$

dans  $\mathcal{C}$ , on a :

$$T(g \circ f) = T(f) \circ T(g).$$

4. Pour tout objet  $\mathcal{C} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , on a :

$$T(1_{\mathcal{C}}) = 1_{T(\mathcal{C})}.$$

**Proposition A.1.5.** ([166]) Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{A}$ -module. Alors le foncteur contravariant exact à gauche  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{F})$ , qui à tout  $\mathcal{A}$ -module  $\mathcal{M}$  associe le groupe abélien  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  des morphismes de  $\mathcal{M}$  vers  $\mathcal{F}$ , transforme les suites exactes de  $\mathcal{A}$ -modules en des suites exactes de groupes abéliens.

**Définition A.1.21.** ([166, p. 303]) Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite *additive* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tous objets  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , l'ensemble  $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  est un groupe abélien (additif) ;
2. Les lois distributives sont satisfaites, c'est-à-dire, si l'on a des morphismes

$$\mathcal{X} \xrightarrow{a} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \mathcal{B} \xrightarrow{b} \mathcal{Y}$$

alors on a les égalités suivantes,

$$b \circ (f + g) = b \circ f + b \circ g \quad \text{et} \quad (f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a;$$

3. La catégorie  $\mathcal{C}$  possède un objet nul ;
4.  $\mathcal{C}$  admet les produits finis et les coproduits finis : pour tous objets  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  de  $\mathcal{C}$ , les objets  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  (produit) et  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$  (coproduit) existent dans  $\mathcal{C}$ .

**Définition A.1.22.** ([166, p. 307]) Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite *abélienne* si elle satisfait les propriétés suivantes :

- (i)  $\mathcal{C}$  est une catégorie additive.
- (ii) Tout morphisme  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  admet un noyau et un conoyau. Il existe donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{k} \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{c} \operatorname{coker}(f) \longrightarrow 0,$$

où  $k$  est un monomorphisme,  $c$  un épimorphisme, et les objets  $\ker(f)$ ,  $\operatorname{coker}(f)$  sont respectivement universels.

- (iii) Tout monomorphisme est un noyau, c'est-à-dire : si  $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est un monomorphisme, alors il existe un morphisme  $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que  $m = \ker(f)$ .
- (iv) Tout épimorphisme est un conoyau, c'est-à-dire : si  $e : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  est un épimorphisme, alors il existe un morphisme  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tel que  $e = \operatorname{coker}(f)$ .

### A.1.5.1 Extension des coefficients avec le produit tensoriel

**Proposition A.1.6.** ([166, p. 76]) Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux anneaux et  $f$  un morphisme d'anneaux de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$ .

- Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{B}$ -module, on peut définir une structure de  $\mathcal{A}$ -module sur  $\mathcal{M}$  via  $ax = f(a)x$  pour  $x \in \mathcal{M}$  et  $a \in \mathcal{A}$ . On appelle cela la restriction des scalaires.
- Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module, on peut définir une structure de  $\mathcal{B}$ -module sur  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$  via  $b(b' \otimes x) = bb' \otimes x$  pour  $x \in \mathcal{M}, b, b' \in \mathcal{B}$ . On parle alors d'extension des scalaires.

**Remarque A.1.4.** Notons que  $\mathcal{B}$  est un  $\mathcal{A}$ -module par restriction des scalaires donc le produit tensoriel  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$  a un sens. L'extension des scalaires consiste à faire des combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{M}$  à coefficients dans  $\mathcal{B}$ .

### A.1.5.2 Lien entre module d'extention, foncteur Hom et module projectif

**Proposition A.1.7.** ([96 p. 8, 108 p. 137])

Soit  $\mathcal{A}$  un anneau et  $\mathcal{P}$  un  $\mathcal{A}$ -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le module  $\mathcal{P}$  est projectif
2. Toute suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{f} \mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \longrightarrow 0,$$

se scinde. Voir la proposition A.1.1.

3. Soient  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $\mathcal{A}$ -modules et  $\mathcal{C}'$  la catégorie des groupes abéliens. Alors, le foncteur  $\mathcal{M} \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{M})$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$ , est exact.

**Définition A.1.23.** ([135, p. 17]) Soient  $\mathcal{M} = \operatorname{coker}_{\mathcal{A}}(R_1)$  un module de présentation finie et le complexe de  $\mathcal{A}$ -modules suivant

$$\dots \xleftarrow{R_{i+1}\cdot} \mathcal{F}^{r_i} \xleftarrow{R_i\cdot} \mathcal{F}^{r_{i-1}} \dots \xleftarrow{R_2\cdot} \mathcal{F}^{r_1} \xleftarrow{R_1\cdot} \mathcal{F}^{r_0} \xleftarrow{\quad} 0,$$

avec  $(R_i)(\eta) = R_i \eta$  pour tout  $i$ . On définit alors :

$$\begin{cases} \operatorname{ext}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \cong \ker_{\mathcal{F}}(R_1\cdot) \\ \operatorname{ext}_{\mathcal{A}}^i(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \cong \ker_{\mathcal{F}}(R_{i+1}\cdot) / \operatorname{im}_{\mathcal{F}}(R_i\cdot), \quad i \geq 1. \end{cases}$$

**Remarque A.1.5.** Cette définition est bien posée, car  $\operatorname{ext}_{\mathcal{A}}^i(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  ne dépend que du module à gauche  $\mathcal{M}$  et non pas du choix d'une résolution. Voir, par exemple, [166, Proposition 6.40, p. 365].

**Définition A.1.24.** ([108, p. 146]) Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module à gauche.

- Un élément  $m \in \mathcal{M}$  est dit *de torsion* s'il existe un élément non nul  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $am = 0$ .
- On note  $t(\mathcal{M})$  l'ensemble des éléments de torsion de  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire,

$$t(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M} \mid \exists a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}, am = 0\}.$$

- Si  $t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ , on dit que  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module *de torsion*.
- Si  $t(\mathcal{M}) = 0$ , on dit que  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module *sans torsion*.

De manière générale, il suffit qu'un anneau  $\mathcal{A}$  soit intègre et possède la propriété de Ore à gauche pour que  $t(\mathcal{M})$  ait une structure de  $\mathcal{A}$ -module. C'est ce résultat que montre la proposition suivante.

**Proposition A.1.8.** Soient  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module et  $\mathcal{A}$  un domaine possédant la propriété de Ore à gauche, c'est-à-dire vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{A}^2, \exists (c, d) \neq (0, 0) \in \mathcal{A}^2, ca = db.$$

Alors, l'ensemble  $t(\mathcal{M})$  a une structure de  $\mathcal{A}$ -module.

*Démonstration.* Soient  $m_1, m_2 \in t(\mathcal{M})$  et  $b_1, b_2 \in \mathcal{A}$ . Montrons que  $b_1 m_1 + b_2 m_2 \in t(\mathcal{M})$ . Comme  $m_1, m_2 \in t(\mathcal{M})$ , il existe  $a_1, a_2 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$  tels que :

$$\begin{cases} a_1 m_1 = 0, \\ a_2 m_2 = 0. \end{cases}$$

Par la propriété de Ore, il existe  $(c_1, c_2) \neq (0, 0) \in \mathcal{A}^2$  tel que :

$$c_1 a_1 = c_2 b_1.$$

De même, il existe  $(d_1, d_2) \neq (0, 0) \in \mathcal{A}^2$  tel que :

$$d_1 a_2 = d_2 b_2.$$

De plus, il existe  $(e_1, e_2) \neq (0, 0) \in \mathcal{A}^2$  tel que :

$$e_1 c_2 = e_2 d_2.$$

Nous avons alors :

$$(e_1 c_2)(b_1 m_1 + b_2 m_2) = e_1 \underbrace{(c_2 b_1)}_{=c_1 a_1} m_1 + \underbrace{(e_1 c_2)}_{=e_2 d_2} (b_2 m_2) = e_1 c_1 \underbrace{(a_1 m_1)}_{=0} + e_2 \underbrace{(d_2 b_2)}_{=d_1 a_2} m_2 = e_2 d_1 \underbrace{(a_2 m_2)}_{=0} = 0.$$

Ainsi,  $b_1 m_1 + b_2 m_2 \in t(\mathcal{M})$  et donc  $t(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{A}$ -module. □

**Remarque A.1.6.** Un anneau commutatif ou noethérien possède la propriété de Ore à gauche et à droite.

**Théorème A.1.4.** ([135]) Soient  $\mathcal{A}$  un anneau noethérien intègre et  $R \in \mathcal{A}^{q \times p}$  et  $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{1 \times p} / (\mathcal{A}^{1 \times q} R)$ . Les trois assertions suivantes sont vérifiées :

1. Il existe un  $\mathcal{A}$ -isomorphisme à gauche entre  $t(\mathcal{M})$  et  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^1(T(\mathcal{M}), \mathcal{A})$ , i.e.,

$$t(\mathcal{M}) \cong \text{ext}_{\mathcal{A}}^1(T(\mathcal{M}), \mathcal{A}).$$

2. Le module  $\mathcal{M}$  est un module à gauche sans torsion si, et seulement si,  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^1(T(\mathcal{M}), \mathcal{A}) = 0$ .
3. Le module  $\mathcal{M}$  est projectif si, et seulement si,  $\text{ext}_{\mathcal{A}}^i(T(\mathcal{M}), \mathcal{A}) = 0$ , pour  $i = 0, 1$ .

## A.1.6 Factorisation

**Théorème A.1.5.** Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$  et  $\mathcal{N}$  des  $\mathcal{A}$ -modules. Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un homomorphisme. Soit  $\mathcal{N} \subset \ker(f)$ . Alors il existe une unique factorisation  $\bar{f} : \mathcal{M}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}'$  telle que  $\bar{f}(x+\mathcal{N}) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{M}$ .

De plus,

1.  $\bar{f}$  est un épimorphisme si, et seulement si,  $f$  est un épimorphisme
2.  $\bar{f}$  est un monomorphisme si, et seulement si,  $\ker(f) = \mathcal{N}$
3.  $\bar{f}$  est un isomorphisme si, et seulement si,  $f$  est un épimorphisme et  $\mathcal{N} = \ker(f)$ .

**Théorème A.1.6.** Soient  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  des sous-modules de  $\mathcal{M}$ . On définit  $\mathcal{S} + \mathcal{T} = \{s+t \mid s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}\}$ . Alors,  $\mathcal{S} + \mathcal{T}$  et  $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$  sont des sous-modules de  $\mathcal{M}$  et on a :

$$(\mathcal{S} + \mathcal{T}) / \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \cong \mathcal{S} / \mathcal{S} \cap \mathcal{T}.$$

**Théorème A.1.7.** Soient  $\mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{M}$  des modules tels que  $\mathcal{N} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ . Alors,

$$\mathcal{M} / \mathcal{L} \cong (\mathcal{M} / \mathcal{N}) / (\mathcal{L} / \mathcal{N}).$$

## A.2 Caractérisation de la cohérence

**Proposition A.2.1.** ([171]) Soit  $\mathcal{A}$  un anneau. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{A}$  est un anneau cohérent à gauche.
2. (a) Pour tout  $d \in \mathcal{A}$ ,  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(.d) = \{a \in \mathcal{A} \mid ad = 0\}$  est un idéal à gauche de type fini.  
(b) Pour tous les idéaux à gauche de type fini  $I$  et  $J$ , l'idéal  $I \cap J$  est de type fini.

De même pour un anneau cohérent à droite  $\mathcal{A}$ , où  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(.d)$  est remplacé par l'idéal à droite  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(d.)$ , et les idéaux à gauche  $I$  et  $J$  sont des idéaux à droite.

La preuve de cette caractérisation n'est pas facilement trouvable sous cette forme dans les livres de théorie des modules. Comme elle joue un rôle essentiel dans ce manuscrit on se propose de la détailler ici. Cette sous-section A.2 est donc consacrée à la preuve de la Proposition A.2.1 et commence par plusieurs lemmes utiles. Le premier est célèbre et s'appelle le *Horseshoe Lemma* tandis que les deux autres sont plus spécifiques et techniques.

**Lemme A.2.1.** ([166]) Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{P}_i$  et  $\mathcal{Q}_i$  des  $\mathcal{A}$ -modules pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Soient une suite exacte courte de modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

et

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{P}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{P}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{P}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{f_2} \mathcal{Q}_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{Q}_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

des résolutions projectives de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$  respectivement. Alors, il existe une résolution projective de  $\mathcal{B}$

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{Q}_2 \xrightarrow{e_2} \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{Q}_1 \xrightarrow{e_1} \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{Q}_0 \xrightarrow{e_0} \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \mathcal{P}_2 & \xrightarrow{d_2} & \mathcal{P}_1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{P}_0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{A} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow{e_2} & \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{Q}_1 & \xrightarrow{e_1} & \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{Q}_0 & \xrightarrow{e_0} & \mathcal{B} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{Q}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{Q}_0 & \xrightarrow{f_0} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

**Remarque A.2.1.** En particulier, si

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0.$$

est une suite exacte et que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$  sont de type fini, alors  $\mathcal{B}$  est de type fini, car la somme directe de deux modules de type fini est de type fini.

**Lemme A.2.2.** Soient  $\mathcal{A}$  un anneau et  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ , et  $\mathcal{G}$  des  $\mathcal{A}$ -modules à gauche/droite tels que la suite exacte courte suivante soit vérifiée :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \xrightarrow{p} \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Si  $\mathcal{E}$  est de présentation finie et que  $\mathcal{G}$  est de type fini, alors  $\mathcal{F}$  est de type fini.

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}_1$  deux modules libres finiment engendrés sur  $\mathcal{A}$  qui définissent une présentation de  $\mathcal{E}$ . Alors, nous avons le diagramme exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathcal{L}_1 & & \\
 & & & & \downarrow r & & \\
 & & & & \mathcal{L}_0 & & \\
 & & & & \downarrow s & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{j} & \mathcal{G} & \xrightarrow{p} & \mathcal{E} \longrightarrow 0. \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base finie de  $\mathcal{L}_0$ . Alors, nous avons  $s(e_i) \in \mathcal{E}$  pour tout  $i \in I$ . Comme  $p$  est surjectif, il existe des  $g_i$  dans  $\mathcal{G}$  tels que  $p(g_i) = s(e_i)$  pour tout  $i \in I$ . Nous pouvons alors définir l'homomorphisme  $u : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{G}$  par  $u(e_i) = g_i$  pour tout  $i \in I$ . Alors, nous avons  $s = p \circ u$ . Ainsi, nous pouvons compléter le diagramme ci-dessus pour obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathcal{L}_1 & & \\
 & & & & \downarrow r & & \\
 & & & & \mathcal{L}_0 & & \\
 & & & & \downarrow s & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{j} & \mathcal{G} & \xrightarrow{p} & \mathcal{E} \longrightarrow 0. \\
 & & & & \swarrow u & & \downarrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$



où  $p, l, m$  sont des entiers positifs,  $\delta$  et  $\pi$  sont des applications  $\mathcal{A}$ -linéaires, et  $P \in \mathcal{A}^{m \times l}$  est une matrice de présentation de  $\mathcal{L}$ . Ce dernier diagramme peut être complété comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{L} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{M} \longrightarrow 0, \\
& & \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\
& & \pi & & \delta & \beta \circ \delta & \\
& & \mathcal{A}^{1 \times p} & \xrightarrow{\cdot C} & \mathcal{A}^{1 \times l} & & \\
& & & & \uparrow & & \\
& & & & \cdot P & & \\
& & & & \mathcal{A}^{1 \times m} & & 
\end{array}$$

où  $C \in \mathcal{A}^{p \times l}$  et  $\alpha \circ \pi = \delta \circ (\cdot C)$ . Pour prouver que  $\mathcal{M}$  est de présentation finie, étudions  $\ker(\beta \circ \delta)$ . On a :

$$\ker(\beta \circ \delta) = \{\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times l} \mid \beta(\delta(\lambda)) = 0\} = \{\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times l} \mid \delta(\lambda) \in \ker \beta\} = \{\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times l} \mid \exists \mu \in \mathcal{K}, \delta(\lambda) = \alpha(\mu)\}.$$

Puisque pour tout  $\mu \in \mathcal{K}$ , il existe  $\eta \in \mathcal{A}^{1 \times p}$  tel que  $\mu = \pi(\eta)$ , et en utilisant  $\alpha \circ \pi = \delta \circ (\cdot C)$ , nous obtenons :

$$\ker(\beta \circ \delta) = \{\lambda \in \mathcal{A}^{1 \times l} \mid \exists \eta \in \mathcal{A}^{1 \times p} : \delta(\lambda) = \alpha(\pi(\eta)) = \delta(\eta C)\}.$$

De plus,  $\delta(\lambda) = \delta(\eta C)$  implique  $\delta(\lambda - \eta C) = 0$ , donc  $\lambda - \eta C \in \ker \delta = \text{im}(\cdot P)$ . Par conséquent, il existe  $e \in \mathcal{A}^{1 \times m}$  tel que  $\lambda - \eta C = eP$ , c'est-à-dire  $\lambda = \begin{pmatrix} \eta & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ P \end{pmatrix}$ .

Cela implique  $\ker(\beta \circ \delta) = \text{im}(\cdot Q)$ , où  $Q = \begin{pmatrix} C^T & P^T \end{pmatrix}^T$ . On obtient donc la suite exacte suivante

$$\mathcal{A}^{1 \times (p+m)} \xrightarrow{\cdot Q} \mathcal{A}^{1 \times l} \xrightarrow{\beta \circ \delta} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

et  $\mathcal{M}$  est un module de présentation finie présenté par la matrice  $Q \in \mathcal{A}^{(p+m) \times l}$ .  $\square$

Prouvons maintenant la proposition [A.2.1](#).

*Démonstration.* Commençons par démontrer que 2. implique 1. Pour montrer que  $\mathcal{A}$  est un anneau cohérent, nous devons prouver que tout idéal de  $\mathcal{A}$  de type fini est de présentation finie. Soit  $\mathcal{I}$  un idéal de  $\mathcal{A}$  engendré par un nombre fini d'éléments  $a_1, \dots, a_n$ . Nous allons prouver que  $\mathcal{I}$  est de présentation finie par récurrence sur le nombre  $n$  de générateurs.

Si  $n = 1$ , alors  $\mathcal{I} = \mathcal{A}a_1$  et la suite exacte suivante est vérifiée :

$$0 \longrightarrow \text{ann}_{\mathcal{A}}(\cdot a_1) \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}a_1 \longrightarrow 0.$$

D'après 2.(a),  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(\cdot a_1)$  est de type fini, il existe donc des éléments  $b_1, \dots, b_r$  tels que  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(\cdot a_1) = \sum_{i=1}^r \mathcal{A}b_i$ . La suite de module suivante est alors exacte :

$$\mathcal{A}^{1 \times r} \xrightarrow{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}} \mathcal{A} \xrightarrow{\cdot a_1} \mathcal{A}a_1 \longrightarrow 0.$$

Ainsi, cela montre que  $\mathcal{I} = \mathcal{A}a_1$  est de présentation finie. Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé, supposons que la propriété  $H_n$  suivante est vraie

$H_n$  : « Tout idéal de  $\mathcal{A}$  engendré par au plus  $n - 1$  éléments est de présentation finie ».

Posons  $\mathcal{I} = \mathcal{A}a_1 + \dots + \mathcal{A}a_n = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ , où  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{A}a_1 + \dots + \mathcal{A}a_{n-1}$  et  $\mathcal{I}_2 = \mathcal{A}a_n$  sont des idéaux de présentation finie d'après  $H_n$ . Nous allons montrer que  $\mathcal{I}$  est de présentation finie.

Pour cela, commençons par prouver que

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \longrightarrow \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \longrightarrow \mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \longrightarrow 0 \tag{A.4}$$

est une suite exacte.

Définissons  $\varphi : \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \longrightarrow \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$  par  $\varphi((b_1, b_2)) = b_1 + b_2$  pour tout  $b_1 \in \mathcal{I}_1$  et  $b_2 \in \mathcal{I}_2$ . Alors,  $\ker \varphi$  est isomorphe à  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  via l'isomorphisme  $\psi$  défini par  $\psi(b) = (b, -b)$  pour tout  $b \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ . Nous obtenons ainsi la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \longrightarrow 0.$$

La surjectivité de  $\varphi$  conduit à la suite exacte (A.4).

Montrons maintenant que  $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$  est de présentation finie. Nous savons que  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$  sont de présentation finie, et nous avons les suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{1 \times m_1} &\xrightarrow{\cdot P_1} \mathcal{A}^{1 \times (n-1)} \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{I}_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{A} a_i \longrightarrow 0, \\ \mathcal{A}^{1 \times m_2} &\xrightarrow{\cdot P_2} \mathcal{A} \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{I}_2 = \mathcal{A} a_n \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ ,  $\psi_1 = \cdot (a_1 \dots a_{n-1})^T$  et  $\psi_2 = \cdot a_n$  sont des  $\mathcal{A}$ -morphisms, et  $P_1 \in \mathcal{A}^{m_1 \times (n-1)}$  et  $P_2 \in \mathcal{A}^{m_2 \times 1}$  sont des matrices de présentation de  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$ , telles que  $\ker \psi_1 = \text{im}(\cdot P_1)$  et  $\ker \psi_2 = \text{im}(\cdot P_2)$ . Considérons le  $\mathcal{A}$ -morphisme :

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathcal{A}^{1 \times n} &\longrightarrow \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \\ \delta = (\delta_1, \delta_2) &\longmapsto (\psi_1(\delta_1), \psi_2(\delta_2)), \end{aligned}$$

qui envoie  $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathcal{A}^{1 \times n}$  avec  $\delta_1 \in \mathcal{A}^{1 \times (n-1)}$  et  $\delta_2 \in \mathcal{A}$  sur  $(\psi_1(\delta_1), \psi_2(\delta_2)) \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ .

Soit  $(b_1, b_2) \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ . Comme  $b_1 \in \mathcal{I}_1$  et que  $\psi_1$  est surjective, il existe  $\delta_1 \in \mathcal{A}^{1 \times (n-1)}$  tel que  $b_1 = \psi_1(\delta_1)$ . De même, il existe  $\delta_2 \in \mathcal{A}$  tel que  $b_2 = \psi_2(\delta_2)$ . Nous avons donc  $(b_1, b_2) = \psi((\delta_1, \delta_2))$ . Cela prouve que  $\psi$  est surjective. Montrons maintenant que

$$\ker \psi = \text{im}(\cdot P), \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\delta \in \ker \psi$  et écrivons  $\delta = (\delta_1, \delta_2)$  avec  $\delta_1 \in \mathcal{A}^{1 \times (n-1)}$  et  $\delta_2 \in \mathcal{A}$ . Par définition de  $\psi$ ,  $\psi(\delta) = 0$  implique que  $\psi_1(\delta_1) = 0$  et  $\psi_2(\delta_2) = 0$ . Étant donné que  $\ker \psi_1 = \text{im}(\cdot P_1)$ , il existe  $\mu_1 \in \mathcal{A}^{1 \times m_1}$  tel que  $\delta_1 = \mu_1 P_1$ . De même, il existe  $\mu_2 \in \mathcal{A}^{1 \times m_2}$  tel que  $\delta_2 = \mu_2 P_2$ . Nous avons donc

$$\delta = (\mu_1 P_1, \mu_2 P_2) = (\mu_1 \quad \mu_2) P \in \text{im}(\cdot P),$$

ce qui prouve que  $\ker \psi = \text{im}(\cdot P)$ . Nous obtenons ainsi la suite exacte suivante :

$$\mathcal{A}^{1 \times (m_1 + m_2)} \xrightarrow{\cdot P} \mathcal{A}^{1 \times n} \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \longrightarrow 0.$$

Cela prouve que  $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$  est finiment présenté.

En résumé, nous avons la suite exacte (A.4) dans laquelle  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  est de type fini par 2.(b) et  $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$  est finiment présenté. En appliquant le résultat du lemme A.2.3, nous obtenons que  $\mathcal{I}$  est finiment présenté ce qui prouve finalement que  $\mathcal{A}$  est cohérent, c'est-à-dire que nous avons 1.

Nous allons maintenant prouver que 1. implique 2., c'est-à-dire 2.(a) et 2.(b). Soit  $\mathcal{A}$  un anneau cohérent et  $a \in \mathcal{A}$ . Nous avons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{ann}_{\mathcal{A}}(a) \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} a \longrightarrow 0,$$

où  $\mathcal{A}$  est un  $\mathcal{A}$ -module de type fini (généré par l'élément unité 1) et  $\mathcal{A} a$  est de présentation finie, car  $\mathcal{A} a$  est de type fini et  $\mathcal{A}$  est cohérent. D'après le lemme A.2.2,  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(a)$  est donc de type fini, c'est-à-dire que nous avons 2.(a).

Maintenant, soient  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  deux idéaux de type fini de  $\mathcal{A}$ . Soit  $(u_i)_{i \in [1, m]}$  une famille de générateurs de l'idéal  $\mathcal{I}$  et  $(v_j)_{j \in [1, n]}$  une famille de générateurs de l'idéal  $\mathcal{J}$ . Si  $a \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ , alors  $a$  peut s'écrire comme

$$a = \sum_{i=1}^m a_i u_i = \sum_{j=1}^n b_j v_j,$$

où  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathcal{A}$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
a \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J} &\iff \sum_{i=1}^m a_i u_i - \sum_{j=1}^n b_j v_j = 0, \\
&\iff (a_1 \ \dots \ a_m) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} - (b_1 \ \dots \ b_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0, \\
&\iff (a_1 \ \dots \ a_m \ b_1 \ \dots \ b_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} = 0, \\
&\iff (a_1 \ \dots \ a_m \ b_1 \ \dots \ b_n) \in \text{ann}_{\mathcal{A}}(.U),
\end{aligned}$$

où  $U = (u_1 \ \dots \ u_m \ -v_1 \ \dots \ -v_n)^T$ . De plus,  $\mathcal{A}U$  est un idéal de  $\mathcal{A}$  de type fini généré par  $u_1, \dots, u_m, -v_1, \dots, -v_n$ . Puisque  $\mathcal{A}$  est cohérent,  $\mathcal{A}U$  est de présentation finie. En outre, nous avons la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \text{ann}_{\mathcal{A}}(.U) \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}U \longrightarrow 0,$$

où  $\mathcal{A}$  est de type fini et  $\mathcal{A}U$  est de présentation finie. Alors, d'après le lemme [A.2.2](#),  $\text{ann}_{\mathcal{A}}(.U)$  est de type fini, ce qui implique que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  est de type fini, c'est-à-dire que nous avons 2.(b), ce qui termine la démonstration.  $\square$

## Annexe B

# Bavula : un package Maple pour l'étude des systèmes sur $\mathbb{I}_1$

Nous avons développé un package `Maple`, appelé `Bavula` ([69]), contenant une implémentation des différents algorithmes développés dans ce mémoire. Il est basé sur les packages :

- `OreModules` pour le calcul dans  $\mathbb{A}_1$  [59],
- `IntegrableConnections` pour le calcul des solutions polynomiales de  $\mathbb{A}_1$ -modules holonomes [12],
- `IntDiffOp` pour le calcul des formes normales sur  $\mathbb{I}_1$  [103].

Ce package, en cours de développement, vise à rendre effectives certaines méthodes théoriques développées notamment par `Bavula` dans ses travaux sur cet anneau. Il intègre un ensemble de commandes de bas niveau permettant de résoudre les systèmes de la forme  $AX = B$  et  $XA = B$  avec  $A$  et  $B$  des matrices à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$  (voir chapitre 6). Une interaction avec le package `CapAndHomAlg` (voir [8]) ouvrira automatiquement un accès à une large gamme d'outils d'algèbre homologique constructive. L'objectif à terme est de fournir un environnement complet pour le traitement symbolique et homologique des systèmes intégro-différentiels, en étendant progressivement les fonctionnalités du package.

Donnons la liste des fonctions importantes disponibles dans le package `Bavula` ainsi que leur description. Dans un deuxième temps, nous illustrerons des exemples d'utilisation. Par conséquent, cette annexe se veut être un petit guide d'utilisation et de familiarisation pour le lecteur intéressé.

## B.1 Liste des procédures principales du package Bavula

Procédure	Description
InvolutionMat(M)	Calcul de l'involution $\theta(M) = (\theta(m_{i,j}))^T$ de la matrice $M \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . Plus précisément, le coefficient $i, j$ de la matrice $\theta(M)$ est $\theta(m_{j,i})$ où $m_{i,j}$ est le coefficient en position $i, j$ de la matrice $M$ . Autrement dit, $\theta(M)$ est la matrice transposée de la matrice $M$ à laquelle on a appliqué $\theta$ à chaque coefficient.
SyzygyI1(M)	Calcul de $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$ tel que $\ker_{\mathbb{I}_1}(M) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.L)$ .
PolySolsI1(P,w)	Calcul de l'ensemble des solutions polynomiales $v \in \mathbb{k}[t]^{p \times 1}$ du système intégro-différentiel linéaire $P(v) = w$ .
LeftInverseI1(M)	Calcul, s'il existe, d'un inverse à gauche de $M \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ , c'est-à-dire une matrice $Q \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$ telle que $QM = I_p$ , où $I_p$ est la matrice identité de taille $p$ .
RightInverseI1(M)	Calcul, s'il existe, d'un inverse à droite de $M \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ , c'est-à-dire une matrice $Q \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$ telle que $MQ = I_q$ , où $I_q$ est la matrice identité de taille $q$ .
FactorizeI1(M,N)	Calcul, si elle existe, d'une factorisation de $M$ par $N$ à gauche, c'est-à-dire une matrice $Q$ telle que $QN = M$ .

TABLE B.1 – Principales procédures du package Bavula pour le calcul dans l'anneau  $\mathbb{I}_1$ .

**Remarque B.1.1.** Notons que le package `Ore_algebra` de Maple ne contient pas l'implémentation de l'anneau  $\mathbb{B}_1 = \mathbb{k}[H] \langle \sigma, \sigma^{-1} \mid \sigma^\pm H = (H \pm 1) \sigma^\pm \rangle$  des polynômes de Laurent non commutatifs. Une raison est que  $\mathbb{B}_1$  n'est pas une algèbre de Ore au sens de [60] mais la localisation de l'algèbre de Ore  $\mathbb{S} := \mathbb{k}[H] \langle \sigma \mid \sigma H = (H + 1) \sigma \rangle$  (resp.,  $\mathbb{T} := \mathbb{k}[H] \langle \tau \mid \tau H = (H - 1) \tau \rangle$ ) pour l'ensemble de Ore  $\{\sigma^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  (resp.,  $\{\tau^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ) [121]. En revanche,  $\mathbb{B}_1$  est accessible en Singular [111], via CapAndHomAlg [7] et en Mathematica dans le package OreAlgebraicAnalysis [134, 65].

Afin de calculer  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$  dans notre package Bavula, nous avons utilisé les alternatives suivantes :

1. Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\bar{R}_N := \bar{R} \sigma^N \in \mathbb{S}^{q \times p}$ . À l'aide des méthodes de bases de Gröbner décrites à la section 2.4.2.1, nous pouvons calculer une matrice  $M \in \mathbb{S}^{r \times q}$  telle que  $\ker_{\mathbb{S}}(\bar{R}_N) = \text{im}_{\mathbb{S}}(.M)$ . Nous avons la suite exacte suivante de  $\mathbb{S}$ -modules à gauche

$$\mathbb{S}^{1 \times r} \xrightarrow{.M} \mathbb{S}^{1 \times q} \xrightarrow{.\bar{R}_N} \mathbb{S}^{1 \times p}.$$

Le fait que  $\mathbb{B}_1$  soit une localisation de  $\mathbb{S}$  implique que  $\mathbb{B}_1$  est un  $\mathbb{S}$ -module plat à droite. En appliquant le fonctor  $\mathbb{B}_1 \otimes_{\mathbb{S}} \bullet$  à la suite exacte précédente et en utilisant  $\mathbb{B}_1 \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{S}^{1 \times l} \cong \mathbb{B}_1^{1 \times l}$ , nous obtenons alors suite exacte de  $\mathbb{B}_1$ -modules à gauche

$$\mathbb{B}_1^{1 \times r} \xrightarrow{.M} \mathbb{B}_1^{1 \times q} \xrightarrow{.\bar{R}_N} \mathbb{B}_1^{1 \times p},$$

ce qui montre que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}_N) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(.M)$ . Finalement, nous avons  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}_N) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(.M)$  car  $\sigma$  est un élément inversible de  $\mathbb{B}_1$ .

2. Soit  $N' \in \mathbb{N}$  tel que  $\bar{R}_{N'} := \sigma^{N'} \bar{R} \in \mathbb{S}^{q \times p}$ . À l'aide des méthodes de bases de Gröbner décrites à la section 2.4.2, nous pouvons calculer une matrice  $M' \in \mathbb{S}^{r \times q}$  telle que  $\ker_{\mathbb{S}}(\bar{R}_{N'}) = \text{im}_{\mathbb{S}}(.M')$ . Nous avons la suite exacte suivante de  $\mathbb{S}$ -modules à gauche

$$\mathbb{S}^{1 \times r} \xrightarrow{.M'} \mathbb{S}^{1 \times q} \xrightarrow{.\bar{R}_{N'}} \mathbb{S}^{1 \times p}.$$

Le fait que  $\mathbb{B}_1$  soit une localisation de  $\mathbb{S}$  implique que  $\mathbb{B}_1$  est un  $\mathbb{S}$ -module plat à droite. En appliquant le fonctor  $\mathbb{B}_1 \otimes_{\mathbb{S}} \bullet$  à la suite exacte précédente et en utilisant  $\mathbb{B}_1 \otimes_{\mathbb{S}} \mathbb{S}^{1 \times l} \cong \mathbb{B}_1^{1 \times l}$ , nous obtenons alors suite exacte

de  $\mathbb{B}_1$ -modules à gauche

$$\mathbb{B}_1^{1 \times r} \xrightarrow{.M'} \mathbb{B}_1^{1 \times q} \xrightarrow{.\bar{R}_{N'}} \mathbb{B}_1^{1 \times p},$$

ce qui montre que  $\ker_{\mathbb{B}_1}(. \bar{R}_{N'}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(.M')$ . Finalement, nous avons  $\ker_{\mathbb{B}_1}(. \bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(.M' \sigma^{N'})$  car, en utilisant le fait que  $\sigma$  est un élément inversible de  $\mathbb{B}_1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(. \bar{R}) &\iff \bar{\lambda} \bar{R} = 0 \\ &\iff \bar{\lambda} \sigma^{-N'} \bar{R}_{N'} = 0 \\ &\iff \bar{\lambda} \sigma^{-N'} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(. \bar{R}_{N'}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(.M') \\ &\iff \exists \bar{\mu} \in \mathbb{B}_1^{1 \times r} : \bar{\lambda} \sigma^{-N'} = \bar{\mu} M' \\ &\iff \exists \bar{\mu} \in \mathbb{B}_1^{1 \times r} : \bar{\lambda} = \bar{\mu} M' \sigma^{N'} \\ &\iff \bar{\lambda} \in \text{im}_{\mathbb{B}_1}(.M' \sigma^{N'}). \end{aligned}$$

Le calcul de factorisations sur  $\mathbb{B}_1$  peut se faire en utilisant le même type de stratégie que pour le calcul de noyau, c'est-à-dire en se ramenant à un calcul de factorisation dans  $\mathbb{S}$ .

## B.2 Exemples d'utilisation du package Bavula

Ces premières lignes de codes sont communes à tous les exemples et permettent de charger les packages `OreModules`, `IntDiffOp`, et `IntegrableConnections` sur lesquels est basé notre package nommé `Bavula`.

```
> with(LinearAlgebra):
> with(IntegrableConnections):
> with(OreModules):
> with(IntDiffOp):
> with(IntDiffOperations):
> IntDiffAlgebra(variable = x):
> with(Bavula):
```

Par ailleurs, on définit également les algèbres  $\mathbb{A}_1$  et l'algèbre qui émule  $\mathbb{B}_1$ .

```
> Alg := DefineOreAlgebra(diff=[dt,t],polynom=[t],comm=[s]):
> B1 := DefineOreAlgebra(shift=[tau,G],dual_shift=[sigma,H],polynom=[G,H]):
```

**Remarque B.2.1.** La variable «  $x$  » est utilisée dans les packages `Maple`, tandis que le mémoire adopte la variable «  $t$  ». De même, l'opérateur «  $\partial$  » y est représenté par «  $D$  » en sortie et par «  $d$  » en entrée. L'opérateur d'évaluation «  $e$  » correspond à «  $E(0)$  » en sortie et «  $e(0)$  » en entrée. Enfin, l'opérateur intégral «  $I$  » est noté «  $A$  » en sortie et «  $a$  » en entrée.

## B.2.1 Solutions polynomiales d'une matrice de $\mathbb{I}_1$

### Exemple B.2.1.

Soient  $v_1, v_2$  et  $v_3$  des polynômes de  $\mathbb{k}[t]$ . Regardons le système intégro-différentiel suivant :

$$\begin{cases} v_1(t) + \int_0^t v_2(s) ds + t v_3'(t) & = t^3 + 4t \\ t v_1'(t) + v_2(0) + t v_3(0) & = t^2 + 2t + 4 \end{cases}$$

Posons alors  $P = \begin{pmatrix} 1 & I & t\partial \\ t\partial & e & te \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_1^{2 \times 3}$  et  $w = \begin{pmatrix} t^3 + 4t \\ t^2 + 2t + 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{2 \times 1}$ . On cherche  $v \in \mathbb{k}[t]^{3 \times 1}$  tel que  $P(v) = w$ .

Définissons les matrices  $P$  et  $w$  grâce à la fonction `PolySolsI1` et calculons les solutions polynomiales  $v$  du système  $P(v) = w$ .

```
> P := Matrix(2,3,[1, a, x.D, x.D, E(0), x.E(0)]):
> w := Matrix(2,1,[x^3 + 4*x, x^2 + 2*x + 4]):
> v := PolySolsI1(P, w);
```

$$v := \begin{bmatrix} x^3 c_1 + x^2 c_3 + p_{1,1} x \\ x^2 c_2 + x c_4 + 4 + \left(\frac{d^2}{dx^2} v_1(x)\right) x^3 + 5 x^2 \left(\frac{d}{dx} v_1(x)\right) + 4 x v_1(x) \\ -x^2 v_1(x) + 2 + (-x - 1) p_{1,1} \end{bmatrix}.$$

La fonction polynomiale  $v_1$  et les constantes  $p_{1,1}, c_1, c_3$  et  $c_4$  sont arbitraires.

L'exemple suivant est plus conséquent en termes de taille et sera donc présenté en format paysage.

### Exemple B.2.2.

Définissons les matrices  $P$  et  $w$  puis appliquons la fonction `PolySolsI1` pour calculer la solution polynomiale  $v$  du système  $P(v) = w$ .

```
> P := Matrix(2,10,[d^4, e(0)*x, e(0), e(0)+x*e(0), a^2, 0, x*e(0), x^2*e(0), d, d, x^2*a, 0, 0, 0, d, e(0), a, 0]);
> w := Matrix(2,1,[0, 0]);
> v := PolySolsI1(P, w);
```

$$\begin{aligned}
& p_{1,5}x^5 + p_{1,4}x^4 + p_{1,3}x^3 + p_{1,2}x^2 + p_{1,1}x + p_{1,0} + x^6v_1(x) \\
2p_{9,0} + x^6\frac{d^6}{dx^6}v_1(x) + 36x^5\frac{d^5}{dx^5}v_1(x) + 450x^4\frac{d^4}{dx^4}v_1(x) + 2400x^3\frac{d^3}{dx^3}v_1(x) + 5400x^2\frac{d^2}{dx^2}v_1(x) + 4320x\frac{d}{dx}v_1(x) \\
& + (-x^6 + 720)v_1(x) - x^6v_2(x) - x^8v_3(x) - x^7p_{3,5} - x^6p_{3,4} + (-p_{1,5} - p_{2,5} - p_{3,3})x^5 \\
& + (-p_{1,4} - p_{2,4} - p_{3,2})x^4 + (-p_{2,3} + p_{4,0} - p_{1,3})x^3 + (-p_{2,2} - p_{3,0} - p_{1,2})x^2 + (-p_{8,0} - p_{1,1})x - p_{1,0} - p_{2,0} \\
& x^6\frac{d^2}{dx^2}v_3(x) + 12x^5\frac{d}{dx}v_3(x) + x^6\frac{d}{dx}v_4(x) + 30x^4v_3(x) + 6x^5v_4(x) + 5p_{4,5}x^4 + 4(5p_{3,5} + p_{4,4})x^3 \\
& + 3(4p_{3,4} + p_{4,3})x^2 + 2(3p_{3,3} + p_{4,2})x + 2p_{3,2} + p_{4,1} \\
p_{5,5}x^5 + p_{5,4}x^4 + p_{5,3}x^3 + p_{5,2}x^2 + p_{5,1}x - 24p_{1,4} + 120p_{1,5} + 2p_{2,2} + 2p_{3,0} - p_{6,0} + x^6v_5(x) \\
& p_{6,5}x^5 + p_{6,4}x^4 + p_{6,3}x^3 + p_{6,2}x^2 + p_{6,1}x + p_{6,0} + x^6v_6(x) \\
p_{7,5}x^5 + p_{7,4}x^4 + p_{7,3}x^3 + p_{7,2}x^2 + p_{7,1}x - 120p_{1,5} - 2p_{2,2} - 2p_{3,0} + x^6v_7(x) \\
-2p_{9,0} - 720v_1(x) - 4320x\frac{d}{dx}v_1(x) - 5400x^2\frac{d^2}{dx^2}v_1(x) - 2400x^3\frac{d^3}{dx^3}v_1(x) - 450x^4\frac{d^4}{dx^4}v_1(x) \\
& - 36x^5\frac{d^5}{dx^5}v_1(x) - x^6\frac{d^6}{dx^6}v_1(x) \\
p_{8,5}x^5 + p_{8,4}x^4 + p_{8,3}x^3 + p_{8,2}x^2 + p_{8,1}x + p_{8,0} + x^6v_8(x) \\
x^6\frac{d^2}{dx^2}v_2(x) + 12x^5\frac{d}{dx}v_2(x) + 2x^7\frac{d}{dx}v_3(x) - x^8\frac{d}{dx}v_4(x) + 30x^4v_2(x) + 30x^4v_2(x) + 14x^6v_3(x) - 8x^7v_4(x) \\
& - 7x^6p_{4,5} + (12p_{3,5} - 6p_{4,4})x^5 + (10p_{3,4} - 5p_{4,3})x^4 + (-4p_{4,2} + 20p_{2,5} + 8p_{3,3})x^3 \\
& + (-3p_{4,1} + 12p_{2,4} + 6p_{3,2})x^2 + (-6p_{4,0} + 6p_{2,3})x + 2p_{3,0} + 2p_{2,2} \\
p_{9,5}x^5 + p_{9,4}x^4 + p_{9,3}x^3 + p_{9,2}x^2 + p_{9,1}x + p_{9,0} + x^6v_9(x)
\end{aligned}$$

$v :=$

Les polynômes  $v_i$  et les constantes  $p_{i,j}$  sont arbitraires.

## B.2.2 Calcul du noyau d'une matrice de $\mathbb{I}_1$

Soit  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ , on cherche  $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  vérifiant  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.L)$ .

### Exemple B.2.3.

On définit la matrice  $R$  dans Maple et on applique la fonction `SyzygyI1` de Bavula.

```
> R := Matrix(5,5,[d+e(0),1,a,0,a,d,0,0,a,d,x.a - a.x,x,0,0,1,2,a,x,d+1,d^2,0,x.e(0),x.a,0,0]);
```

$$R := \begin{bmatrix} D + E[0] & 1 & A & 0 & A \\ D & 0 & 0 & A & D \\ x \cdot A - A \cdot x & x & 0 & 0 & 1 \\ 2 & A & x & 1 + D & D^2 \\ 0 & x \cdot E[0] & x \cdot A & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> L := SyzygyI1(R);
```

$$L := [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ E[0] ]$$

Vérifions que  $LR = 0$  avec la fonction `MultMat`.

```
> MultMat(L, R);
```

$$[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]$$

### Exemple B.2.4.

On définit la matrice  $R$  en Maple et on lui applique la fonction `SyzygyI1` de Bavula.

```
> R := Matrix(3,3,[d^3+e(0), x*a, a, x^3+x, e(0), d, 0, 0, a]);
```

$$R := \begin{bmatrix} D^3 + E[0] & x \cdot A & A \\ x^3 + x & E[0] & D \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

```
> L := SyzygyI1(R);
```

$$L := \begin{bmatrix} 4838400 \cdot E[0] + 241920 \cdot E[0] \cdot D^2 & -483840 \cdot E[0] - 4838400 \cdot E[0] \cdot D - 40320 \cdot E[0] \cdot D^6 & 241920 \cdot E[0] \cdot D^2 + 4838400 \cdot E[0] \cdot D^3 + 40320 \cdot E[0] \cdot D^8 \\ 25200 \cdot E[0] \cdot D & -604800 \cdot E[0] \cdot D + 100800 \cdot E[0] \cdot D^3 - 5040 \cdot E[0] \cdot D^5 & -25200 \cdot E[0] \cdot D + 604800 \cdot E[0] \cdot D^3 - 100800 \cdot E[0] \cdot D^5 + 5040 \cdot E[0] \cdot D^7 \\ 2880 \cdot E[0] & -2880 \cdot E[0] \cdot D + 8640 \cdot E[0] \cdot D^2 - 720 \cdot E[0] \cdot D^4 & 2880 \cdot E[0] \cdot D^3 - 8640 \cdot E[0] \cdot D^4 + 720 \cdot E[0] \cdot D^6 \\ 0 & 0 & E[0] \end{bmatrix}$$

Vérifions que  $LR = 0$  avec la fonction `MultMat` qui effectue le produit de deux matrices à coefficients dans  $\mathbb{I}_1$ .

```
> MultMat(L, R);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### B.2.3 Inverse à gauche, à droite et factorisation

#### Exemple B.2.5.

Définissons une matrice  $M$  dont on veut calculer, s'il existe, un inverse à gauche  $U$ .

```
> M := Matrix(4, 3, [a, 0, e(0), 0, 1, x.e(0), 0, 1, x^2*d, 1, x.a, 1]);
```

$$M := \begin{bmatrix} A & 0 & E[0] \\ 0 & 1 & x \cdot E[0] \\ 0 & 1 & x^2 \cdot D \\ 1 & x \cdot A & 1 \end{bmatrix}$$

```
> U := LeftInverseI1(M);
```

$$U := \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ x \cdot E[0] \cdot D & 1 & 0 & -x \cdot E[0] \\ -D - \frac{1}{2}x^3 \cdot E[0] \cdot D & -x \cdot A & 0 & 1 + \frac{1}{2}x^3 \cdot E[0] \end{bmatrix}$$

On vérifie l'égalité matricielle  $UM = I_3$  grâce à la fonction `MultMat`.

```
> I_3 := MultMat(U, M);
```

$$I_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Faisons maintenant l'opération inverse et factorisons  $I_3$  par  $M$  grâce à la fonction `FactorizeI1`.

```
> F := FactorizeI1(I_3, M);
```

$$F := \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ -x \cdot E[0] & 1 & 0 & 0 \\ -D + \frac{1}{2}x^3 \cdot E[0] & -x \cdot A & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On remarque que l'inverse à gauche  $F$  obtenu n'est pas unique, comme expliqué précédemment au chapitre 6. Vérifions que la différence entre ces deux inverses appartient bien au noyau de  $M$ .

```
> V := AddMat(U, map(X->MultiplyOperator(X, -1), F));
```

$$G := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x \cdot E[0] \cdot D + x \cdot E[0] & 0 & 0 & -x \cdot E[0] \\ -\frac{1}{2}x^3 \cdot E[0] \cdot D - \frac{1}{2}x^3 \cdot E[0] & 0 & 0 & \frac{1}{2}x^3 \cdot E[0] \end{bmatrix}$$

```
> MultMat(V, M);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculons maintenant une matrice  $L$  définissant le noyau de  $M$  et une factorisation de  $V$  par  $L$ .

> L := SyzygyI1(M);

$$L := \begin{bmatrix} -2x + x^2D + 2A + \left(\frac{3}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^2\right)E[0]D & \left(\frac{1}{3}x^3 - 1\right)A + \frac{2}{3}Ax^3 & A & -x^2 + 2Ax + \left(-\frac{3}{10}x^5 + \frac{1}{2}x^2\right)E[0] \\ -E[0] - E[0]D & 0 & 0 & E[0] \end{bmatrix}$$

> FactorizeI1(V, L);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -x \cdot E[0] \\ 0 & \frac{1}{2}x^3 \cdot E[0] \end{bmatrix}$$

Ainsi,  $V$  se factorise bien par  $L$ .

Regardons maintenant si  $M$  admet un inverse à droite avec la fonction `RightInverseI1`.

> RightInverseI1(M);

[]

La matrice  $M$  n'admet pas d'inverse à droite. Retrouvons ce résultat en utilisant les fonctions `InvolutionMat` et `LeftInverseI1`.

> InvM := InvolutionMat(M);

$$\text{InvM} := \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2D^2 + xD^3 \\ E[0] & E[0]D & 2xD^2 + x^2D^3 & 1 \end{bmatrix}$$

> LeftInverseI1(InvM);

[]

On retrouve bien que  $M$  n'admet pas d'inverse à droite.

## Annexe C

# Publications

Les quatre articles présentés dans cette annexe sont des travaux que nous avons publiés dans les actes de la conférence *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation* (ISSAC).



# Further results on the computation of the annihilators of integro-differential operators

Thomas Cluzeau  
Univ. Limoges, CNRS, XLIM, UMR  
7252, F-87000 Limoges  
France  
thomas.cluzeau@unilim.fr

Camille Pinto  
Sorbonne University – Inria Paris  
Paris, France  
camille.pinto@inria.fr

Alban Quadrat  
Sorbonne University – Inria Paris  
Paris, France  
alban.quadrat@inria.fr

## ABSTRACT

This paper exposes some effective aspects of the algebra of linear ordinary integro-differential operators with polynomial coefficients. More precisely, we prove that the annihilator of an evaluation operator is a finitely generated ideal which can be explicitly characterized and computed. This is an advance towards the development of an effective elimination theory for ordinary integro-differential operators and an effective study of linear systems of integro-differential equations with polynomial coefficients.

## CCS CONCEPTS

• **Computing methodologies** → **Symbolic and algebraic manipulation**; • **Symbolic and algebraic algorithms** → *Algebraic algorithms*.

## KEYWORDS

Non-commutative operators, integro-differential operators, annihilator, coherence

### ACM Reference Format:

Thomas Cluzeau, Camille Pinto, and Alban Quadrat. 2023. Further results on the computation of the annihilators of integro-differential operators. In *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2023 (ISSAC 2023), July 24–27, 2023, TromsÅ, Norway*. ACM, New York, NY, USA, 9 pages. <https://doi.org/10.1145/3597066.3597083>

## 1 INTRODUCTION AND MOTIVATION

*Algebraic analysis*, more specifically, *algebraic D-module theory*, where  $D$  stands for “differential”, is a mathematical field which studies linear systems of ordinary or partial differential equations using algebraic theories such as ring theory of differential operators, module theory, homological algebra [2, 6, 9]. The main idea of this theory is to use a correspondence between linear systems of differential equations and *finitely presented left modules over a ring of differential operators* (e.g., the *Weyl algebra* of differential operators with polynomial coefficients). This theory is nowadays well-known in fundamental mathematics. In the last decades, the

development of an effective approach to algebraic  $D$ -module theory was studied by the computer algebra community. It relies on an effective differential elimination theory using, e.g., Gröbner or Janet basis methods. Different softwares can nowadays handle effective aspects of algebraic analysis: Macaulay2, Maple (*OreModules*), Singular, HomAlg, etc.

Based on our experience in effective algebraic  $D$ -modules theory, we aim at extending the algebraic analysis approach to handle linear systems of ordinary integro-differential equations with polynomial coefficients. In other words, we would like to replace the Weyl algebra by the ring of ordinary integro-differential operators with polynomial coefficients, denoted by  $\mathbb{I}_1$  in what follows. Contrary to the Weyl algebra case, Bavula proved in [1] that  $\mathbb{I}_1$  is not a noetherian ring, a fact which seems to compromise the possibility to develop an effective integro-differential elimination theory, and thus, an effective algebraic analysis approach to ordinary integro-differential linear systems. However, he also proved that  $\mathbb{I}_1$  is *coherent* [1], namely, that every finitely generated left/right ideal of  $\mathbb{I}_1$  is *finitely presented* [2, 18, 20]. As explained below, this result is at the core of the future development of an effective integro-differential theory. Yet, Bavula’s proof of the coherence of  $\mathbb{I}_1$  remains not algorithmic.

This paper aims at effectively characterizing the *annihilator* of an integro-differential operator with polynomial coefficients, i.e., of an element of  $\mathbb{I}_1$ . In [17], such an effective characterization was obtained and implemented for an element of  $\mathbb{I}_1$  which is not a so-called *evaluation operator*. In this paper, we handle the second case, namely, the case of an element of  $\mathbb{I}_1$  which is an evaluation operator. This result completes the algorithmic characterization of the first of the two standard conditions characterizing the coherence property of  $\mathbb{I}_1$ . The second one asserts that the intersection of two finitely generated left/right ideals is also finitely generated. This problem will be studied in a future publication.

To further motivate this work, let us explain why the development of an effective version of the coherence property of  $\mathbb{I}_1$  plays a central role towards an effective study of linear systems of integro-differential equations with polynomial coefficients and towards the development of dedicated implementations built upon modern computer algebra systems. Within the algebraic analysis approach, a linear system of integro-differential equations with polynomial coefficients is defined by a matrix  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ , i.e., by  $R\eta = 0$ , where  $\eta \in \mathcal{F}^{p \times 1}$  and  $\mathcal{F}$  is a left  $\mathbb{I}_1$ -module (e.g.,  $\mathbb{k}[t]$ ,  $C^\infty(\mathbb{R})$ ). It can be proved that the linear integro-differential system  $R\eta = 0$  is associated with the finitely presented left  $\mathbb{I}_1$ -module  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1^{1 \times p} / \left( \mathbb{I}_1^{1 \times q} R \right)$ . Hence, the theory of linear integro-differential systems deals with the category of finitely presented left  $\mathbb{I}_1$ -modules [2, 9]. Now, a standard result in module

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. Copyrights for components of this work owned by others than the author(s) must be honored. Abstracting with credit is permitted. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee. Request permissions from [permissions@acm.org](mailto:permissions@acm.org).  
ISSAC 2023, July 24–27, 2023, TromsÅ, Norway  
© 2023 Copyright held by the owner/author(s). Publication rights licensed to ACM.  
ACM ISBN 979-8-4007-0039-2/23/07...\$15.00  
<https://doi.org/10.1145/3597066.3597083>

theory [2, 18, 20] asserts that if  $\mathcal{R}$  is a left coherent ring, then a left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is *coherent* (namely,  $\mathcal{M}$  is a finitely generated left  $\mathcal{R}$ -module and all of its finitely generated left  $\mathcal{R}$ -submodules are finitely presented) if and only if  $\mathcal{M}$  is finitely presented. Combining this result with the fact that  $\mathbb{I}_1$  is coherent, we obtain that the finitely presented left  $\mathbb{I}_1$ -module  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R)$  – associated with the linear system  $R\eta = 0$  – is coherent. In other words, due to the coherence property of  $\mathbb{I}_1$ , the linear system theory over  $\mathbb{I}_1$  deals with the study of the category of left coherent  $\mathbb{I}_1$ -modules. Now, standard theorems on finitely generated modules over noetherian rings can be extended to finitely presented modules over coherent rings. Moreover, the coherence property is compatible with all the standard algebraic operations (e.g., direct sum, intersection, quotient, tensor product, homomorphism, kernel, image, cokernel). For more details, see [2, 18, 20]. Therefore, if the coherence property of  $\mathbb{I}_1$  is made algorithmic and implemented in computer algebra systems, then the algebraic side of linear system theory over  $\mathbb{I}_1$  can also be made effective. Note that, to our knowledge,  $\mathbb{I}_1$  would be the first example of a coherent but not noetherian ring implemented in a computer algebra system, that has important applications (e.g., calculus).

## 2 THE RING OF INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS

In what follows, let  $\mathbb{k}$  be an algebraically closed field of characteristic 0 (e.g.,  $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{Q}}$  or  $\mathbb{C}$ ),  $t_0$  a base point of  $\mathbb{k}$ . Let us consider the noncommutative  $\mathbb{k}$ -endomorphism ring  $\mathcal{E} = \text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  of  $\mathbb{k}[t]$  and the  $\mathbb{k}$ -linear endomorphisms defined on the basis  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $\mathbb{k}[t]$  as follows:

$$\begin{aligned} t : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & t^n &\longmapsto t^{n+1}, \\ \partial : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & t^n &\longmapsto n t^{n-1}, \\ I : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & t^n &\longmapsto \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t_0^{n+1}}{n+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

These  $\mathbb{k}$ -endomorphisms respectively define the following linear operators acting on  $\mathbb{k}[t]$ :

$$\begin{aligned} t : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longmapsto t p, \\ \partial : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longmapsto p', \\ I : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longmapsto \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

*Definition 2.1 ([1]).*  $\mathbb{A}_1$  is the  $\mathbb{k}$ -subalgebra of  $\mathcal{E}$  generated by  $t$  and  $\partial$ , and  $\mathbb{I}_1$  is the  $\mathbb{k}$ -subalgebra of  $\mathcal{E}$  generated by  $t$ ,  $\partial$ , and  $I$ .

Then,  $\mathbb{A}_1(\mathbb{k})$ , or simply  $\mathbb{A}_1$ , is called the *Weyl algebra* defining the ordinary differential operators with polynomial coefficients. Similarly,  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$ , or simply  $\mathbb{I}_1$ , is the *ring of ordinary integro-differential operators* in the variable  $t$  with polynomial coefficients in  $\mathbb{k}[t]$ .

In particular, we have the inclusion  $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{I}_1$ . *The first fundamental theorem of calculus* can be rewritten as  $\partial I = 1$ , where 1 stands for the identity of  $\mathcal{E}$ . Moreover, we can see that for every  $p \in \mathbb{k}[t]$ ,  $(1 - I\partial)(p) = p(t_0)$ , which shows that the operator

$$e : \mathbb{k}[t] \longrightarrow \mathbb{k}[t], \quad p \longmapsto p(t_0),$$

belongs to  $\mathbb{I}_1$ . We shall refer to it as the *evaluation operator*. Note that  $e$  is multiplicative, i.e.,  $e(p_1 p_2) = e(p_1) e(p_2)$ , for all  $p_1, p_2 \in \mathbb{k}[t]$ .

*The second fundamental theorem of calculus* then rewrites  $I\partial = 1 - e$ . In what follows, we shall simply set  $t_0$  to 0.

Contrary to its subring  $\mathbb{A}_1$ , the ring  $\mathbb{I}_1$  has nontrivial zero divisors since  $e t = 0$  and  $e I = 0$ .

For  $p \in \mathbb{k}[t]$ , we have the following fundamental identities in  $\mathbb{I}_1$ :

$$\partial p = p \partial + p', \quad \partial I = 1, \quad I \partial = 1 - e, \quad e p = e(p) e = p(0) e.$$

See, e.g., [15]. We can deduce the following extra identities:

$$\begin{aligned} e^2 &= e, \quad \partial e = 0, \quad I p \partial = p - e(p) e - I p', \\ I p I &= I(p) I - I I(p), \quad I p e = I(p) e. \end{aligned}$$

Note that the first of the aforementioned identities corresponds to the *Leibniz rule* and the last but one to *the integration by parts*.

We state again that an element  $P$  of  $\mathbb{I}_1$  can be written uniquely as

$$P = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i + \sum_{j=0}^m b_j I c_j + \sum_{k=0}^q f_k e \partial^k, \quad (2)$$

where  $a_i, b_j, c_j, f_k \in \mathbb{k}[t]$  and  $n, m, q \in \mathbb{N}$ . For more details, see [1, 10, 17]. The identity (2) is called the *normal form* of  $P$ .

For instance, let us give the explicit normal form of  $I^n$ . First, setting  $p = 1$  in the identity  $I = I(p) I - I I(p)$  and using  $I(1) = t$ , we obtain the identity  $I^2 = t I - I t$ , which corresponds to *the double integration*. More generally, we have the following explicit result on *multiple integrations* (that does not seem to appear in the literature).

**PROPOSITION 2.2.** *The operator  $I^n$  can be written as a polynomial of degree 1 in  $I$ . More precisely, we have*

$$\forall n \geq 1, \quad I^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}. \quad (3)$$

**PROOF.** The operators  $I^n$  and  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}$  are two  $\mathbb{k}$ -endomorphisms of  $\mathbb{k}[t]$ , i.e., two linear operators uniquely determined by their value on the basis  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $\mathbb{k}[t]$ . Let  $m$  be a non-negative integer. On the one hand, we have

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} (t^m) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \frac{(-1)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} I (t^{n-1-k+m}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \frac{(-1)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \frac{t^{n-k+m}}{(n-k+m)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{n+m}}{k! (n-k+m)} \frac{(-1)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}. \end{aligned}$$

On the other hand, we have

$$I^n (t^m) = I^{n-1} \left( \frac{t^{m+1}}{m+1} \right) = \dots = \frac{t^{n+m}}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}. \quad (4)$$

To conclude, we thus have to prove the following identity:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{k! (n-1-k)! (n-k+m)} = \frac{1}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}. \quad (5)$$

To do so, let us note  $c = \frac{1}{(m+1) \dots (m+n)}$  and compute its partial fraction expansion, i.e., write it as  $c = \frac{\alpha_1}{m+1} + \dots + \frac{\alpha_n}{m+n}$ , where  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ . The  $k^{\text{th}}$  coefficient  $\alpha_k$  of this decomposition is given

by  $\alpha_k = [(m+k)c]_{m=-k} = \frac{1}{(-k+1)(-k+2)\dots(-1)(n-k)!}$  so that we get  $\alpha_k = \frac{1}{(-1)^{k-1}(k-1)!(n-k)!}$ . Hence, we have  $\alpha_{n-k} = \frac{(-1)^{n-k-1}}{k!(n-k-1)!}$ , which proves (5) and thus (3).  $\square$

Note that Formula (3) holds for any  $t_0 \in \mathbb{k}$  in the definition of  $I$  (see (1)) and not only for  $t_0 = 0$ .

**PROPOSITION 2.3** ([1]). *The set  $\langle e \rangle = \mathbb{I}_1 e \mathbb{I}_1$  is the only two-sided ideal of  $\mathbb{I}_1$ . Moreover, we have:*

$$\langle e \rangle = \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial] = \left\{ \sum_{k=0}^q f_k e \partial^k \mid f_k \in \mathbb{k}[t], q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Using (2), every  $P \in \mathbb{I}_1$  can be decomposed as  $P = P_1 + P_2 + P_3$ , where  $P_1 \in \mathbb{A}_1$ ,  $P_2 \in \mathcal{I} = \left\{ \sum_{j=0}^m b_j I c_j \mid b_j, c_j \in \mathbb{k}[t], m \in \mathbb{N} \right\}$ , and  $P_3 \in \langle e \rangle$ . Moreover, using the identity  $I p I = I(p)I - I I(p)$  for all  $p \in \mathbb{k}[t]$ , we can see that  $\mathcal{I}$  is a nonunital ring.

If  $p \in \mathbb{k}[t]$ , then we note

$$\mathcal{K}_{\mathbb{I}_1}(p) = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P(p) = 0\},$$

where  $P(p)$  stands for the application of (1) to  $p$ . Note that  $\mathcal{K}_{\mathbb{I}_1}(p)$  is a left ideal of  $\mathbb{I}_1$ . Similarly, we note  $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(p) = \{P \in \mathbb{A}_1 \mid P(p) = 0\}$ .

Let us state a result that will be useful in what follows.

**LEMMA 2.4.** *Let  $P \in \mathbb{I}_1$  and  $a = \sum_{k=0}^l \alpha_k e \partial^k \in \langle e \rangle$ . We have*

$$P a = \sum_{k=0}^l P(\alpha_k) e \partial^k,$$

where  $P(\alpha_k) \in \mathbb{k}[t]$  is obtained by applying  $P \in \mathcal{E}$  to  $\alpha_k$  using (1).

**PROOF.** Let us consider  $P \in \mathbb{I}_1$ . Then, there are  $P_1 \in \mathbb{A}_1$ ,  $P_2 \in \mathcal{I}$ , and  $P_3 \in \langle e \rangle$  such that  $P = P_1 + P_2 + P_3$ . By linearity and associativity properties, we only have to prove that  $P p e = P(p) e$ , for all  $p \in \mathbb{k}[t]$ . If  $P_1 = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i$ , then, using the identity  $\partial e = 0$ , we get

$$\begin{aligned} P_1 p e &= \sum_{i=0}^n a_i \partial^i p e = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} p^{(j)} \partial^{i-j} e \\ &= \sum_{i=0}^n a_i p^{(i)} e = P_1(p) e. \end{aligned}$$

If  $P_2 = \sum_{j=0}^m b_j I c_j$ , then, using the identity  $I p e = I(p) e$ , for all  $p \in \mathbb{k}[t]$ , we have

$$P_2 p e = \sum_{j=0}^m b_j I c_j p e = \sum_{j=0}^m b_j I(c_j p) e = P_2(p) e.$$

If  $P_3 = \sum_{k=0}^q f_k e \partial^k$ , then, using  $e p = e(p) e$ , for all  $p \in \mathbb{k}[t]$ , and  $e^2 = e$ , we obtain

$$P_3 p e = \sum_{k=0}^q f_k e \partial^k p e = \sum_{k=0}^q f_k e (\partial^k(p)) e^2 = P_3(p) e.$$

Thus, we have  $P p e = P(p) e$ , for all  $p \in \mathbb{k}[t]$ . This ends the proof.  $\square$

We state again that the annihilator of  $a \in \mathbb{I}_1$  is defined by

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a) = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P a = 0\}.$$

By Lemma 2.4, the annihilator of  $a = \sum_{k=0}^q f_k e \partial^k \in \langle e \rangle$  can be described by  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a) = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P(f_k) = 0, k = 0, \dots, q\}$ .

It is well-known that  $\mathbb{A}_1$  is a *noetherian ring*, i.e., is a left and a right noetherian ring (see, e.g., [2, 6]). As for  $\mathbb{I}_1$ , the situation is different. Indeed, we have seen that the identities  $\partial I = 1$  and  $I \partial = 1 - e$  hold in  $\mathbb{I}_1$ . Now, a theorem due to Jacobson [8] asserts that the existence of a left/right inverse, which is not a two-sided inverse, of an element in a noncommutative ring  $\mathcal{R}$  implies that  $\mathcal{R}$  is not left/right noetherian. We thus have the following result.

**PROPOSITION 2.5** ([1]). *The ring  $\mathbb{I}_1$  is neither a left nor a right noetherian ring.*

A more explicit proof of Proposition 2.5 consists in considering the chain of left ideals generated by the *Taylor operators* defined by

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} e \partial^k. \quad (6)$$

One can check that  $T_n T_{n+1} = T_n$  and  $\mathbb{I}_1 T_n \neq \mathbb{I}_1 T_{n+1}$ , for all  $n \in \mathbb{N}$ , so that  $\mathbb{I}_1 T_0 \subsetneq \mathbb{I}_1 T_1 \subsetneq \mathbb{I}_1 T_2 \subsetneq \dots$  is a strictly ascending chain of left ideals of  $\mathbb{I}_1$ . This proves that  $\mathbb{I}_1$  is not a left noetherian ring.

Recall that an *involution*  $\theta$  of a  $\mathbb{k}$ -algebra  $\mathcal{R}$  is a  $\mathbb{k}$ -linear endomorphism of  $\mathcal{R}$  satisfying  $\theta(d_1 d_2) = \theta(d_2) \theta(d_1)$ , for all  $d_1, d_2 \in \mathcal{R}$ , and  $\theta^2 = 1$ .

**PROPOSITION 2.6** ([1]).  *$\mathbb{I}_1$  admits the involution  $\theta$  defined by*

$$\theta(t) = (t \partial + 1) \partial, \quad \theta(\partial) = I, \quad \theta(I) = \partial. \quad (7)$$

An important consequence of (7) is that  $\theta(e) = e$  and  $\theta(\langle e \rangle) = \langle e \rangle$ . Moreover, the involution  $\theta$  defined in Proposition 2.6 can be used to turn the strictly ascending chain of left ideals exhibited above into a strictly ascending chain of right ideals of  $\mathbb{I}_1$ . This proves that  $\mathbb{I}_1$  is also not a right noetherian ring.

At first sight, the fact that  $\mathbb{I}_1$  is not a noetherian ring seems to be a strong obstruction to a pure algebraic, and thus to an effective, study of  $\mathbb{I}_1$ . The next section explains why an effective study of linear systems of integro-differential equations with polynomial coefficients remains feasible.

### 3 THE COHERENCE PROPERTY OF $\mathbb{I}_1$

In this section, let  $\mathcal{R}$  be a ring and  $\mathcal{M}$  a left  $\mathcal{R}$ -module.

**Definition 3.1.** A left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is said to be *finitely generated* if there is a finite family  $(g_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  of elements of  $\mathcal{M}$  satisfying

$$\forall m \in \mathcal{M}, \quad \exists r_1, \dots, r_p \in \mathcal{R}, \quad m = \sum_{i=1}^p r_i g_i. \quad (8)$$

$(g_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  is then a finite *set of generators* of the left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$ .

A left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is finitely generated if there exist some surjective  $\mathcal{R}$ -homomorphism  $\pi : \mathcal{R}^{1 \times p} \rightarrow \mathcal{M}$ , i.e., a  $\mathcal{R}$ -epimorphism. Let  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  be the  $i^{\text{th}}$  element of the *standard basis* of  $\mathcal{R}^{1 \times p}$ , namely, the row vector of length  $p$  with 1 at the  $i^{\text{th}}$  position and 0 elsewhere. If  $(g_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  is a set of generators of  $\mathcal{M}$ , then we can consider the following  $\mathcal{R}$ -epimorphism:

$$\pi : \mathcal{R}^{1 \times p} \rightarrow \mathcal{M}, \quad e_i \mapsto g_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

**Definition 3.2.** Let  $\mathcal{M}$  be a finitely generated left  $\mathcal{R}$ -module and  $(g_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  a finite set of generators of  $\mathcal{M}$ . Then,  $\mathcal{M}$  is said to be

finitely presented if the left  $\mathcal{R}$ -module of all the relations among the  $g_i$ 's, namely,

$$\ker \pi = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathcal{R}^{1 \times p} \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i = 0 \right\}$$

is finitely generated.

By definition, a finitely presented module is finitely generated.

The fact that  $\ker \pi$  is finitely generated is equivalent to the existence of a finite set of generators of  $\ker \pi$ , i.e., a finite set of elements  $R_{1\bullet}, \dots, R_{q\bullet} \in \mathcal{R}^{1 \times p}$  satisfying that, for all  $\lambda \in \ker \pi$ , there are  $\mu_1, \dots, \mu_q \in \mathcal{R}$  such that

$$\lambda = \sum_{i=1}^q \mu_i R_{i\bullet} = \underbrace{(\mu_1 \ \dots \ \mu_q)}_{\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} R_{1\bullet} \\ \vdots \\ R_{q\bullet} \end{pmatrix}}_R = \mu R.$$

Thus, we can write  $\ker \pi = \text{im}_{\mathcal{R}}(\cdot R) = \{\mu R \mid \mu \in \mathcal{R}^{1 \times q}\}$ , where  $R \in \mathcal{R}^{q \times p}$  is the matrix having the  $R_{i\bullet}$ 's as rows, which is equivalent to the following exact sequence of left  $\mathcal{R}$ -modules:

$$\mathcal{R}^{1 \times q} \xrightarrow{\cdot R} \mathcal{R}^{1 \times p} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Equivalently, we have  $\mathcal{M} \cong \text{coker}_{\mathcal{R}}(\cdot R) = \mathcal{R}^{1 \times p} / (\mathcal{R}^{1 \times q} R)$ , where  $\cong$  means "isomorphic to". For more details, see [2, 18, 20].

*Definition 3.3.* Let  $\mathcal{R}$  be a noncommutative ring.

- A left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is said to be *left coherent* if  $\mathcal{M}$  is a finitely generated left  $\mathcal{R}$ -module and if every finitely generated left  $\mathcal{R}$ -submodule of  $\mathcal{M}$  is finitely presented.
- The ring  $\mathcal{R}$  is said to be *left coherent* if  $\mathcal{R}$  is a left coherent  $\mathcal{R}$ -module, i.e., if every finitely generated left ideal of  $\mathcal{R}$  is finitely presented.

Similar definitions hold for right  $\mathcal{R}$ -modules and a ring is said to be *coherent* if it is both left and right coherent.

According to Definitions 3.3 and 3.2, a ring  $\mathcal{R}$  is left coherent if for every finitely generated ideal  $\mathcal{J}$  of  $\mathcal{R}$ , the left  $\mathcal{R}$ -module of the relations among a finite set of generators of  $\mathcal{J}$  is finitely generated.

*Example 3.4.* Left (resp., right) noetherian rings are left (resp., right) coherent rings. Two examples of coherent rings which are not noetherian are the ring  $\mathbb{k}[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$  of polynomials in an infinite number of variables  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  with coefficients in a field  $\mathbb{k}$ , and the ring of the entire functions on  $\mathbb{C}$ . For more details, see [18].

Let us state a useful characterization of a coherent ring.

**PROPOSITION 3.5** ([18, 20]). *Let  $\mathcal{R}$  be a ring. The following two conditions are equivalent:*

- (1)  $\mathcal{R}$  is a left coherent ring.
- (2)(a) For every  $a \in \mathcal{R}$ ,  $\text{ann}_{\mathcal{R}}(a)$  is a finitely generated left ideal.
- (b) For all finitely generated left ideals  $\mathcal{J}_1$  and  $\mathcal{J}_2$ , the left ideal  $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$  is finitely generated.

A similar result holds for a right coherent ring ( $\text{ann}_{\mathcal{R}}(a)$  is then replaced by  $\text{ann}_{\mathcal{R}}(a)$  and left ideals by right ideals).

We can now state a result that is at the core of this paper.

**THEOREM 3.6** ([1]).  $\mathbb{I}_1$  is a coherent ring.

Using the involution  $\theta$  of  $\mathbb{I}_1$  (see Proposition 2.6), the left coherence property yields the right coherence property, and vice versa.

We point out that the proof of Theorem 3.6 given in [1] is not constructive. The main goal of the present paper is to contribute to the development of an effective version of the coherence property of  $\mathbb{I}_1$  and its implementation in the computer algebra software Maple. Here, we shall focus on Condition (2)(a) of Proposition 3.5. The second condition will be studied in a future work.

Note that, to our knowledge,  $\mathbb{I}_1$  would be the first example of a coherent but not noetherian ring implemented in a computer algebra system, which has important applications (e.g., calculus).

## 4 ANNIHILATOR OF AN EVALUATION OPERATOR

### 4.1 Preliminary remarks and results

In Section 3, we have recalled that the ring  $\mathbb{I}_1$  was coherent. Yet, the proof of the coherence property given in [1] remains not algorithmic. To make it so, we shall rely on Proposition 3.5 which shows that the coherence property is equivalent to two conditions: one on the annihilator of elements of  $\mathbb{I}_1$  and one on the intersection of finitely generated ideals. In this paper, we shall only focus on the first one, letting the second one for a future work.

Let us then consider Condition (2)(a) of Proposition 3.5. In the case  $a \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ , the characterization of a finite set of generators for  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a)$  was obtained in [17] and implemented in the IntDiffOp package [10]. Hence, it remains to study the case  $a \in \langle e \rangle$ .

Note that  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a)$  is the left ideal of  $\mathbb{I}_1$  defining all the *compatibility conditions* of the inhomogeneous linear equation  $ah = g$ , where  $g$  is fixed in a left  $\mathbb{I}_1$ -module  $\mathcal{F}$  and  $h$  is sought in  $\mathcal{F}$ . Indeed, if  $P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a)$ , then by definition,  $Pa = 0$ , i.e.,  $Pg = 0$ . This last equation is a necessary condition for the above system to have a solution, i.e.,  $Pg = 0$  is a compatibility condition.

We now state two lemmas that will be used in what follows.

**LEMMA 4.1** ([4]). *Let  $P \in \mathbb{I}_1$ . Then, there is  $N \in \mathbb{N}$  such that the operator  $\partial^N P$  belongs to  $\mathbb{A}_1$ . In particular, using the normal form (2) of  $P$ , we can take  $N = \max_{(j,k) \in \llbracket 0,m \rrbracket \times \llbracket 0,q \rrbracket} \{\deg_t(b_j), \deg_t(f_k)\} + 1$ .*

**LEMMA 4.2.** *For all  $n \in \mathbb{N}$ , we have  $I^n \partial^n + T_{n-1} = 1$ , where  $T_n$  is defined by (6). For every  $P \in \mathbb{I}_1$ , there is  $N \in \mathbb{N}$  such that  $P$  can be written as  $P = I^N \partial^N P + T_{N-1} P$ , where  $\partial^N P \in \mathbb{A}_1$  and  $T_{N-1} P \in \langle e \rangle$ .*

**PROOF.** Using (1), let us compare  $(I^n \partial^n)(t^l)$  and  $(1 - T_{n-1})(t^l)$ , for all  $l \geq 0$ . If  $l \leq n - 1$ , we have

$$(1 - T_{n-1})(t^l) = 0, \quad (I^n \partial^n)(t^l) = I^n(0) = 0.$$

Now, for  $l > n - 1$ , we have

$$(1 - T_{n-1})(t^l) = t^l, \quad (I^n \partial^n)(t^l) = l \dots (l - n + 1) I^n(t^{l-n}).$$

Using (4), we obtain

$$I^n(t^{l-n}) = \frac{t^l}{(l-n+1)(l-n+2) \dots l}.$$

Then, we have

$$(I^n \partial^n)(t^l) = l \dots (l - n + 1) I^n(t^{l-n}) = t^l.$$

The second assertion is a direct consequence of the first one, Lemma 4.1, and Proposition 2.3.  $\square$

Using Proposition 2.2, for all  $n \geq 1$  and  $p \in \mathbb{K}[t]$ , we have

$$I^n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \int_0^t \frac{(-\tau)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} p(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} p(\tau) d\tau.$$

Hence, the identity  $I^n \partial^n + T_{n-1} = 1$  of Lemma 4.2 yields

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{K}[t], \quad p &= T_{n-1}(p) + (I^n \partial^n)(p) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} p^{(k)}(0) + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} p^{(n)}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

for all  $n \geq 1$ . This shows that Lemma 4.2 encapsulates the *Taylor's theorem with an integral form of the remainder* into a simple identity.

## 4.2 Annihilator of a simple evaluation operator

Let  $p \in \mathbb{K}[t]$  and let us exhibit a generating set of the left  $\mathbb{I}_1$ -ideal  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e)$ . From Lemma 2.4, we have

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e) = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P p e = (P p) e = 0\} = \{P \in \mathbb{I}_1 \mid P(p) = 0\}.$$

According to [5, Proposition 3.2],  $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(p) := \{Q \in \mathbb{A}_1 \mid Q(p) = 0\}$  is the left ideal of  $\mathbb{A}_1$  generated by  $Q_1 := \partial^{m+1}$  and  $Q_2 := p \partial^m - p^{(m)}$ . In other words, we have  $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(p) = \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$ .

LEMMA 4.3. *Let  $p \in \mathbb{K}[t]$  be a polynomial of degree  $m$ ,  $Q_1 = \partial^{m+1}$ , and  $Q_2 = p \partial^m - p^{(m)}$ . Then, we have*

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e) \cap \langle e \rangle \subseteq \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2.$$

PROOF. If  $P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e) \cap \langle e \rangle$ , then, from Lemma 2.4, we have  $P = \sum_{k=0}^q f_k e \partial^k$ , where  $f_k \in \mathbb{K}[t]$ ,  $k = 0, \dots, q$ , and  $P$  satisfies  $P(p) = 0$ . If  $q > m$ , then we can write

$$P = \sum_{k=0}^m f_k e \partial^k + \left( \sum_{k=m+1}^q f_k e \partial^{k-m-1} \right) Q_1.$$

Thus,  $P \in \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$  if and only if  $\bar{P} = \sum_{k=0}^m f_k e \partial^k \in \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$ . Since  $P(p) = 0$ , then  $\bar{P}$  satisfies  $\bar{P}(p) = 0$ . Then, we have:

$$\bar{P}(p) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^m f_k e \partial^k(p) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^m f_k p^{(k)}(0) = 0.$$

Since  $\deg_t(p)$  is exactly  $m$ , we get  $p^{(m)} = p^{(m)}(0) \neq 0$ . Therefore, we obtain the identity  $f_m = -\frac{1}{p^{(m)}} \sum_{k=0}^{m-1} f_k p^{(k)}(0)$ . Substituting this expression into  $\bar{P}$  and using  $p^{(k)}(0) e = e(p^{(k)}) e = e p^{(k)}$ , we obtain

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \sum_{k=0}^{m-1} \left( f_k e \partial^k - \frac{1}{p^{(m)}} f_k p^{(k)}(0) e \partial^m \right), \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left( f_k e \partial^k - \frac{1}{p^{(m)}} f_k e p^{(k)} \partial^m \right), \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} f_k e \frac{1}{p^{(m)}} \left( p^{(m)} \partial^k - p^{(k)} \partial^m \right). \end{aligned}$$

Therefore,  $\bar{P}(p) = 0$  yields  $p^{(m)} \partial^k - p^{(k)} \partial^m \in \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(p)$ , for  $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ . From [5, Proposition 3.2], we get  $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(p) = \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$ ,

which shows that the term  $f_k e \frac{1}{p^{(m)}} \left( p^{(m)} \partial^k - p^{(k)} \partial^m \right)$  belongs to  $\mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$ , for  $k = 0, \dots, m-1$ . This proves  $\bar{P} \in \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$ .  $\square$

PROPOSITION 4.4. *Let  $p \in \mathbb{K}[t]$  be of degree  $m$ ,  $Q_1 = \partial^{m+1}$ , and  $Q_2 = p \partial^m - p^{(m)}$ . Then, we have*

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e) = \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2.$$

PROOF. Let  $P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e)$ . From Lemma 2.4, we have  $P(p) = 0$ . According to Lemma 4.1, there is  $N \in \mathbb{N}$  such that  $\partial^N P \in \mathbb{A}_1$ . Thus, we have  $\partial^N P \in \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(p)$ . Since  $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(p) = \mathbb{A}_1 Q_1 + \mathbb{A}_1 Q_2$ , there is  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{A}_1^2$  such that  $\partial^N P = \alpha Q_1 + \beta Q_2$ , which yields  $I^N \partial^N P = (I^N \alpha) Q_1 + (I^N \beta) Q_2$ . Using the identity of Lemma 4.2, i.e.,  $I^N \partial^N + T_{N-1} = 1$ , we get  $T_{N-1} P = P - (I^N \alpha) Q_1 - (I^N \beta) Q_2 \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e) \cap \langle e \rangle$  because  $P, Q_1, Q_2 \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e)$  and  $T_{N-1} P \in \langle e \rangle$  since  $T_{N-1} \in \langle e \rangle$  and  $\langle e \rangle$  is a right ideal of  $\mathbb{I}_1$  (by Proposition 2.3). Using Lemma 4.3,  $T_{N-1} P \in \mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2$  and so is  $P = T_{N-1} P + (I^N \alpha) Q_1 + (I^N \beta) Q_2$ , which finally proves the result since we clearly have  $\mathbb{I}_1 Q_1 + \mathbb{I}_1 Q_2 \subseteq \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot p e)$ .  $\square$

## 4.3 Main results

Let us now extend Proposition 4.4 to a general element  $a \in \langle e \rangle$ . In what follows, for  $R \in \mathbb{K}[t]^{q \times p}$ , we use the following  $\mathbb{K}[t]$ -modules:

$$\begin{aligned} \ker_{\mathbb{K}[t]}(\cdot R) &= \{ \lambda \in \mathbb{K}[t]^{1 \times q} \mid \lambda R = 0 \}, \\ \text{im}_{\mathbb{K}[t]}(\cdot R) &= \{ \lambda R \mid \lambda \in \mathbb{K}[t]^{1 \times q} \}. \end{aligned}$$

We shall need the next lemma which characterizes the differential operators which annihilate a finite family of polynomials  $\{a_i\}_{i=0, \dots, r}$ .

LEMMA 4.5. *Let  $a_i \in \mathbb{K}[t]$ ,  $i = 0, \dots, r$ ,  $m = \max_{i \in \llbracket 0, r \rrbracket} \{\deg_t(a_i)\}$ ,*

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_r \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{(m+1)} & \dots & a_r^{(m+1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[t]^{(m+2) \times (r+1)}, \quad J_{m+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \partial \\ \vdots \\ \partial^{m+1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Let  $D \in \mathbb{K}[t]^{u \times (m+2)}$  be a full row rank matrix, where  $u \in \llbracket 1, m+2 \rrbracket$  is the rank of  $D$  such that

$$\ker_{\mathbb{K}[t]}(\cdot C) = \text{im}_{\mathbb{K}[t]}(\cdot D),$$

and the vector

$$(f_1 \quad \dots \quad f_u)^T = D J_{m+1} \in \mathbb{A}_1^{u \times 1}.$$

Then, we have

$$\bigcap_{i=0}^r \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i) = \sum_{j=1}^u \mathbb{A}_1 f_j.$$

PROOF. Since  $\partial^{m+1}(a_i) = 0$ , for  $i = 0, \dots, r$ ,  $\partial^{m+1} \in \bigcap_{i=0}^r \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i)$ . Hence, if  $P = \sum_{j=0}^n c_j \partial^j \in \bigcap_{i=0}^r \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i)$ , where  $n > m+1$  and  $c_j \in \mathbb{K}[t]$ , for  $j = 0, \dots, n$ , then we can write

$$P = \sum_{j=0}^m c_j \partial^j + \left( \sum_{j=m+1}^n c_j \partial^{j-m-1} \right) \partial^{m+1},$$

and we get  $\bar{P} = \sum_{j=0}^m c_j \partial^j \in \bigcap_{j=0}^r \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i)$ . To simplify the exposition below, we keep the term of order  $m+1$  in  $\bar{P}$ . We then have:

$$\forall i \in \llbracket 0, r \rrbracket, \bar{P}(a_i) = \sum_{j=0}^{m+1} c_j a_i^{(j)} = 0 \Leftrightarrow (c_0 \dots c_{m+1})C = (0 \dots 0),$$

where the matrix  $C \in \mathbb{k}[t]^{(m+2) \times (r+1)}$  is defined by (9). This shows that  $(c_0 \dots c_{m+1}) \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$ . Now, since  $\mathbb{k}[t]$  is a noetherian ring, the  $\mathbb{k}[t]$ -module  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$  is finitely generated (see, e.g., [7]), and thus, there is a finite set of generators for  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$ . Stacking the corresponding polynomial rows into a matrix, we obtain a matrix  $D \in \mathbb{k}[t]^{u \times (m+2)}$  such that  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot D)$ . Note that  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$  is a  $\mathbb{k}[t]$ -submodule of the free  $\mathbb{k}[t]$ -module  $\mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)}$ , and thus,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$  is a free  $\mathbb{k}[t]$ -module because  $\mathbb{k}[t]$  is a principal ideal domain (see, e.g., [18]). Hence, the rows of the matrix  $D$  can be chosen so that they are  $\mathbb{k}[t]$ -linearly independent, i.e., such that the matrix  $D$  has *full row rank* (i.e.,  $\nu D = 0$  yields  $\nu = 0$ ). Therefore, we have the following exact sequence of  $\mathbb{k}[t]$ -modules:

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times u} \xrightarrow{\cdot D} \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{\cdot C} \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}. \quad (10)$$

Thus,  $(c_0 \dots c_{m+1}) = \alpha D$  for a certain  $\alpha \in \mathbb{k}[t]^{1 \times u}$ . Let us consider  $(f_1 \dots f_u)^T := D J_{m+1}$ . Using  $\bar{P} = (c_0 \dots c_{m+1}) J_{m+1}$ , we then get  $\bar{P} = \alpha D J_{m+1} = \sum_{j=1}^u \alpha_j f_j$ , i.e.,  $\bar{P} \in \sum_{j=1}^u \mathbb{A}_1 f_j$ . Now  $(0 \dots 0 \ 1) \in \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot D)$  since the last row of  $C$  has zero entries. This yields  $(0 \dots 0 \ 1) J_{m+1} = \partial^{m+1} \in \sum_{j=1}^u \mathbb{k}[t] f_j$ . Hence, we have  $P \in \bar{P} + \mathbb{A}_1 \partial^{m+1} \subset \sum_{j=1}^u \mathbb{A}_1 f_j$ , which proves the first inclusion.

For the converse, we note that each entry of the column vector  $D J_{m+1}$  is an element of  $\mathbb{A}_1$  which annihilates all the  $a_i$ 's because the rows of  $D$  belong to  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$ . Hence, we obtain that  $(f_1 \dots f_u)^T = D J_{m+1}$  is a generating set of  $\bigcap_{i=0}^r \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i)$ .  $\square$

Note that the generators  $f_j$ 's of Lemma 4.5 can be explicitly obtained by the computation of a *Hermite normal form* (or a *Smith normal form*) of the matrix  $C$ . For more details, see, e.g., [11]. Such a computation is implemented in computer algebra softwares.

*Example 4.6.* Let us consider  $a_0 = t$ ,  $a_1 = t^2 + 1$ , and  $a_2 = t^3 - 2t$ . Then, we have  $m = \max_{i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket} \{\deg_t(a_i)\} = 3$  and

$$C = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t^2 + 1 & 2t & 2 & 0 & 0 \\ t^3 - 2t & 3t^2 - 2 & 6t & 6 & 0 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{k}[t]^{5 \times 3}.$$

Using, e.g., Maple, we can compute a matrix  $D$  whose rows generate the  $\mathbb{k}[t]$ -module  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$ . We find

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 6t & -3t^2 + 3 & t^3 - 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thus, two generators  $f_1$  and  $f_2$  of  $\bigcap_{i=0}^2 \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i)$  are defined by

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = D J_4 = \begin{pmatrix} -6 + 6t\partial + (-3t^2 + 3)\partial^2 + (t^3 - 3t)\partial^3 \\ \partial^4 \end{pmatrix},$$

i.e., we have  $\bigcap_{i=0}^2 \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i) = \mathbb{A}_1 f_1 + \mathbb{A}_1 f_2$ .

Using Lemma 4.5, the next proposition characterizes a finite set of generators of the left ideal  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot a) \cap \langle e \rangle$  of  $\mathbb{I}_1$ , where  $a \in \langle e \rangle$ .

**PROPOSITION 4.7.** *Let  $a = \sum_{i=0}^r a_i e \partial^i \in \langle e \rangle$ ,  $a_i \in \mathbb{k}[t]$ , for  $k = 0, \dots, r$ ,  $m = \max_{i \in \llbracket 0, r \rrbracket} \{\deg_t(a_i)\}$ , and  $C \in \mathbb{k}[t]^{(m+2) \times (r+1)}$  and  $J_{m+1}$  be the matrices defined by (9). If  $E \in \mathbb{k}^{v \times (m+2)}$  is a full row rank matrix such that  $\ker_{\mathbb{k}}(\cdot e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}}(\cdot E)$  (where  $e(C)$  is the evaluation of  $C$  at  $t = 0$ ), then we have*

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot a) \cap \langle e \rangle = \sum_{k=1}^v \mathbb{I}_1 g_k,$$

where the  $g_k$ 's are defined by

$$(g_1 \dots g_v)^T = E e J_{m+1} \in \langle e \rangle^{v \times 1}. \quad (11)$$

**PROOF.** Let  $P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot a) \cap \langle e \rangle$ . We have  $P = \sum_{j=0}^l \alpha_j e \partial^j$  and  $P a = 0$ . Using Lemma 2.4,  $P a = \sum_{i=0}^r P(a_i) e \partial^i = 0$  if and only if  $P(a_i) = 0$ , for  $i = 0, \dots, r$ . As a consequence,  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot a) \cap \langle e \rangle = (\bigcap_{i=0}^r \mathcal{K}_{\mathbb{I}_1}(a_i)) \cap \langle e \rangle$ . Now, for  $i = 0, \dots, r$ , if we note  $m_i = \deg_t(a_i)$ , then we have  $\partial^{m_i+1} \in \mathcal{K}_{\mathbb{I}_1}(a_i)$ . Hence, we get  $\partial^{m+1} \in \bigcap_{i=0}^r \mathcal{K}_{\mathbb{I}_1}(a_i)$ . Consequently,  $e \partial^{m+1} \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot a) \cap \langle e \rangle$ . Therefore, we can, without loss of generality, assume  $l = m+1$ , i.e.,  $P = \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j e \partial^j \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot a)$ . We then have

$$\begin{aligned} P a = 0 &\iff P(a_i) = 0, \quad i = 0, \dots, r, \\ &\iff P(a_i) = \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j e(\partial^j a_i) = 0, \quad i = 0, \dots, r, \\ &\iff (\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) e(C) = (0 \dots 0), \\ &\iff (\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(C)), \end{aligned}$$

where the matrix  $C$  is defined by (9). Let  $E \in \mathbb{k}^{v \times (m+2)}$  be a full row rank matrix whose rows define a basis of  $\ker_{\mathbb{k}}(\cdot e(C))$ , where  $v = \dim_{\mathbb{k}} \ker_{\mathbb{k}}(\cdot e(C))$ . Then, we have the following exact sequence of  $\mathbb{k}$ -vector spaces:

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}^{1 \times v} \xrightarrow{\cdot E} \mathbb{k}^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{\cdot e(C)} \mathbb{k}^{1 \times (r+1)}.$$

The above exact sequence of  $\mathbb{k}$ -vector spaces *splits* (see, e.g., [18]). Thus, taking the tensor product of this exact sequence by the free  $\mathbb{k}$ -module  $\mathbb{k}[t]$  yields the following exact sequence of  $\mathbb{k}[t]$ -modules (see, e.g., [18]):

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times v} \xrightarrow{\cdot E} \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{\cdot e(C)} \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}, \quad (12)$$

i.e.,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\cdot e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot E)$ . From the exactness of (12), we can deduce that  $P a = 0$  if and only if  $(\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) \in \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot E)$ , i.e., if and only if there is  $\nu \in \mathbb{k}[t]^{1 \times v}$  such that  $(\alpha_0 \dots \alpha_{m+1}) = \nu E$ . Hence,  $P$  can be written  $P = \nu E e J_{m+1}$ . Therefore,  $P a = 0$  if and only if  $P \in \mathbb{I}_1^{1 \times v} E e J_{m+1}$ . Now, using the standard basis of  $\mathbb{k}[t]^{1 \times v}$ , we obtain that the  $g_k$ 's defined by (11) generate the left ideal  $\mathbb{I}_1^{1 \times v} E e J_{m+1}$  of  $\mathbb{I}_1$ . The last row of the matrix  $e(C)$  is the zero row. Thus, we have  $(0 \dots 0 \ 1) \in \ker_{\mathbb{k}}(\cdot e(C))$ , which implies that  $(0 \dots 0 \ 1) e J_{m+1} = e \partial^{m+1} \in \sum_{k=1}^v \mathbb{I}_1 g_k$ . This proves that (11) is a set of generators of  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot a) \cap \langle e \rangle$ , i.e.,  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot a) \cap \langle e \rangle = \sum_{k=1}^v \mathbb{I}_1 g_k$ .  $\square$

*Example 4.8.* We continue Example 4.6. The evaluation of the matrix  $C$  defined in Example 4.6 at  $t = 0$  is

$$e(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

and  $\ker_{\mathbb{k}}(.e(C))$  is generated by the rows of the matrix

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hence, a set of generators of  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a) \cap \langle e \rangle$  is defined by

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = E e J_4 = \begin{pmatrix} 2e - e\partial^2 \\ e\partial^4 \end{pmatrix},$$

i.e.,  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a) \cap \langle e \rangle = \{ \alpha_1 (2e - e\partial^2) + \alpha_2 e\partial^4 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{I}_1 \}$ .

We can now state the main result of the present article.

**THEOREM 4.9.** *Let  $a = \sum_{i=0}^r a_i e \partial^i \in \langle e \rangle$ , where  $a_i \in \mathbb{k}[t]$  for  $i = 0, \dots, r$ . Then, we have*

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a) = \sum_{j=1}^u \mathbb{I}_1 f_j + \sum_{k=1}^v \mathbb{I}_1 g_k,$$

where the  $f_j$ 's (resp.,  $g_k$ 's) are the differential (resp., evaluation) operators defined in Lemma 4.5 (resp., Proposition 4.7). In particular, the left ideal  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a)$  of  $\mathbb{I}_1$  is finitely generated.

**PROOF.** Let us consider  $a = \sum_{i=0}^r a_i e \partial^i$  and  $P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a)$ . From Lemma 4.1, there is  $N \in \mathbb{N}$  such that  $\partial^N P \in \mathbb{A}_1$ . Then,  $(\partial^N P) a = \partial^N (P a) = 0$ , i.e.,  $\sum_{i=0}^r (\partial^N P)(a_i) e \partial^i = 0$ , and thus, according to Lemma 2.4,  $(\partial^N P)(a_i) = 0$ , for  $i = 0, \dots, r$ . Therefore  $\partial^N P \in \bigcap_{i=0}^r \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i) = \sum_{j=1}^u \mathbb{A}_1 f_j$  (see Lemma 4.5). Using Lemma 4.2,  $P$  can be written as  $P = T_{N-1} P + S$ , where  $S = I^N \partial^N P \in \sum_{j=1}^u \mathbb{I}_1 f_j$ . Now, note that  $T_{N-1} P \in \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a) \cap \langle e \rangle$ . Thus, by Proposition 4.7,  $T_{N-1} P \in \sum_{k=1}^v \mathbb{I}_1 g_k$ , which shows that  $P \in \sum_{j=1}^u \mathbb{I}_1 f_j + \sum_{k=1}^v \mathbb{I}_1 g_k$ , and  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a) \subseteq \sum_{j=1}^u \mathbb{I}_1 f_j + \sum_{k=1}^v \mathbb{I}_1 g_k$ . Finally, by construction, we have  $\sum_{j=1}^u \mathbb{I}_1 f_j + \sum_{k=1}^v \mathbb{I}_1 g_k \subseteq \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a)$ , which ends the proof.  $\square$

*Example 4.10.* Applying Theorem 4.9 to  $a \in \langle e \rangle$  defined in Example 4.8 and using the results obtained in Examples 4.6 and 4.8, we obtain  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a) = \mathbb{I}_1 f_1 + \mathbb{I}_1 f_2 + \mathbb{I}_1 g_1 + \mathbb{I}_1 g_2$ , where  $f_1, f_2, g_1$ , and  $g_2$  are defined in Examples 4.6 and 4.8.

In the case  $r = 0$ , Proposition 4.4 shows that  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a)$  can be generated by two differential operators. Thus, we can wonder if the same result holds for the general case, i.e., for all  $r \in \mathbb{N}$ . Comparing the exact sequences (10) and (12), we note that  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$  and  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.E)$ , where  $D \in \mathbb{k}[t]^{u \times (m+2)}$  and  $E \in \mathbb{k}^{\nu \times (m+2)}$  are full row rank matrices. Therefore, we can wonder if we can take  $E = e(D)$  in Proposition 4.7.

*Example 4.11.* Considering again Example 4.10, we can check that  $g_1 = -e f_1/3$  and  $g_2 = e f_2$ , which shows that  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a) = \mathbb{I}_1 f_1 + \mathbb{I}_1 f_2$ .

**PROPOSITION 4.12.** *Let  $a = \sum_{i=0}^r a_i e \partial^i \in \langle e \rangle$ ,  $a_i \in \mathbb{k}[t]$ , for  $k = 0, \dots, r$ ,  $m = \max_{i \in [0, r]} \{\deg_t(a_i)\}$ , and  $C$  and  $J_{m+1}$  be the matrices defined by (9). Let  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C)$  denote the  $\mathbb{k}[t]$ -module finitely presented by  $C$ . If  $\mathcal{N} = 0$ , then, in Proposition 4.7, we can always choose  $E$  to be  $e(D)$ , a fact which implies*

$$v = u, \quad (g_1 \ \dots \ g_u)^T = e D J_{m+1} = e (f_1 \ \dots \ f_u)^T,$$

and thus

$$\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a) \cap \langle e \rangle = \sum_{j=1}^u \mathbb{I}_1 e f_j, \quad \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a) = \sum_{j=1}^u \mathbb{I}_1 f_j.$$

**PROOF.** According to the proof of Lemma 4.5 (see (10)) and by definition of  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C)$ , we have the following exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times u} \xrightarrow{.D} \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{.C} \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)} \xrightarrow{\pi} \mathcal{N} \longrightarrow 0,$$

where  $\pi$  denotes the standard projection of  $\mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}$  onto  $\mathcal{N}$ . Now, if  $\mathcal{N} = 0$ , then we deduce the short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times u} \xrightarrow{.D} \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{.C} \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)} \longrightarrow 0,$$

which ends with the free  $\mathbb{k}[t]$ -module  $\mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}$ . Hence, the above exact sequence splits (see, e.g., [18]). Thus, the application of the functor  $\mathbb{k}[t]/\langle t \rangle \otimes_{\mathbb{k}[t]} \cdot$  to this split exact sequence yields the following exact sequence of  $\mathbb{k}$ -vector spaces (see, e.g., [18]):

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}^{1 \times u} \xrightarrow{.e(D)} \mathbb{k}^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{.e(C)} \mathbb{k}^{1 \times (r+1)} \longrightarrow 0, \quad (13)$$

which yields  $\ker_{\mathbb{k}}(.e(C)) = \text{im}_{\mathbb{k}}(.e(D))$ , i.e., we can take  $E = e(D)$ .  $\square$

Proposition 4.12 shows that, under the hypothesis  $\mathcal{N} = 0$ , the left ideal  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.a)$  of  $\mathbb{I}_1$  can be generated by differential operators. In the following, we shall prove (see Proposition 4.16 below) that the condition  $\mathcal{N} = 0$  can always be assumed to be fulfilled. To do so, let us first introduce the concept of the *Fitting ideals* of a module.

**Definition 4.13** ([7], Section 20.2). Let  $\mathcal{R}$  be a commutative ring,  $\mathcal{M}$  a finitely presented left  $\mathcal{R}$ -module, and  $C \in \mathcal{R}^{q \times p}$  a presentation matrix of  $\mathcal{M}$ , i.e.,  $\mathcal{M} \cong \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(.C)$ . The  $i^{\text{th}}$  *Fitting ideal* of  $\mathcal{M}$  is

$$\text{Fitt}_i(\mathcal{M}) := \begin{cases} \mathcal{R} & \text{if } p - i \leq 0, \\ \mathcal{F}_{p-i} & \text{if } 0 < p - i \leq \min(p, q), \\ \langle 0 \rangle & \text{if } p - i > \min(p, q), \end{cases}$$

where  $\mathcal{F}_j$  stands for the ideal of  $\mathcal{R}$  generated by all the minors (determinants of submatrices) of size  $j$  of the matrix  $C$ .

We recall that a finitely generated  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is said to be *projective* if there are a  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{P}$  and  $s \in \mathbb{N}$  such that we have  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{P} \cong \mathcal{R}^s$ . If  $\mathcal{R}$  is an integral domain, the *rank* of a  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is the dimension of the  $Q(\mathcal{R})$ -vector space  $Q(\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}$  obtained by extending the coefficients of  $\mathcal{M}$  from  $\mathcal{R}$  to its *quotient field*  $Q(\mathcal{R}) = \{r_1/r_2 \mid 0 \neq r_2, r_1 \in \mathcal{R}\}$ . See [7, 18]. Let us now state a standard result on Fitting ideals.

**THEOREM 4.14** ([7], PROP. 20.8, p. 495). *Let  $\mathcal{R}$  be a commutative ring,  $\mathcal{M}$  a finitely presented left  $\mathcal{R}$ -module, and  $C \in \mathcal{R}^{q \times p}$  a presentation matrix of  $\mathcal{M}$ . The following assertions are equivalent:*

- (1)  $\mathcal{M}$  is a projective module of rank  $r$ .

(2)  $\text{Fitt}_i(\mathcal{M}) = \langle 0 \rangle$ , for  $i = 0, \dots, r - 1$ , and  $\text{Fitt}_r(\mathcal{M}) = \mathcal{R}$ .

Note that if  $\mathcal{M}$  is a projective  $\mathcal{R}$ -module of rank 0, then  $\mathcal{M} = 0$ .

Also, while considering the annihilator  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a)$  of an element  $a = \sum_{i=0}^r a_i e \partial^i \in \langle e \rangle$ , we can always suppose that the  $a_i$ 's are  $\mathbb{k}$ -linearly independent. Indeed, if we have  $\sum_{i=0}^r c_i a_i = 0$ , where  $c_i \in \mathbb{k}$ , for  $i = 0, \dots, r$  and  $c_k \neq 0$ , then  $a_k = -\sum_{0 \leq i \neq k \leq r} (c_i/c_k) a_i$ , which yields  $\bigcap_{i=0}^r \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i) = \bigcap_{0 \leq i \neq k \leq r} \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(a_i)$ . Consequently, for our purpose, the matrix  $C$  defined by (9) can always be assumed to have  $\mathbb{k}$ -linearly independent columns.

**LEMMA 4.15.** *Let  $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{k}[t]$  be  $\mathbb{k}$ -linearly independent polynomials and  $m = \max_{i \in [0, r]} \{\deg_t(a_i)\}$ . If  $C \in \mathbb{k}[t]^{(m+2) \times (r+1)}$  is the matrix defined by (9), then we have  $r + 1 \leq m + 2$  and, for all  $h \in \mathbb{k}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{k}} C(h) = r + 1$ , i.e., the columns of  $C(h)$  are  $\mathbb{k}$ -linearly independent.*

**PROOF.** Let us fix  $h \in \mathbb{k}$ . Considering the Taylor expansion of the polynomial  $a_i$  at  $h$ , we have

$$a_i(t) = \sum_{j=0}^{m+1} a_{i,j} t^j = \sum_{j=0}^{m+1} \frac{a_i^{(j)}(h)}{j!} (t-h)^j.$$

Expanding the latter expression yields

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m+1} \frac{a_i^{(j)}(h)}{j!} (t-h)^j &= \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{a_i^{(j)}(h)}{j!} (-h)^{j-k} t^k, \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \left( \sum_{j=k}^{m+1} \binom{j}{k} \frac{(-h)^{j-k}}{j!} a_i^{(j)}(h) \right) t^k. \end{aligned}$$

Hence, we obtain the linear system

$$\sum_{j=k}^{m+1} \frac{(-h)^{j-k}}{k!(j-k)!} a_i^{(j)}(h) = a_{i,k}, \quad i = 0, \dots, r, \quad k = 0, \dots, m+1,$$

which can be written as

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -h & \frac{h^2}{2} & \dots & \dots & \frac{(-h)^{m+1}}{0!(m+1)!} \\ 0 & 1 & -h & \frac{h^2}{2} & \dots & \frac{(-h)^m}{1!m!} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{h}{2} & \dots & \frac{(-h)^{m-1}}{2!(m-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{(m+1)!} \end{pmatrix}}_G C(h) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{r,0} \\ a_{0,1} & \dots & a_{r,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{0,m+1} & \dots & a_{r,m+1} \end{pmatrix}}_H$$

where  $C(h)$  denotes the value of the matrix  $C$  defined by (9) at  $h \in \mathbb{k}$ . Now, the fact that  $a_0, \dots, a_r$  are  $\mathbb{k}$ -linearly independent means that  $\sum_{i=0}^r a_i c_i = 0$ , i.e.,  $\sum_{i=0}^r a_{i,l} c_i = 0$ , for  $l = 0, \dots, m+1$ , implies  $c_i = 0$ , for  $i = 0, \dots, r$ . Consequently, considering the linear map  $H : \mathbb{k}^{(r+1) \times 1} \rightarrow \mathbb{k}^{(m+2) \times 1}$ , we have  $\ker_{\mathbb{k}}(H) = 0$ , which shows that  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(H) = \dim_{\mathbb{k}} \text{im}_{\mathbb{k}}(H) = r + 1 \leq m + 2$ . The fact that  $\det(G) \neq 0$  finally yields  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(C(h)) = r + 1$ .  $\square$

**PROPOSITION 4.16.** *Let  $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{k}[t]$  be  $\mathbb{k}$ -linearly independent polynomials,  $m = \max_{i \in [0, r]} \{\deg_t(a_i)\}$ , and  $C \in \mathbb{k}[t]^{(m+2) \times (r+1)}$  the matrix defined by (9). Then, we have  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(C) = 0$ .*

**PROOF.** First, from Lemma 4.15, we have  $r + 1 \leq m + 2$ . Then,  $\text{Fitt}_0(\mathcal{N})$  is the ideal of  $\mathbb{k}[t]$  formed by all the  $r + 1$  minors of the matrix  $C$ . Moreover, Lemma 4.15 also implies that the affine algebraic set  $V(\text{Fitt}_0(\mathcal{N})) = \{t \in \mathbb{k} \mid \forall F \in \text{Fitt}_0(\mathcal{N}), F(t) = 0\}$  is empty, which, by the Nullstellensatz, shows that  $\text{Fitt}_0(\mathcal{N}) = \mathbb{k}[t]$ . Thus, Theorem 4.14 implies  $\mathcal{N} = 0$ .  $\square$

The proof of Proposition 4.12 shows that  $\mathcal{N} = 0$  yields the existence of a left inverse  $U$  of  $C$ , i.e.,  $UC = I_{r+1}$ . The converse result also holds. If  $UC = I_{r+1}$ , then  $\text{im}_{\mathbb{k}[t]}(C) = \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)}$ , i.e.,  $\mathcal{N} = 0$ . Thus, for  $\mathbb{k}$ -linearly independent  $a_i$ 's, Proposition 4.16 states the existence of a left inverse of  $C$ .

**COROLLARY 4.17.** *Let  $a = \sum_{i=0}^r a_i e \partial^i \in \langle e \rangle$ , where  $a_i \in \mathbb{k}[t]$ , for  $i = 0, \dots, r$ . Moreover, we assume that the  $a_i$ 's are  $\mathbb{k}$ -linearly independent. Then, we have  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a) = \sum_{j=1}^u \mathbb{I}_1 f_j$ , where the  $f_j$ 's are the differential operators defined in Lemma 4.5 and  $u = m - r + 1$ .*

**PROOF.** Theorem 4.9, Proposition 4.12, and Proposition 4.16 imply the first part of the result. Using the fact that  $C$  has a left inverse, i.e.,  $C$  is surjective, we have the following standard exact sequence

$$0 \longrightarrow \ker_{\mathbb{k}[t]}(C) \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times (m+2)} \xrightarrow{C} \mathbb{k}[t]^{1 \times (r+1)} \longrightarrow 0,$$

which yields  $\text{rank}_{\mathbb{k}[t]} \ker_{\mathbb{k}[t]}(C) = m + 2 - (r + 1) = m - r + 1$  [18]. Since  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(C)$  is a  $\mathbb{k}[t]$ -submodule of a free  $\mathbb{k}[t]$ -module and  $\mathbb{k}[t]$  is a principal ideal domain,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(C)$  is then a free  $\mathbb{k}[t]$ -module of rank  $m - r + 1$  [18], i.e.,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(C) \cong \mathbb{k}[t]^{1 \times (m-r+1)}$ . Thus, we can take  $u = m - r + 1$  in Lemma 4.5, which completes the result.  $\square$

**Example 4.18.** Let us consider again Examples 4.6 and 4.8. Using, e.g., Maple, we can see that the matrix  $C$  admits the left inverse

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -t & \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

This yields  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(C) = 0$  and we can use the result of Proposition 4.12. In Examples 4.6 and 4.8, we found that  $e(D) \neq E$ . But the matrices  $E$  and  $e(D)$  generate the same  $\mathbb{k}$ -vector space since we have  $E = V e(D)$ , where  $V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Proposition 4.12 then implies that we can choose  $E$  to be  $e(D)$  so that  $g_1 = e f_1$  and  $g_2 = e f_2$ . Finally, Corollary 4.17 yields  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a) = \mathbb{I}_1 f_1 + \mathbb{I}_1 f_2$ , where  $f_1$  and  $f_2$  are defined in Example 4.6.

Note that Proposition 4.4 is a direct consequence of Corollary 4.17. Indeed, in the case  $a = p e$ , we have  $C = (p \dots p^{(m)} 0)^T$ , where  $p^{(m)} = m! \text{lc}(p) \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$ , and thus,  $\mathcal{N} = \mathbb{k}[t]/\langle p, \dots, p^{(m)} \rangle = 0$ . In this case,  $r = 0$  yields  $u = m + 1 = \deg_t(p) + 1$ , i.e.,  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(p e)$  can be generated by  $m + 1$  elements. However Proposition 4.4 shows that  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(p e)$  can be generated by two elements. Indeed, this result comes from Stafford's theorem [19] stating that every left ideal of  $\mathbb{A}_1$  can be generated by two elements and the fact that [5, Proposition 3.2] gives two explicit generators for  $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_1}(p)$ . An extension of Stafford's theorem, namely, that every finitely generated left/right ideal of  $\mathbb{I}_1$  (e.g.,  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a)$  for  $a \in \mathbb{I}_1$ ) can be generated by two elements of  $\mathbb{I}_1$ , was proved in [1]. Reducing the set of generators of  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(a)$  obtained in Proposition 4.4 to two elements is out of the

scope of the present paper. For the case of  $\mathbb{A}_1$ , see [16] and the references therein.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank Vincent Neiger for interesting discussions about the proofs of Lemmas 4.15 and Proposition 4.16.

## REFERENCES

- [1] V. V. Bavula. *The algebra of integro-differential operators on an affine line and its modules*. Journal of Pure and Applied Algebra, 217 (3), 495–529, 2013.
- [2] A. Borel. *Algebraic D-modules*. Perspectives in Mathematics, vol. 2, Academic Press, 1987.
- [3] F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz. *OreModules: A symbolic package for the study of multidimensional linear systems*. Applications of Time-Delay Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 352, Springer, 233–264 (2007), <https://who.rocq.inria.fr/Alban.Quadrat/OreModules.html>.
- [4] M. Barkatou, T. Cluzeau. *On polynomial solutions of linear integro-differential equations*. Proceedings of the 8th IFAC Symposium on System Structure and Control, Montreal, Canada, 2022.
- [5] M. Chartouny, T. Cluzeau, A. Quadrat. *Algorithmic study of the algebraic parameter estimation problem for a class of perturbations*. To appear in Maple Transactions, 2023.
- [6] S. C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-modules*. Cambridge University Press, 1995.
- [7] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer, 1995.
- [8] N. Jacobson. *Some remarks on one-sided inverses*. Proceedings of the American Mathematical Society, 1 (3), 352–355, 1950.
- [9] M. Kashiwara, T. Kawai, T. Kimura. *Foundations of Algebraic Analysis*. Princeton University Press, 1986.
- [10] A. Korporal, G. Regensburger, M. Rosenkranz. *Symbolic computation for ordinary boundary problems in Maple*. ACM Communications in Computer Algebra, 44 (3/4): 120–122, 2011.
- [11] H. Lombardi, C. Quitté. *Commutative Algebra: Constructive Methods: Finite Projective Modules*, Algebra and Its Applications, vol. 20, Springer, Dordrecht, 2015.
- [12] J. C. McConnell, J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society, 2000.
- [13] A. Quadrat. *An introduction to constructive algebraic analysis and its applications*. Les cours du CIRM, 1 no. 2, Journées Nationales de Calcul Formel (2010), 281–471, 2010.
- [14] A. Quadrat. *An integro-differential operator approach to linear differential systems*. Proceedings of the 25th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Bayreuth, Germany, 2022.
- [15] A. Quadrat. *An integro-differential operator approach to linear state-space systems*. Proceedings of the 8th IFAC Symposium on System Structure and Control, Montreal, Canada, 2022.
- [16] A. Quadrat, D. Robertz. *Computation of bases of free modules over the Weyl algebras*. Journal of Symbolic Computation, 42: 1113–1141, 2007.
- [17] A. Quadrat, G. Regensburger. *Computing polynomial solutions and annihilators of integro-differential operators with polynomial coefficients*. Algebraic Methods and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems, Advances in Delays and Dynamics, 9, 87–114, 2020.
- [18] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, 2<sup>nd</sup> edition, 2009.
- [19] J. T. Stafford. *Module structure of Weyl algebras*. J. London Math. Soc., 18 (3): 429–442, 1978.
- [20] B. Stenström. *Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory*. Springer, 1975.

# Effective characterization of evaluation ideals of the ring of integro-differential operators

THOMAS CLUZEAU, Univ. Limoges, CNRS, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, France

CAMILLE PINTO, Sorbonne University – Inria Paris, France

ALBAN QUADRAT, Sorbonne University – Inria Paris, France

This paper provides a step forward to developing an algorithmic study of linear systems of polynomial ordinary integro-differential equations over a field  $\mathbb{k}$  of characteristic zero. Such a study can be achieved by first obtaining a constructive proof of the coherence property of the ring  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  of linear ordinary integro-differential operators with coefficients in  $\mathbb{k}[t]$ . To do that, the finiteness of the intersection of two finitely generated ideals has to be algorithmically studied. Three cases must be considered: first when evaluation operators generate the two ideals; second, when only one ideal is generated by evaluation operators; and third, when none is generated by evaluation operators. In this paper, we first explicitly characterize the intersection of two finitely generated ideals defined by evaluation operators. As for the second case, a key result is that the ideals generated by evaluations are semisimple  $\mathbb{I}_1$ -modules. We develop an algorithmic proof of this result. In particular, we show how a finite set of generators, defined by “simple” evaluations, can be obtained, that characterizes the class of finitely generated evaluation ideals of  $\mathbb{I}_1$  as finitely generated  $\mathbb{k}[t]$ -modules. Due to lack of space, the second and third cases will be developed in other publications.

CCS Concepts: • **Computing methodologies** → **Symbolic and algebraic manipulation**; • **Symbolic and algebraic algorithms** → *Algebraic algorithms*.

Additional Key Words and Phrases: Linear systems of integro-differential equations, rings of integro-differential operators, noncommutative polynomial rings, elimination theory, coherent rings, semisimple modules

## ACM Reference Format:

Thomas Cluzeau, Camille Pinto, and Alban Quadrat. 2024. Effective characterization of evaluation ideals of the ring of integro-differential operators. In *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '24)*, July 16–19, 2024, Raleigh, NC, USA. ACM, New York, NY, USA, 9 pages. <https://doi.org/10.1145/3666000.3669682>

## 1 INTRODUCTION

Calculus is fundamental in mathematics, mathematical physics, and engineering sciences. The idea of mechanizing the computation of integro-differential expressions is rather old in computer algebra. The problem of simplifying integro-differential expressions using a consistent system of rewriting rules – which corresponds

---

Authors' addresses: Thomas Cluzeau, Univ. Limoges, CNRS, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, France, [thomas.cluzeau@unilim.fr](mailto:thomas.cluzeau@unilim.fr); Camille Pinto, Sorbonne University – Inria Paris, Paris, France, [camille.pinto@inria.fr](mailto:camille.pinto@inria.fr); Alban Quadrat, Sorbonne University – Inria Paris, Paris, France, [alban.quadrat@inria.fr](mailto:alban.quadrat@inria.fr).

---

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. Copyrights for components of this work owned by others than the author(s) must be honored. Abstracting with credit is permitted. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee. Request permissions from [permissions@acm.org](mailto:permissions@acm.org).

ISSAC '24, July 16–19, 2024, Raleigh, NC, USA

© 2024 Copyright held by the owner/author(s). Publication rights licensed to ACM.

ACM ISBN 979-8-4007-0696-7/24/07

<https://doi.org/10.1145/3666000.3669682>

to the standard calculus relations between the differential, integral, function multiplication, and evaluation operators – has recently regained interest in computer algebra, control theory, physics, etc.

The fine algebraic study of the ring  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  of polynomial ordinary integro-differential operators, where  $\mathbb{k}$  is a field of characteristic 0, was initiated in [1]. See also [11]. It can easily be shown that  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  is not a left nor a right noetherian ring. An important result of Bavula (see [1, Theorem 4.4]) proves that  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  is a *coherent ring*, namely, the left/right  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$ -module of relations between the generators of any finitely generated left/right ideal of  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  is finitely generated.

A linear system of polynomial ordinary integro-differential equations naturally defines a *finitely presented* left  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$ -module: its representation as a linear system  $Ry = 0$  yields a matrix of integro-differential operators  $R \in \mathbb{I}_1(\mathbb{k})^{q \times p}$ , and thus, the finitely presented left  $\mathbb{I}_1$ -module  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1(\mathbb{k})}(.R) = \mathbb{I}_1(\mathbb{k})^{1 \times p} / (\mathbb{I}_1(\mathbb{k})^{1 \times q} R)$ . Within the *algebraic analysis approach* [2, 8, 9], the solution space of the corresponding integro-differential linear system can then be interpreted as the  $\mathbb{k}$ -vector space  $\text{hom}_{\mathbb{I}_1(\mathbb{k})}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  of all the left  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$ -homomorphisms from  $\mathcal{M}$  to a left  $\mathbb{I}_1$ -module  $\mathcal{F}$  where the solutions are sought. Hence, the study of linear systems of polynomial ordinary integro-differential naturally lies in the *category of finitely presented left  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$ -modules*. In homological algebra, it is well-known that finitely presented left modules over a coherent ring are stable by all the standard algebraic operations, exactly as the category of finitely generated left modules over a left noetherian ring. Bavula's result on the coherence of  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  thus opens the possibility to develop an algorithmic study of polynomial ordinary integro-differential systems within the algebraic analysis approach. Such an approach would be the extension of the effective algebraic analysis approach to linear systems of polynomial ordinary differential equations defined over the *Weyl algebra*  $\mathbb{A}_1(\mathbb{k})$  (see, e.g., [3, 9]).

To develop such a research program, we first have to obtain an algorithmic version of Bavula's proof, i.e., an *algorithmic elimination theory* for polynomial ordinary integro-differential linear systems.

The goal of this paper is to further develop the algorithmic proof of the coherence of  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  initiated in [5].

The coherence property relies on a characterization that includes two conditions. The first one states that the left/right annihilator of an element of  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  is finitely generated. An algorithmic proof of this condition was developed in [10] for the elements of  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  that do not belong to the only two-sided ideal  $\langle e \rangle$  of  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  defined by *evaluation operators*, namely, the elements of  $\langle e \rangle = \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial]$ , where  $\partial = d/dt$  denotes the differential operator with respect to  $t$ ,  $I = \int_0^t \cdot d\tau$  the indefinite integral operator, and  $e = 1 - I\partial$  the evaluation at  $t = 0$ . The case of the annihilator of the elements of  $\langle e \rangle$  was algorithmically developed in [5].

In this paper, we study the second condition of the coherence property that states that the intersection of two finitely generated left/right ideals of  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  is finitely generated. We first show how the method proposed in [5] can be extended to effectively characterize the intersection of two left ideals  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$  finitely generated by evaluation operators, i.e.,  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \langle e \rangle$ . To study the case where only one ideal is included in  $\langle e \rangle$ , a key ingredient of the proof of [1, Theorem 4.4] relies on the fact that ideals defined by evaluations are *semisimple*  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$ -modules. We then develop an algorithmic proof of this result by showing how a finite set of generators  $\{g_i\}_{i=1,\dots,s}$  of  $\mathcal{I}$ , formed by “simple” evaluations, namely, elements of  $e\mathbb{k}[\partial]$ , can be computed. This result exhibits the semisimple property of  $\mathcal{I}$  since we then have  $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^s \mathbb{I}_1(\mathbb{k}) g_i = \sum_{i=1}^s \mathbb{k}[t] g_i \cong \mathbb{k}[t]^s$ , where  $\mathbb{k}[t]$  is a *simple* left  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$ -module (see [1]). The fact that  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  is finitely generated in the case of two finitely generated ideals  $\mathcal{I} \subseteq \langle e \rangle$  and  $\mathcal{J} \not\subseteq \langle e \rangle$  or  $\mathcal{I} \not\subseteq \langle e \rangle$  and  $\mathcal{J} \subseteq \langle e \rangle$  will be constructively studied in other publications.

## 2 GENERALITIES ON THE RING OF INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS

In the rest of the paper,  $\mathbb{k}$  will denote a field of characteristic zero ( $\mathbb{Q}$  while studying the computational aspects) and  $\mathbb{k}[t]$  the ring of polynomials with coefficients in  $\mathbb{k}$ .

### 2.1 The ring of integro-differential operators

Let  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  be the endomorphism ring of  $\mathbb{k}[t]$ , namely, the ring of all the  $\mathbb{k}$ -linear maps from  $\mathbb{k}[t]$  to itself. This paper studies some properties of the ring  $\mathbb{I}_1$  of *ordinary integro-differential operators with polynomial coefficients* which is defined as follows.

*Definition 2.1.* The ring  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  of *ordinary integro-differential operators with polynomial coefficients* is the  $\mathbb{k}$ -subalgebra of  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  generated by the following three linear operators:

$$\begin{aligned} t : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longmapsto t p, \\ \partial : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longmapsto \frac{dp(t)}{dt}, \\ I : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longmapsto \int_0^t p(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

In what follows,  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  will simply be denoted by  $\mathbb{I}_1$ .

Notice that  $\mathbb{I}_1$  contains the *Weyl algebra*  $\mathbb{A}_1$  of ordinary linear differential operators with polynomial coefficients defined as the  $\mathbb{k}$ -subalgebra of  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  generated by the operators  $t$  and  $\partial$  above.

Among the elements of the ring  $\mathbb{I}_1$ , let  $1$  denote the identity of  $\text{end}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  and let us consider  $e := 1 - I\partial$ . It satisfies:

$$\forall p \in \mathbb{k}[t], \quad e(p) = (1 - I\partial)(p) = p(0).$$

Hence,  $e$  corresponds to the *evaluation operator* at 0. Note that  $e$  is *multiplicative*, namely,  $e(p_1 p_2) = e(p_1) e(p_2)$  for all  $p_1, p_2 \in \mathbb{k}[t]$ .

In the ring  $\mathbb{I}_1$ , certain identities between the operators  $t$ ,  $\partial$ ,  $I$ , and  $e$  hold [1, 5, 10, 11]. For instance, we have  $\partial I = 1$  and  $I\partial = 1 - e$ , which correspond respectively to the first and second fundamental theorems of calculus. It can be proved that every element  $f \in \mathbb{I}_1$  can

be written uniquely as

$$f = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i + \sum_{j=0}^m b_j I c_j + \sum_{k=0}^r d_k e \partial^k,$$

where  $a_i, b_j, c_j, d_k \in \mathbb{k}[t]$  and  $n, m, r \in \mathbb{N}$ . For more details, see [1, 5, 10, 11]. The above writing is called the *normal form* of  $f$ . In what follows, an element of  $\mathbb{I}_1$  with a normal form of the form  $\sum_{k=0}^r d_k e \partial^k$ , where  $d_k \in \mathbb{k}[t]$ , will be called an *evaluation operator*. We shall see that ideals of  $\mathbb{I}_1$  generated by such evaluation operators have interesting properties. We recall that the set  $\langle e \rangle := \mathbb{I}_1 e \mathbb{I}_1$  is the only two-sided ideal of  $\mathbb{I}_1$  (see [1]). We further have:

$$\langle e \rangle = \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial] = \left\{ d \in \mathbb{I}_1 \mid d = \sum_{j=0}^q d_k e \partial^k, d_k \in \mathbb{k}[t], q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Thus,  $\langle e \rangle$  is the ideal formed by all the evaluation operators of  $\mathbb{I}_1$ . A left/right ideal  $I \subseteq \langle e \rangle$  will be called an *evaluation ideal*.

An interesting family of evaluation operators is formed by the *Taylor operators*  $T_n$  defined by:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} e \partial^k. \quad (1)$$

One can first prove the following identity

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n + I^{n+1} \partial^{n+1} = 1, \quad (2)$$

which is the operator-theoretic interpretation of Taylor’s theorem with integral remainder. See [5, Lemma 2.4]. In particular, (2) shows that the sequence  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  plays the role of an *approximate identity* in  $\langle e \rangle$ . It explains why (2) plays a central role in [5] and in this paper.

The operators  $T_n$ ’s satisfy  $T_m T_n = T_m$  for  $0 \leq m \leq n$ . They provide the strictly ascending chain  $(\mathbb{I}_1 T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of left ideals of  $\mathbb{I}_1$  ([10]), which proves that  $\mathbb{I}_1$  is not left noetherian. Using the involution  $\theta$  of  $\mathbb{I}_1$  defined by  $\theta(\partial) = I$ ,  $\theta(I) = \partial$ , and  $\theta(t) = \partial t p = (t \partial + 1) p$  (see [1]), we can deduce that  $\mathbb{I}_1$  is also not a right noetherian ring.

Therefore, contrary to its noetherian subring  $\mathbb{A}_1$  (see, e.g., [2]),  $\mathbb{I}_1$  is not noetherian. This negative result seems to be an important obstruction for the development of an algorithmic study of the linear systems of integro-differential operators. In the next section, we shall explain why this is fortunately not the end of the story.

### 2.2 The ring of integro-differential operators is coherent

As explained in [5], the fact that one can develop an algorithmic study of linear systems over  $\mathbb{I}_1$  relies on the so-called *coherence* property of  $\mathbb{I}_1$ . Let us recall it hereafter.

Let  $\mathcal{R}$  be a noncommutative ring. A left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is said to be *finitely generated* if it admits a finite set of generators, i.e., there is a family  $\{g_i\}_{i=1,\dots,p}$ , where  $g_i \in \mathcal{M}$  and  $p \in \mathbb{N}$ , such that every element  $m \in \mathcal{M}$  can be written as  $m = \sum_{i=1}^p r_i g_i$  for some  $r_i \in \mathcal{R}$ .

A left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$ , finitely generated by  $\{g_i\}_{i=1,\dots,p}$ , is said to be *finitely presented* if the left  $\mathcal{R}$ -module of relations between the generators  $\{g_i\}_{i=1,\dots,p}$ , i.e.,

$$\text{Syz}(\mathcal{M}) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathcal{R}^{1 \times p} \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i = 0 \right\}$$

is finitely generated.

Let  $\{e_i\}_{i=1,\dots,p}$  be the standard basis of  $\mathcal{R}^{1 \times p}$  (i.e., the  $i^{\text{th}}$  entry of  $e_i$  is 1 and the other entries are 0) and  $\pi : \mathcal{R}^{1 \times p} \rightarrow \mathcal{M}$  the left  $\mathcal{R}$ -epimorphism defined by sending  $e_i$  onto  $g_i$  for  $i = 1, \dots, p$ , i.e.,  $\pi(\lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i$  for all  $\lambda \in \mathcal{R}^{1 \times p}$ . Then, we have  $\ker \pi = \text{Syz}(\mathcal{M})$ .

Let us suppose that  $\text{Syz}(\mathcal{M})$  is a finitely generated left  $\mathcal{R}$ -module and  $\{R_{i\bullet}\}_{i=1,\dots,q}$  is a set of generators of  $\text{Syz}(\mathcal{M})$ , where  $R_{i\bullet} \in \mathcal{R}^{1 \times p}$  and  $R = (R_{1\bullet}^T \ \dots \ R_{q\bullet}^T)^T \in \mathcal{R}^{q \times p}$ . If  $.R : \mathcal{R}^{1 \times q} \rightarrow \mathcal{R}^{1 \times p}$  is the left  $\mathcal{R}$ -homomorphism defined by  $(.R)(\mu) := \mu R$  for all  $\mu \in \mathcal{R}^{1 \times q}$ , then  $\mathcal{S} = \text{im}_{\mathcal{R}}(.R) := \mathcal{R}^{1 \times q} R$  and we have the following exact sequence

$$\mathcal{R}^{1 \times q} \xrightarrow{.R} \mathcal{R}^{1 \times p} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

namely,  $\ker \pi = \text{im}_{\mathcal{R}}(.R)$  and  $\pi$  is surjective, which then yields  $\mathcal{M} \cong \text{coker}(.R) = \mathcal{R}^{1 \times p} / (\mathcal{R}^{1 \times q} R)$ . The left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is said to be *finitely presented* by  $R \in \mathcal{R}^{q \times p}$ . For more details, see [2, 12].

We can now give the definition of a coherent ring.

**Definition 2.2.** Let  $\mathcal{R}$  be a noncommutative ring. A left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is said to be *left coherent* if  $\mathcal{M}$  is a finitely generated left  $\mathcal{R}$ -module and if every finitely generated left  $\mathcal{R}$ -submodule of  $\mathcal{M}$  is finitely presented. The ring  $\mathcal{R}$  is said to be *left coherent* if  $\mathcal{R}$  is a left coherent  $\mathcal{R}$ -module, i.e., if every finitely generated left ideal of  $\mathcal{R}$  is finitely presented. Symetric definitions hold for right  $\mathcal{R}$ -modules and a ring is said to be *coherent* if it is both left and right coherent.

In [1], Bavula proved the following important result for  $\mathbb{I}_1$ .

**THEOREM 2.3** ([1], THEOREM 4.4).  $\mathbb{I}_1$  is a coherent ring.

To prove the latter theorem, Bavula used the following standard characterization of coherent rings.

**PROPOSITION 2.4** ([13], PROPOSITION 13.3). A ring  $\mathcal{R}$  is left coherent if and only if the following two conditions hold:

- (1) For every  $a \in \mathcal{R}$ ,  $\text{ann}_{\mathcal{R}}(.a) := \{r \in \mathcal{R} \mid ra = 0\}$  is a finitely generated left ideal.
- (2) For all finitely generated left ideals  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$ , the left ideal  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  is finitely generated.

A similar result holds for a right coherent ring ( $\text{ann}_{\mathcal{R}}(.a)$  is then replaced by  $\text{ann}_{\mathcal{R}}(a)$  and left ideals by right ideals).

The proof of the coherence of  $\mathbb{I}_1$  given in [1] is not algorithmic. In order to develop an effective algebraic analysis approach to linear systems over  $\mathbb{I}_1$ , we aim at providing such a constructive proof. To do that, we rely on the characterization of Proposition 2.4. In [10], an algorithmic characterization of  $\text{ann}_{\mathcal{R}}(.a)$  for  $a \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$  was obtained. In [5], we provided an explicit characterization of  $\text{ann}_{\mathcal{R}}(.a)$  for  $a \in \langle e \rangle$  and gave an algorithm for computing a finite set of generators for  $\text{ann}_{\mathcal{R}}(.a)$ . Therefore, Condition (1) on the annihilators of elements of  $\mathbb{I}_1$  was made algorithmic. It thus remains to obtain a constructive version of Condition (2). It is the goal of the present paper. More precisely, to do that, we distinguish three cases depending on the fact that both, one, or none of the ideals is an evaluation ideal, i.e., is included in  $\langle e \rangle$ . In this paper, we shall handle the first case. Due to lack of space, the second one will be developed in another publication (based on the results of Section 4 in the present paper). The last one will be investigated in the future (see Section 5).

### 3 THE INTERSECTION OF EVALUATION IDEALS

In this section, we shall provide an algorithmic version of Condition (2) of Proposition 2.4 in the case where both  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$  are finitely generated left evaluation ideals.

For instance, if we consider the principal ideals generated by the Taylor operators defined by (2), namely,  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1 T_r$  and  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1 T_s$  for two integers  $r, s \in \mathbb{N}$  such that  $r \leq s$ , then, the relation  $T_r T_s = T_r$  implies that  $\mathbb{I}_1 T_r \subset \mathbb{I}_1 T_s$  so that we have  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathbb{I}_1 T_r = \mathcal{I}$ .

To develop a method for all evaluations ideals, we shall first generalize the algorithm developed in [5], which computes generators of the annihilator of a scalar evaluation operator, to the matrix case.

#### 3.1 Annihilator of a matrix evaluation operator

Let  $R = \sum_{k=0}^n R_k(t) e \partial^k \in \langle e \rangle^{q \times p}$ , where  $R_k \in \mathbb{K}[t]^{q \times p}$ , be a matrix whose entries are all evaluation operators. Let us show how to determine a finite set of generators for  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \{u \in \mathbb{I}_1^{1 \times q} \mid uR = 0\}$ .

To do that, we shall need the following definition.

**Definition 3.1.** If  $A$  is a matrix with entries in  $\mathbb{K}[t]$ , then the *degree* of  $A$ , denoted by  $\text{deg}(A)$ , is the maximal degree of all its entries.

Note that the proofs of Lemma 4.5, Proposition 4.7, and Theorem 4.9 of [5] can easily be generalized to the matrix case by adapting the dimensions of the matrices. Hence, we have the following result.

**THEOREM 3.2.** Let  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$  and write  $R = \sum_{k=0}^n R_k(t) e \partial^k$ , where  $R_k \in \mathbb{K}[t]^{q \times p}$ . Let  $m = \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \text{deg}(R_k)$ , and

$$C = \begin{pmatrix} R_0 & \dots & R_n \\ \vdots & & \vdots \\ R_0^{(m+1)} & \dots & R_n^{(m+1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{q(m+2) \times p(n+1)}, \quad J_{m+1} = \begin{pmatrix} I_q \\ I_q \partial \\ \vdots \\ I_q \partial^{m+1} \end{pmatrix}.$$

Finally, let  $D \in \mathbb{K}[t]^{r \times q(m+2)}$  and  $E \in \mathbb{K}^{s \times q(m+2)}$  be two full row rank matrices satisfying

$$\ker_{\mathbb{K}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{K}[t]}(.D), \quad \ker_{\mathbb{K}}(.e(C)) = \text{im}_{\mathbb{K}}(.E),$$

and let us define the following matrices

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} = D J_{m+1}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} = E e J_{m+1},$$

where  $u_1, \dots, u_r$  and  $v_1, \dots, v_s$  belong to  $\mathbb{I}_1^{1 \times q}$ . Then, we have:

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 u_i + \sum_{j=1}^s \mathbb{I}_1 v_j = \text{im}_{\mathbb{I}_1} \left( (u_1^T \ \dots \ u_r^T \ v_1^T \ \dots \ v_s^T)^T \right).$$

Thus,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  is a finitely generated left  $\mathbb{I}_1$ -module and a set of generators  $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$  of  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  can effectively be computed.

In [5, Corollary 4.7], for  $a \in \mathbb{I}_1$ , it is proved that  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.a)$  can be generated by the sole  $u_i$ 's. This result was obtained by proving that the  $\mathbb{K}[t]$ -module finitely presented by  $C$ , i.e.,  $\mathcal{N} := \text{coker}_{\mathbb{K}[t]}(.C)$ , is reduced to 0, a fact that implies that we can take  $E = e(D)$ , so that  $s = r$  and  $v_i = e u_i$  for  $i = 1, \dots, r$ . For more details, we refer to [5].

In the matrix case, we can extend [5, Corollary 4.7] by showing that the  $\mathbb{K}[t]$ -module  $\mathcal{N}$  is *free*, i.e.,  $\mathcal{N}$  is isomorphic to  $\mathbb{K}[t]^d$  for a

certain  $d \in \mathbb{N}$ , which is denoted by  $\mathcal{N} \cong \mathbb{k}[t]^d$ . Note that  $d$  is called the *rank* of  $\mathcal{N}$  and the  $\mathbb{k}[t]$ -module  $0$  is free of rank 0. For more details, see [12, Ch. 2, p. 56–60]. As a consequence,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R)$  can be generated by the  $u_i$ 's. To prove this result, we shall need the following lemma.

LEMMA 3.3. *Let  $A \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$ ,  $m = \deg(A)$ , and*

$$D_m(A) = J_m(A) = \begin{pmatrix} A \\ \vdots \\ A^{(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times p},$$

$$U = \begin{pmatrix} I_q & tI_q & \cdots & \frac{t^m}{m!} I_q \\ 0 & I_q & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} I_q \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & I_q \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times q(m+1)}.$$

Then, we have  $U^{-1} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times q(m+1)}$  and

$$U^{-1} D_m(A) = D_m(A)(0) = \begin{pmatrix} A(0) \\ \vdots \\ A^{(m)}(0) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

PROOF. Clearly the matrix  $U$  is invertible and

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} I_q & -tI_q & \cdots & \frac{(-t)^m}{m!} I_q \\ 0 & I_q & \cdots & \frac{(-t)^{m-1}}{(m-1)!} I_q \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & I_q \end{pmatrix}.$$

Then, we have

$$U^{-1} D_m(A) = \begin{pmatrix} A - tA^{(1)} + \frac{t^2}{2!} A^{(2)} + \cdots + \frac{(-t)^m}{m!} A^{(m)} \\ \vdots \\ A^{(i)} - tA^{(i+1)} + \cdots + \frac{(-t)^{m-i}}{(m-i)!} A^{(m)} \\ \vdots \\ A^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Let  $T_i = A^{(i)} - tA^{(i+1)} + \cdots + \frac{(-t)^{m-i}}{(m-i)!} A^{(m)}$  for  $i = 0, \dots, m$ . Differentiating  $T_i$  with respect to  $t$  produces the telescoping sum

$$\frac{dT_i}{dt} = A^{(i+1)} - A^{(i+1)} - tA^{(i+2)} + \cdots \\ \cdots + \frac{(-t)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} A^{(m)} + \frac{(-t)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} A^{(m+1)} = 0,$$

which finally shows that  $T_i = T_i(0) = A^{(i)}(0)$  for  $i = 0, \dots, m$ .  $\square$

With the notations of Theorem 3.2, if we consider the matrix  $A = (R_0 \ \dots \ R_n) \in \mathbb{k}[t]^{q \times p(n+1)}$ , then using Lemma 3.3, we obtain

$$C(0) = \begin{pmatrix} D_m(A)(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1} D_m(A) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_m(A) \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} C. \quad (4)$$

PROPOSITION 3.4. *With the notations of Theorem 3.2, the  $\mathbb{k}[t]$ -module  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$  is such that  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C(0))$ , and thus, is a free  $\mathbb{k}[t]$ -module, namely,  $\mathcal{N} \cong \mathbb{k}[t]^d$ , where*

$$d = p(n+1) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)).$$

PROOF. Let us consider  $A = (R_0 \ \dots \ R_n) \in \mathbb{k}[t]^{q \times p(n+1)}$ . Using (4) and the fact that  $U$  is unimodular, i.e.,  $U^{-1} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times q(m+1)}$ ,  $\mathcal{R}^{1 \times q(m+2)} C = \mathcal{R}^{1 \times q(m+2)} C(0)$ , which yields

$$\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C) = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C(0)) = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot D_m(A)(0)),$$

where

$$D_m(A)(0) = \begin{pmatrix} R_0 & \cdots & R_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ R_0^{(m)}(0) & \cdots & R_n^{(m)}(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{q(m+1) \times p(n+1)}.$$

Finally, using the fact that  $D_m(A)(0)$  is a matrix with entries in  $\mathbb{k}$ ,  $\mathcal{N} \cong \mathbb{k}[t] \otimes_{\mathbb{k}} \text{coker}_{\mathbb{k}}(\cdot D_m(A)(0))$ , where  $\text{coker}_{\mathbb{k}}(\cdot D_m(A)(0))$  is a  $\mathbb{k}$ -vector space of dimension

$$d = p(n+1) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(D_m(A)(0)) = p(n+1) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)),$$

and thus,  $\mathcal{N} \cong \mathbb{k}[t]^d$ , i.e.,  $\mathcal{N}$  is a free  $\mathbb{k}[t]$ -module of rank  $d$ .  $\square$

Example 3.5. Let us consider  $R = t e + t e \partial \in \langle e \rangle$ . Thus, we have  $p = q = 1$ ,  $R = R_0 e + R_1 e p$ , where  $R_0 = R_1 = t$ ,  $m = n = 1$ , and

$$C = \begin{pmatrix} t & t \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t \partial \\ \partial^2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e \partial^2 \end{pmatrix}.$$

By Theorem 3.2, we then have

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) = \text{ann}_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) = \mathbb{I}_1(1 - t \partial) + \mathbb{I}_1 \partial^2 + \mathbb{I}_1 e + \mathbb{I}_1 e \partial^2.$$

Moreover, we can check that (4) holds

$$U = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = C(0).$$

We have  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)) = 1$ , which, by Proposition 3.4, shows that  $\mathcal{N} = \mathbb{k}[t]^{1 \times 2} / (\mathbb{k}[t]^{1 \times 3} C) = \mathbb{k}[t]^{1 \times 2} / (\mathbb{k}[t]^{1 \times 3} C(0))$  is a free  $\mathbb{k}[t]$ -module of rank 1. This last result can easily be checked again [3, 7].

Note that Proposition 3.4 generalizes and simplifies the proof of Proposition 4.16 of [5] as follows.

COROLLARY 3.6. *With the above notations,  $\mathcal{N} = 0$  if and only if  $C(0)$  is a full column rank matrix.*

*If  $p = q = 1$  and if the polynomials  $R_k$ 's are supposed to be  $\mathbb{k}$ -linearly independent, then  $\mathcal{N} = 0$ .*

PROOF. The first result is a direct consequence of Proposition 3.4. Let us now write  $R_k = \sum_{l=0}^m R_{kl} t^l$ , where  $R_{kl} \in \mathbb{k}$ . Using Proposition 3.4,  $\mathcal{N} = \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(\cdot C)$  is then a free  $\mathbb{k}[t]$ -module of rank

$d = n + 1 - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0))$ , where

$$C(0) = \begin{pmatrix} R_{00} & \dots & R_{n0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ m! R_{0m} & \dots & m! R_{nm} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & m! & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00} & \dots & R_{n0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{0m} & \dots & R_{nm} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Over the infinite field  $\mathbb{k}$ , the fact that the  $R_k$ 's are  $\mathbb{k}$ -linearly independent as formal polynomials implies that the right matrix factor of  $C(0)$  has column rank  $n + 1$ . Thus  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)) = n + 1$ , i.e.,  $d = 0$ , and thus,  $\mathcal{N} = 0$ .  $\square$

**THEOREM 3.7.** Let  $R = \sum_{k=0}^n R_k(t) e \partial^k \in \langle e \rangle^{q \times p}$  with matrices  $R_k \in \mathbb{k}[t]^{q \times p}$ . With the notations of Theorem 3.2, we have

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 u_i = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.U), \quad U = \left( u_1^T \dots u_r^T \right)^T,$$

where  $r = q(m + 2) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0))$  and  $m = \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \deg(R_k)$ .

**PROOF.** With the notations of Theorem 3.2, we have the following long exact sequence of  $\mathbb{k}[t]$ -modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times r} \xrightarrow{D} \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+2)} \xrightarrow{C} \mathbb{k}[t]^{1 \times p(n+1)} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{N} \longrightarrow 0,$$

where  $\sigma$  denotes the canonical projection onto  $\mathcal{N}$ . By Proposition 3.4,  $\mathcal{N}$  is a free  $\mathbb{k}[t]$ -module of rank  $d = p(n + 1) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0))$ . Since the alternative sum of ranks in an exact sequence is zero (see [12, Exercise 3.16(i), p. 129]), we have

$$r - q(m + 2) + p(n + 1) - d = 0 \Rightarrow r = q(m + 2) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)).$$

The freeness of  $\mathcal{N}$  also implies that the latter exact sequence *splits* (in other words, we have a *contractible complex* [12, Ch. 6, p. 337]), i.e., that there exist  $X \in \mathbb{k}[t]^{q(m+2) \times r}$  and  $Y \in \mathbb{k}[t]^{p(n+1) \times q(m+2)}$  satisfying the identities  $DX = I_r$  and  $XD + CY = I_{q(m+2)}$ . Using  $DC = 0$ , we have  $D(0)C(0) = 0$ , i.e.,  $\text{im}_{\mathbb{k}}(.D(0)) \subseteq \ker_{\mathbb{k}}(.C(0))$ . Now, if  $v \in \ker_{\mathbb{k}}(.C(0))$ , using  $X(0)D(0) + C(0)Y(0) = I_{q(m+2)}$ , we obtain  $v = (vX(0))D(0)$ , which yields  $v \in \text{im}_{\mathbb{k}}(.D(0))$ , and thus,  $\ker_{\mathbb{k}}(.C(0)) = \text{im}_{\mathbb{k}}(.D(0))$ . Thus, we can take  $E = e(D)$  in Theorem 3.2. With the notations of Theorem 3.7, using the identity  $ea = e(a)e$  for all  $a \in \mathbb{k}[t]$ ,  $v = EeJ_{m+1} = e(D)eJ_{m+1} = eDJ_{m+1} = eu$ , i.e., the  $v_j$ 's are evaluations of the  $u_i$ 's, which ends the proof.  $\square$

**Example 3.8.** Continuing Example 3.5,  $e u_1 = e(1 - t\partial) = e = v_1$  and  $e u_2 = e\partial^2 = v_2$  yield  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1(1 - t\partial) + \mathbb{I}_1\partial^2$ .

**REMARK.** Let us explain how a full row matrix  $D \in \mathbb{k}[t]^{r \times q(m+2)}$  satisfying  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$  can directly be computed. Let  $E \in \mathbb{k}^{s \times q(m+2)}$  be a full row rank satisfying  $\ker_{\mathbb{k}}(.C(0)) = \text{im}_{\mathbb{k}}(.E)$ . Such a matrix can easily be computed using linear algebra methods. If we denote by  $V \in \mathbb{k}[t]^{q(m+2) \times q(m+2)}$  the first matrix in the right-hand side of (4), using (4), we then get  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.EV)$ .

### 3.2 Generators of the intersection of evaluation ideals

We shall now use the results of Section 3.1 to show how to compute a finite set of generators of the intersection of two finitely generated evaluation ideals, i.e., finitely generated ideals of  $\mathbb{I}_1$  included in  $\langle e \rangle$ .

**THEOREM 3.9.** Let  $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbb{I}_1 p_i$  and  $\mathcal{J} = \sum_{j=1}^{n_2} \mathbb{I}_1 q_j$  be two finitely generated evaluation ideals. Moreover, let

$$p = (p_1 \dots p_{n_1})^T, \quad q = (q_1 \dots q_{n_2})^T,$$

and

$$R = \begin{pmatrix} p^T & q^T \end{pmatrix}^T = (p_1 \dots p_{n_1} \ q_1 \dots q_{n_2})^T \in \langle e \rangle^{(n_1+n_2) \times 1}.$$

If  $u_1, \dots, u_r$  are the generators of  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  given by Theorem 3.7, i.e.,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 u_i$ , where  $u_i = (u_{i,1} \ u_{i,2}) \in \mathbb{I}_1^{1 \times (n_1+n_2)}$ ,  $u_{i,1} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_1}$ , and  $u_{i,2} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_2}$ , then, we have

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (u_{i,1} p) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (u_{i,2} q).$$

In particular,  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  is finitely generated and a set of generators can explicitly be computed.

**PROOF.** With the notations of Theorem 3.7,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 u_i$ , where  $u_i = (u_{i,1} \ u_{i,2}) \in \mathbb{I}_1^{1 \times (n_1+n_2)}$ ,  $u_{i,1} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_1}$ , and  $u_{i,2} \in \mathbb{I}_1^{1 \times n_2}$ . Therefore, we have  $u_{i,1} p = -u_{i,2} q$  for  $i = 1, \dots, r$ , which shows that  $\sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (u_{i,1} p) = \sum_{i=1}^r \mathbb{I}_1 (u_{i,2} q) \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ .

Let us now consider  $x \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ . Thus,  $x \in \mathcal{I}$  so that there exist  $a_1, \dots, a_{n_1} \in \mathbb{I}_1$  such that  $x = \sum_{i=1}^{n_1} a_i p_i = ap$  with  $a := (a_1 \dots a_{n_1})$ . Similarly,  $x \in \mathcal{J}$  so that there exist  $b_1, \dots, b_{n_2} \in \mathbb{I}_1$  satisfying  $x = \sum_{i=1}^{n_2} b_i q_i = bq$  with  $b := (b_1 \dots b_{n_2})$ . Therefore, we have the relation  $x = ap = bq$ , which implies  $(a \ -b)R = 0$  so that  $(a \ -b) \in \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ . We thus have  $(a \ -b) = \sum_{i=1}^r f_i u_i$  for some  $f_i \in \mathbb{I}_1$ , and thus,  $a = \sum_{i=1}^r f_i u_{i,1}$  and  $b = -\sum_{i=1}^r f_i u_{i,2}$ . Then, we have  $x = ap = \sum_{i=1}^r f_i u_{i,1} p = bq = -\sum_{i=1}^r f_i u_{i,2} q$ , which proves the reverse inclusion and the result.  $\square$

We obtain Algorithm 1 displayed at the end of the paper.

Let us illustrate our algorithm for computing generators of the intersection of two finitely generated evaluation ideals.

**Example 3.10.** Let  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1(t^2 + 1)e$  and  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1(te + t^2e\partial)$ . To compute a finite set of generators of  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ , we first define

$$R = \begin{pmatrix} (t^2 + 1)e \\ te + t^2e\partial \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t \end{pmatrix}}_{R_0} e + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}}_{R_1} e\partial,$$

and then we can consider the following matrix

$$C = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 \\ \vdots & \vdots \\ R_0^{(3)} & R_1^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ t & t^2 \\ 2t & 0 \\ 1 & 2t \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{8 \times 2}.$$

Using, e.g., the OREMODULES package ([4]), we can compute a full row rank matrix  $D$  satisfying  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$ . We get

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & t & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so that  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.U)$ , where

$$U = D \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2 \partial \\ I_2 \partial^2 \\ I_2 \partial^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2 + t \partial - 2 & 0 \\ \partial & 2t \partial - 4 \\ t \partial^2 - \partial & 0 \\ \partial^2 & 2t \partial^2 - 2 \partial \\ \partial^3 & 0 \\ 0 & \partial^3 \end{pmatrix}.$$

Using Theorem 3.7, we have  $p = 1$ ,  $q = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)) = 2$ , and thus,  $r = 8 - 2 = 6$ . Partitioning  $U = (u_1 \ u_2)$ , where  $u_1$  (resp.,  $u_2$ ) is the first (resp., second) column of  $u$ , we finally have

$$u_1 (t^2 + 1) e = u_2 (t e + t^2 e \partial) = (0 \ 2t e \ 0 \ 2e \ 0 \ 0)^T,$$

so that  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathbb{I}_1 t e + \mathbb{I}_1 e = \mathbb{I}_1 e$  because  $e \partial t e = e (t \partial + 1) e = e$ .

Finally, the above computations show that the syzygy module  $\text{Syz}(\mathcal{K}) = \{(\alpha \ \beta) \in \mathbb{I}_1^{1 \times 2} \mid \alpha (t^2 + 1) e + \beta (t e + t^2 e \partial) = 0\}$  of the ideal  $\mathcal{K} = \mathbb{I}_1 (t^2 + 1) e + \mathbb{I}_1 (t e + t^2 e \partial)$  is generated by the rows of  $U$ .

In Example 3.10, we have considered two principal ideals. First note that the algorithm applies similarly for ideals which are not principal. Moreover, in Proposition 4.7, we shall constructively prove that any finitely generated ideal of  $\langle e \rangle$  is principal.

#### 4 STRUCTURE OF FINITELY GENERATED EVALUATION IDEALS AS SEMISIMPLE MODULES

In this section, we study the left ideal structure of finitely generated evaluation ideals. Using the involution  $\theta$  of  $\mathbb{I}_1$  given in Section 2.1, which satisfies  $\theta(\langle e \rangle) \subseteq \langle e \rangle$ , we can similarly handle finitely generated right evaluation ideals of  $\mathbb{I}_1$ . In [1], these ideals are proved to be finitely generated *semisimple* left  $\mathbb{I}_1$ -modules (see the definition below). More precisely, they are finitely generated  $\mathbb{k}[t]$ -modules. Below, we show how to constructively prove these results. In particular, we explain how to effectively compute a finite set of generators of these ideals as  $\mathbb{k}[t]$ -modules. In the next section, this last result will be used to algorithmically characterize the intersection of two finitely generated ideals in the case when at least one is in  $\langle e \rangle$ .

Using the fact that  $\mathbb{k}[t]$  is a subring of  $\mathbb{I}_1$ , a left ideal  $\mathcal{I}$  of  $\mathbb{I}_1$  inherits a  $\mathbb{k}[t]$ -module structure. Hence, the generators of an evaluation ideal  $\mathcal{I}$  of  $\mathbb{I}_1$  as a  $\mathbb{k}[t]$ -module also generate  $\mathcal{I}$  as a  $\mathbb{I}_1$ -module.

*Definition 4.1* ([12], Ch. 4, p. 154). Let  $\mathcal{M}$  be a left module over a ring  $\mathcal{R}$ .

- $\mathcal{M}$  is said to be *simple* if it is non-zero and has no non-zero proper left  $\mathcal{R}$ -submodules.
- $\mathcal{M}$  is said to be *semisimple* if it is a direct sum of simple left  $\mathcal{R}$ -modules.

We give examples that will play important roles in what follows.

*Example 4.2.* In [1], it is shown that  $\mathbb{k}[t]$  is a simple left  $\mathbb{I}_1$ -module. It is finitely presented as left  $\mathbb{I}_1$ -module because (2) and  $e^2 = e$  yield

$$\mathbb{I}_1 / (\mathbb{I}_1 \partial) = \mathbb{I}_1 / (\mathbb{I}_1 (1 - e)) \cong \mathbb{I}_1 e = \mathbb{k}[t] e \cong \mathbb{k}[t].$$

As a consequence,  $\mathbb{k}[t]^n$  is a finitely generated semisimple left  $\mathbb{I}_1$ -module for all  $n \in \mathbb{N}$ .

Before stating the main result of this section, we need to introduce another concept.

*Definition 4.3.* An element  $a$  of  $\langle e \rangle$  is called a *simple evaluation* if it is of the form  $a = e q(\partial)$ , where  $q \in \mathbb{k}[\partial]$ , i.e.,  $a \in e \mathbb{k}[\partial]$ .

Using [5, Lemma 2.4], if  $P \in \mathbb{I}_1$  and  $a = \sum_{k=0}^r d_k e \partial^k \in \langle e \rangle$ , where  $d_k \in \mathbb{k}[t]$  for  $k = 0, \dots, r$ , then we have

$$P a = \sum_{k=0}^r P(d_k) e \partial^k, \quad (5)$$

where  $P(d_k)$  is an element of  $\mathbb{k}[t]$  obtained by applying the operator  $P \in \mathbb{I}_1$  to the polynomial  $d_k$ .

If  $a = e q(\partial)$  is a simple evaluation, then, using (5), for any  $b \in \mathbb{I}_1$ , we have  $b a = b(1) e q(\partial) = b(1) a \in \mathbb{k}[t] e q(\partial)$ , which shows that  $\mathbb{I}_1 a = \mathbb{k}[t] a$ . For instance, we have  $\mathbb{I}_1 e = \mathbb{k}[t] e$ . More generally, we have  $b t^k a = b t^k e q(\partial) = b(t^k) e q(\partial) = b(t^k) a$  for  $n \in \mathbb{N}$ .

The main result of this section is Theorem 4.5, stated below, which shows that, as a  $\mathbb{k}[t]$ -module, every finitely generated evaluation ideal of  $\mathbb{I}_1$  can be generated by simple evaluations.

Let us consider an evaluation ideal  $\mathcal{I} \subseteq \langle e \rangle$  finitely generated by evaluation operators  $a_1, \dots, a_q$ . We can then form the column vector  $A = (a_1 \ \dots \ a_q)^T$  of  $\langle e \rangle^{q \times 1}$  and write its normal form  $A = \sum_{k=0}^n A_k(t) e \partial^k$ , where  $A_k \in \mathbb{k}[t]^{q \times 1}$  for  $k = 0, \dots, n$ . Using the notations of Theorems 3.2 and 3.7, let  $m = \max_{k \in \llbracket 0, r \rrbracket} \deg(A_k)$ ,

$$C = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_n \\ \vdots & & \vdots \\ A_0^{(m+1)} & \dots & A_n^{(m+1)} \end{pmatrix}, \quad J_{m+1} = \begin{pmatrix} I_q \\ I_q \partial \\ \vdots \\ I_q \partial^{m+1} \end{pmatrix},$$

$D \in \mathbb{k}[t]^{r \times q(m+2)}$  be a full row rank matrix generating  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C)$ , i.e., satisfying  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D) \cong \mathbb{k}[t]^r$  (see Remark 3.1). If we note  $D = (D_0 \ \dots \ D_{m+1})$ , where  $D_i \in \mathbb{k}[t]^{r \times q}$  for  $i = 0, \dots, m+1$ , and  $B = D J_{m+1} = D_0 + D_1 \partial + \dots + D_{m+1} \partial^{m+1}$ , then we have  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.A) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.B)$ .

Notice that, by definition of  $m$ , we have  $C = (C'^T \ 0^T)^T$ , where

$$C' = \begin{pmatrix} A_0 & \dots & A_n \\ \vdots & & \vdots \\ A_0^{(m)} & \dots & A_n^{(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times (n+1)}, \quad (6)$$

so that we can choose  $D$  with a block-partition  $D = \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ ,

where  $D' \in \mathbb{k}[t]^{(r-q) \times q(m+1)}$  is a full row rank matrix satisfying  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C') = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D')$ . As a consequence, the matrix  $B = D J_{m+1}$  can be written as  $B = (B'^T \ \partial^{m+1} I_q)^T$ , where

$$B' = \sum_{i=0}^m D'_i \partial^i \in \mathbb{I}_1^{(r-q) \times q}, \quad (7)$$

and  $D' = (D'_0 \ \dots \ D'_m)$ , where  $D'_i \in \mathbb{k}[t]^{(r-q) \times q}$  for  $i = 0, \dots, m$ .

By the proof of Theorem 3.7,  $D$  has a right inverse  $X \in \mathbb{k}[t]^{q(m+2) \times r}$ , i.e.,  $DX = I_r$ . Using the above structure of  $D$ , we then get

$$\begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r-q} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

which yields  $D'X_{11} = I_{r-q}$ , i.e.,  $D'$  has a right inverse.

We first have the following lemma.

**LEMMA 4.4.** *With the above notations, if  $\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.B)$  is the left  $\mathbb{I}_1$ -module finitely presented by the matrix  $B$  and  $\pi$  is the canonical projection onto  $\mathcal{M}$ , then the following map*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{I} = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.A) = \sum_{k=0}^q \mathbb{I}_1 a_k, \\ \pi(\lambda) &\longmapsto \lambda A, \quad \forall \lambda \in \mathbb{I}_1^{1 \times q}, \end{aligned} \quad (8)$$

is well-defined and is an isomorphism of left  $\mathbb{I}_1$ -modules, i.e.,  $\mathcal{M} \cong \mathcal{I}$ .

**PROOF.** Let us check that  $\psi$  is an isomorphism whose inverse is

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \lambda A &\longmapsto \pi(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{I}_1^{1 \times q}. \end{aligned}$$

Let us first show that the two maps  $\psi$  and  $\varphi$  are well-defined. First, if  $\pi(\lambda) = \pi(\mu)$ , where  $\lambda, \mu \in \mathbb{I}_1^{1 \times q}$ , then we have  $\pi(\lambda - \mu) = 0$  which implies  $\lambda - \mu = \nu B$  for some  $\nu \in \mathbb{I}_1^{1 \times r}$ . Thus,  $\lambda A - \mu A = \nu B A = 0$  so that  $\lambda A = \mu A$ . Regarding  $\varphi$ , if  $x \in \mathcal{I}$  and  $x = \lambda A = \mu A$  for  $\lambda, \mu \in \mathbb{I}_1^{1 \times q}$ , then  $(\lambda - \mu)A = 0$ , so that  $\lambda - \mu \in \ker_{\mathbb{I}_1}(.A) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.B)$ . Thus, there exists  $\nu \in \mathbb{I}_1^{1 \times r}$  such that  $\lambda - \mu = \nu B$ . Then, we have  $\pi(\lambda - \mu) = \pi(\nu B) = 0$ , so that  $\pi(\lambda) = \pi(\mu)$ . Finally, we have  $(\varphi \circ \psi)(\pi(\lambda)) = \pi(\lambda)$  and  $(\psi \circ \varphi)(\lambda A) = \lambda A$  for all  $\lambda \in \mathbb{I}_1^{1 \times q}$ , which proves that  $\psi$  and  $\varphi$  are isomorphisms,  $\mathcal{M} \cong \mathcal{I}$ , and  $\varphi = \psi^{-1}$ .  $\square$

**THEOREM 4.5.** *Let  $\mathcal{I} \subseteq \langle e \rangle$  be an evaluation ideal finitely generated by elements  $a_1, \dots, a_q$  and let  $A = (a_1 \ \dots \ a_q)^T$ . Then,  $\mathcal{I}$  is a semisimple  $\mathbb{k}[t]$ -module that can be generated by a finite set of simple evaluations.*

More precisely, if we consider

- $C'$  the matrix defined by (6),
- $s = \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0))$ ,  $r = q(m+2) - s$ ,
- $U$  the unimodular matrix defined in Lemma 3.3,
- $\{e_k\}_{k=1, \dots, q}$  the standard basis of  $\mathbb{I}_1^{1 \times q}$ ,
- $y = (\pi(e_1) \ \dots \ \pi(e_q))^T$ , where  $\pi : \mathbb{I}_1^{1 \times q} \longrightarrow \mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.B)$  is the canonical projection onto  $\mathcal{M}$  and the matrix  $B \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  satisfies  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.A) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.B)$  as explained in Theorem 3.7,
- $z = (e y^T \ e \partial y^T \ \dots \ e \partial^m y^T)^T$ ,
- $Q' \in \mathbb{k}^{q(m+1) \times s}$  a full column rank matrix whose columns define a basis of  $\text{im}_{\mathbb{k}}(C'(0))$ ,
- $T \in \mathbb{k}^{s \times q(m+1)}$  a left inverse of  $Q'$ ,
- $w = T z \in \mathcal{M}^s$ ,

then the entries  $w_i$  of the vector  $w$  are simple evaluations and the finite family  $\{g_i = \psi(w_i) = \pi^{-1}(w_i) A\}_{i=1, \dots, s}$  generates the left ideal  $\mathcal{I}$  as a  $\mathbb{k}[t]$ -module, i.e.,  $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^s \mathbb{k}[t] g_i$ .

**PROOF.** Let us consider the following exact sequence

$$\mathbb{I}_1^{1 \times r} \xrightarrow{\cdot B} \mathbb{I}_1^{1 \times q} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.B) \longrightarrow 0,$$

where  $\pi$  is the canonical projection onto  $\mathcal{M}$ . If  $e_1, \dots, e_q$  denotes the canonical basis of  $\mathbb{I}_1^{1 \times q}$ , then  $\{y_i = \pi(e_i)\}_{i=1, \dots, q}$  is a set of generators of  $\mathcal{M}$  and these generators of  $\mathcal{M}$  satisfy the left  $\mathbb{I}_1$ -linear relations  $B y = 0$ , where  $y = (y_1 \ \dots \ y_q)^T$ . For more details, see, e.g., [3, 9].

Now, using  $B = (B'^T \ \partial^{m+1} I_q)^T$ , where  $B' \in \mathbb{I}_1^{(r-q) \times q}$ , in the left  $\mathbb{I}_1$ -relation  $B y = 0$ , we then have  $\partial^{m+1} y = 0$ .

Let  $T_m = \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} e \partial^k$  be the  $m^{\text{th}}$  Taylor operator. Using (2),  $\partial^{m+1} y = 0$  yields  $I^{m+1} \partial^{m+1} y = 0$ , and thus,  $(1 - T_m) y = 0$ , i.e.,  $y = T_m y$ . Conversely, using (5),  $y = T_m y$  yields

$$\partial^{m+1} y = \partial^{m+1} T_m y = \sum_{k=0}^m \partial^{m+1} \frac{t^k}{k!} e \partial^k = \sum_{k=0}^m \partial^{m+1} \left( \frac{t^k}{k!} \right) e \partial^k = 0.$$

Therefore,  $\partial^{m+1} y = 0$  is equivalent to  $y = T_m y$ . Hence, if we set  $z_k = e \partial^k y \in \mathcal{M}^q$  for  $k = 0, \dots, m$  and denote by  $z_{k,j}$  the  $j^{\text{th}}$  entry of  $z_k$  for  $j = 1, \dots, q$ , we then obtain

$$y = T_m y = \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} e \partial^k y = \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} z_k, \quad (9)$$

which shows that  $\{z_{k,j}\}_{k=0, \dots, m, j=1, \dots, q}$  is another set of generators of  $\mathcal{M}$  defined by means of simple evaluations, which yields

$$\mathcal{M} = \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^q \mathbb{I}_1 z_{k,j} = \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^q \mathbb{k}[t] z_{k,j}.$$

Thus,  $\{z_{k,j}\}_{k=0, \dots, m, j=1, \dots, q}$  also generates  $\mathcal{M}$  as a  $\mathbb{k}[t]$ -module.

Using (5), for any  $P \in \mathbb{I}_1$ , we have  $P y = \sum_{k=0}^m P \left( \frac{t^k}{k!} \right) z_k$ , where  $P \left( \frac{t^k}{k!} \right) \in \mathbb{k}[t]$  for  $k = 0, \dots, m$ . If  $P \in \mathbb{k}[t]$ , then we state again that  $P$  acts in  $\mathbb{I}_1$  as the multiplication by  $P$ , and thus,  $P y = P \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} z_k$ .

Let us now find the relations satisfied by the generators  $z_{k,j}$ 's. We first have that  $e z_k = z_k$  for all  $k = 0 \dots m$ . Using (9), we obtain:

$$0 = B' y = B' \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} z_k = \sum_{k=0}^m B' \left( \frac{t^k}{k!} \right) z_k.$$

If we note  $z = (z_0^T \ \dots \ z_m^T)^T$  and

$$P = \begin{pmatrix} B'(1) & B'(t) & \dots & B' \left( \frac{t^m}{m!} \right) \end{pmatrix} \in \mathbb{k}[t]^{(r-q) \times q(m+1)},$$

then the relations satisfied by the generators  $z_{k,j}$ 's are  $e z = z$  and  $P z = 0$ , so that we have

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{M}' = \text{coker}_{\mathbb{I}_1} \left( \begin{pmatrix} P \\ (1-e) I_{q(m+1)} \end{pmatrix} \right).$$

Let us now compute  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P.) = \{\eta \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times 1} \mid P \eta = 0\}$ . Using (7), we first have

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} D'_0 & t D'_0 + D'_1 & \dots & \frac{t^m}{m!} D'_0 + \dots + D'_m \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} D'_0 & D'_1 & \dots & D'_m \end{pmatrix} U = D' U, \end{aligned}$$

where  $U$  is the unimodular matrix introduced in Lemma 3.3. Now, if  $\eta \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(P.)$ , then we have  $D' U \eta = 0$  which is equivalent to  $D' \zeta = 0$  and  $\zeta = U \eta$ . Now,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(D'.) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(C'.)$  implies  $\zeta = D' \xi$  for a certain  $\xi \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times 1}$ , and thus,  $\eta = U^{-1} C' \xi$ . This shows  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P.) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}((U^{-1} C'.))$ . If we note  $Q = U^{-1} C'$ ,

then Lemma 3.3 shows that  $Q = C'(0) \in \mathbb{k}^{(n+1) \times q(m+1)}$ , and thus,  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(C'(0))$ . Let us consider a basis of the finite-dimensional  $\mathbb{k}$ -vector space  $\text{im}_{\mathbb{k}}(C'(0))$  and stack the corresponding column vectors into a matrix  $Q' \in \mathbb{k}^{q(m+1) \times s}$ , where  $s = \text{rank}_{\mathbb{k}}(C'(0))$ . Then, we have  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(Q')$ .

We state again that  $D'$  has a right inverse  $X_{11} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times (r-q)}$ , i.e.,  $D' X_{11} = I_{r-q}$ , which shows that  $S = U^{-1} X_{11} \in \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times (r-q)}$  is a right inverse of  $P = D' U$  because  $U$  is unimodular. Therefore, we have the following split exact sequence of  $\mathbb{k}[t]$ -modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{s \times 1} \xrightarrow{Q'} \mathbb{k}[t]^{q(m+1) \times 1} \xrightarrow{P} \mathbb{k}[t]^{(r-q) \times 1} \longrightarrow 0,$$

which implies  $s = q(m+1) - (r-q) = q(m+2) - r$  (see [12, Exercise 3.16(i), p. 129]). From Theorem 3.7, we then have  $r = q(m+2) - \text{rank}_{\mathbb{k}}(C'(0))$ , which shows again that  $s = \text{rank}_{\mathbb{k}}(C'(0))$ .

Using  $PS = I_{r-q}$ , we have  $P(I_{q(m+1)} - SP) = 0$ , which shows that  $\text{im}_{\mathbb{k}[t]}((I_{q(m+1)} - SP)) \subseteq \ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(Q')$  and proves the existence of a matrix  $T \in \mathbb{k}[t]^{s \times q(m+1)}$  satisfying the identity  $I_{q(m+1)} - SP = Q' T$ , i.e.,  $SP + Q' T = I_{q(m+1)}$ . Hence, using  $PQ' = 0$ , we have  $SPQ' + Q' TQ' = Q'$ , i.e.,  $Q' TQ' = Q'$  or, equivalently,  $Q'(TQ' - I_s) = 0$ , and thus,  $TQ' = I_s$  because  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(Q') = 0$ .

Now, we have  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = 0$  because  $\mu P = 0$  and  $PS = I_{r-q}$  yield  $\mu = \mu PS = 0$ . Therefore, we have the following split exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times (r-q)} \xrightleftharpoons[S]{P} \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+1)} \xrightarrow{Y} \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(P) \longrightarrow 0,$$

which shows that  $\text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(P)$  is a *stably free*  $\mathbb{k}[t]$ -module [12, Ch. 4, p. 204], and thus, a free  $\mathbb{k}[t]$ -module of rank  $q(m+2) - r = \text{rank}_{\mathbb{k}}(C'(0))$  because  $\mathbb{k}[t]$  is a principal ideal domain (see, e.g., [9]).

Using  $PQ' = 0$ , i.e.,  $\text{im}_{\mathbb{k}[t]}(P) \subseteq \ker_{\mathbb{k}[t]}(Q')$ , we can consider the following complex

$$0 \longrightarrow \mathbb{k}[t]^{1 \times (r-q)} \xrightarrow{P} \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+1)} \xrightarrow{Q'} \mathbb{k}[t]^{s \times 1} \longrightarrow 0.$$

The identity  $PS = I_{r-q}$  (resp.,  $TQ' = I_s$ ) shows that  $P$  is injective (resp.,  $Q'$  is surjective). Now, let  $\lambda \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(Q')$ . Using the identities  $SP + Q' T = I_{q(m+1)}$ , we then have  $\lambda = (\lambda S) P \in \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(P)$ , which shows that  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(Q') = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(P)$  and proves that the above complex is a split short exact sequence (see [12, Ch. 2, p. 52]).

We have the following commutative exact diagram of  $\mathbb{k}[t]$ -modules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{k}[t]^{1 \times (r-q)} & \xrightleftharpoons[S]{P} & \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+1)} & \xleftarrow{T} & \mathbb{k}[t]^{s \times 1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \uparrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{k}[t]^{1 \times (r-q)} & \xrightleftharpoons[S]{P} & \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+1)} & \xrightarrow{Y} & \text{coker}_{\mathbb{k}[t]}(P) \longrightarrow 0, \\ & & & & & & \downarrow \phi^{-1} \end{array}$$

where  $\gamma$  is the canonical projection and  $\phi$  the isomorphism of  $\mathbb{k}[t]$ -modules defined by: for  $\lambda \in \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+1)}$ ,  $\phi(\gamma(\lambda)) = \lambda Q'$ . This application is well-defined: if  $\gamma(\lambda) = \gamma(\mu)$ , where  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+1)}$ , then there is  $v \in \mathbb{k}[t]^{1 \times (r-q)}$  such that  $\lambda - \mu = vP$ . Then, we have  $\lambda Q' - \mu Q' = vPQ' = 0$ , which yields  $\lambda Q' = \mu Q'$ , i.e.,  $\phi(\gamma(\lambda)) = \phi(\gamma(\mu))$ . Clearly,  $\phi$  is injective and surjective. Finally,  $\phi^{-1}$  is defined by  $\phi^{-1}(\mu Q') = \gamma(\mu)$  for all  $\mu \in \mathbb{k}[t]^{1 \times q(m+1)}$ .

Let us set  $w = Tz \in \mathcal{M}^{s \times 1}$ . Since the  $z_k = e \partial^k y$ 's are formed by simple evaluations and the entries of  $T$  belong to  $\mathbb{k}$ , the  $w_k$ 's are

formed by simple evaluations. Now,  $SP + Q' T = I_{q(m+1)}$  yields  $z = Q' w$  because  $Pz = 0$ . The entries  $w_i$  of  $w$  are then generators of  $\mathcal{M}$  as a  $\mathbb{I}_1$ -module, and thus, as a  $\mathbb{k}[t]$ -module. Finally, if  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}$  is the isomorphism of Lemma 4.4,  $\mathcal{I}$  is then finitely generated by  $\{g_i\}_{i=1, \dots, s}$ , where  $g_i = \psi(w_i) = \pi^{-1}(w_i)A$  for  $i = 1, \dots, s$ .  $\square$

We obtain Algorithm 2 displayed at the end of the paper.

Let  $\Gamma \in \mathbb{k}[t]^{q \times q(m+1)}$  be the matrix satisfying  $y = \Gamma z$  (see (9)). Using  $z = Q' w$ , we have  $y = (\Gamma Q') w$ , which yields  $A = \Gamma Q' G$ , where  $A$  and  $G$  are defined in Algorithm 2, and expresses the original generators  $a_i$ 's of  $\mathcal{I}$  in terms of the second set of generators  $g_j$ 's.

*Example 4.6.* Let  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1(t^2 + 1)e$  and  $\mathcal{J} = \mathbb{I}_1(te + t^2 e \partial)$ . Let us explicitly show that  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$  are two semisimple  $\mathbb{k}[t]$ -modules, that they can be generated by simple evaluations, and finally find again the result of Example 3.10.

For  $\mathcal{I}$ , we have  $A = ((t^2 + 1)e)$ ,  $q = 1$ ,  $n = 0$ ,  $m = 2$ ,  $r = 3$ , and

$$C'_I = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix}, U_I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_I = U_I^{-1} C'_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Then, we have  $s = \text{rank}_{\mathbb{k}}(C(0)) = 1$  and  $T_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  is a left inverse of  $Q_I$ , and thus,

$$w_I = T_I z = T_I \begin{pmatrix} e \\ e \partial \\ e \partial^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e \partial^2 \Rightarrow w_I A = \frac{1}{2} e \partial^2 (t^2 + 1) e = \frac{1}{2} e,$$

which yields  $\mathcal{I} = \mathbb{k}[t]e$ . Note that if we consider, e.g., the left inverses  $T'_I = (1 \ 0 \ 0)$  or  $T''_I = (3 \ 0 \ -1)$  of  $Q_I$ , we obtain

$$\begin{aligned} w'_I &= T'_I z = e \Rightarrow w'_I A = e(t^2 + 1)e = e, \\ w''_I &= T''_I z = 3e - 2e \partial^2 \Rightarrow w''_I A = (3e - 2e \partial^2)(t^2 + 1)e = e, \end{aligned}$$

which also yields  $\mathcal{I} = \mathbb{k}[t]e$ .

For  $\mathcal{J}$ , we have  $A = (te + t^2 e \partial)$ ,  $q = 1$ ,  $n = 1$ ,  $m = 2$ ,  $r = 2$ , and

$$C'_J = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, U_J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_J = U_J^{-1} C'_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Then, we have  $s = 2$ ,

$$\begin{aligned} T_J &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, w_J = T_J z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ e \partial \\ e \partial^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \partial \\ \frac{1}{2} e \partial^2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow w_J A &= \begin{pmatrix} e \partial \\ \frac{1}{2} e \partial^2 \end{pmatrix} (te + t^2 e \partial) = \begin{pmatrix} e \partial (te + t^2 e \partial) \\ \frac{1}{2} e \partial^2 (te + t^2 e \partial) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e \partial \end{pmatrix} \end{aligned}$$

and thus, we have  $\mathcal{J} = \mathbb{k}[t]e + \mathbb{k}[t]e \partial$ . Finally, we can then check that  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathbb{k}[t]e = \mathbb{I}_1 e$  (see Example 3.10).

The next proposition shows that every finitely generated evaluation ideal is *principal*, i.e., can be generated by a single element. This result first appears in [1, Theorem 4.5]. We give here an explicit proof.

**PROPOSITION 4.7.** *Let  $\mathcal{I} \subseteq \langle e \rangle$  be a finitely generated evaluation ideal. Then,  $\mathcal{I}$  is principal, i.e., can be generated by a single element.*

PROOF. Let  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{I}_1$  be a finitely generated evaluation ideal. From Theorem 4.5, there is a finite number of simple evaluation  $\{h_i\}_{i=1,\dots,n}$  that generate  $\mathcal{I}$  as a  $\mathbb{k}[t]$ -module, i.e.,  $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^n \mathbb{k}[t] h_i$ . Now, set  $h = \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} h_k \in \mathcal{I}$ . Then, using the results in the paragraph after (5), we have  $e \partial^l h = \sum_{k=1}^n e \partial^l \left( \frac{t^k}{k!} \right) h_k = h_l$  for all  $l = 1, \dots, n$ . Thus,  $h_l$  belongs to the ideal generated by  $h$  for all  $l = 1, \dots, n$ , so that  $\mathcal{I} = \mathbb{I}_1 h$ , which ends the proof.  $\square$

## 5 PERSPECTIVES

In this paper, we have first generalized a result obtained in [5] – on the explicit characterization of the annihilator of an *evaluation operator* – to the matrix case. Using this result, we have shown how to compute a finite set of generators for the intersection of two finitely generated ideals included in  $\langle e \rangle$ . Finally, we have effectively characterized the fact that a finitely generated ideal in  $\langle e \rangle$  is semisimple. More precisely, we have explained how a finite set of generators, defined by simple evaluations, can be obtained for such an ideal. It gives an explicit description of this ideal as a finitely generated  $\mathbb{k}[t]$ -module.

This characterization of finitely generated ideals in  $\langle e \rangle$  as semisimple modules can be used to compute a finite set of generators of the intersection of two finitely generated ideals in the case where one is in  $\langle e \rangle$ . The main idea is to transform this problem into a simple  $\mathbb{k}[t]$  problem. For lack of space, this result will be explained elsewhere.

Finally, the last case to be considered for an effective proof of the coherence of  $\mathbb{I}_1$  is the case where both finitely generated ideals  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$  are not in  $\langle e \rangle$ . The main idea of the proof given in [1] is first to determine an element  $0 \neq a \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  which is not in  $\langle e \rangle$  and then use the fact that the *length* of the left  $\mathbb{I}_1$ -module  $\mathbb{I}_1/(\mathbb{I}_1 a)$  is finite. Such an element  $a$  can be obtained as follows. We can consider  $h \in \mathcal{I}$  and  $g \in \mathcal{J}$  such that neither  $h$  nor  $g$  belongs to  $\langle e \rangle$ . Using [5], there are  $N, M \in \mathbb{N}$  such that  $\partial^N h, \partial^M g \in \mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$ . Finally, using the *left Ore property* of  $\mathbb{A}_1$ , there are  $u, v \in \mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$  such that  $a = u \partial^N h = v \partial^M g \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J} \setminus \langle e \rangle$ . But the use of the finite length condition of  $\mathbb{I}_1/(\mathbb{I}_1 a)$  still has to be made algorithmic.

---

**Algorithm 1** Compute generators of  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  where  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \langle e \rangle$

---

**Require:**  $p_1, \dots, p_{n_1}$  generators of  $\mathcal{I}$ ,  $q_1, \dots, q_{n_2}$  generators of  $\mathcal{J}$

- Set  $R = (p_1 \dots p_{n_1} \ q_1 \dots q_{n_2})^T$ .
  - Compute the matrix  $C$  corresponding to  $R$ .
  - Compute  $D$  such that  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(.C) = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(.D)$ .
  - Compute  $u = (u_1, \dots, u_r)^T = D J_{m+1}$ , where  $u_i = (u_{i,1} \ u_{i,2})$ .
- return**  $\{u_{1,1} p, \dots, u_{n_1,1} p\}$
- 

## REFERENCES

- [1] V. V. Bavula. *The algebra of integro-differential operators on an affine line and its modules*. Journal of Pure and Applied Algebra, 217 (3), 495–529, 2013.
- [2] A. Borel. *Algebraic D-modules*. Perspectives in Mathematics, vol. 2, Academic Press, 1987.
- [3] F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz. Effective algorithms for parametrizing linear control systems over Ore algebras. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 16 (2005), 319–376.
- [4] F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz. *OreModules: A symbolic package for the study of multidimensional linear systems*. Applications of Time-Delay Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 352, Springer, 233–264 (2007), <https://who.rocq.inria.fr/Alban.Quadrat/OreModules.html>.

---

**Algorithm 2** Compute simple evaluation generators of a finitely generated evaluation ideal  $\mathcal{I}$  as a  $\mathbb{k}[t]$ -module

---

**Require:**  $a_1, \dots, a_q$  generators of  $\mathcal{I}$

- Set  $A = (a_1 \dots a_q)^T$  and compute the matrix  $C'$  defined by (6).
  - Compute a full column rank matrix  $Q'$  whose columns define a basis of  $\text{im}_{\mathbb{k}}(C'(0))$ .
  - Compute a left inverse  $T$  of  $Q'$ .
  - Compute  $G = (g_1 \dots g_s)^T = T (e I_q \ e \partial I_q \ \dots \ e \partial^m I_q)^T A$
- return**  $\{g_1, \dots, g_s\}$ .
- 

- [5] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. *Further results on the computation of the annihilator of integro-differential operator*. ISSAC '23: Proceedings of the 2023 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, July 2023, Pages 182–190.
- [6] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer, 1995.
- [7] A. Fabiańska, A. Quadrat, A. Applications of the Quillen-Suslin theorem to multidimensional systems theory. In *Gröbner Bases in Control Theory and Signal Processing*, Radon Series on Computation and Applied Mathematics 3, de Gruyter publisher, 23–106, 2007.
- [8] M. Kashiwara, T. Kawai, T. Kimura. *Foundations of Algebraic Analysis*. Princeton University Press, 1986.
- [9] A. Quadrat. *An introduction to constructive algebraic analysis and its applications*. Les cours du CIRM, Journées Nationales de Calcul Formel (2010), 281–471, 2010.
- [10] A. Quadrat, G. Regensburger. *Computing polynomial solutions and annihilators of integro-differential operators with polynomial coefficients*. Algebraic Methods and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems, Advances in Delays and Dynamics, 9, 87–114, 2020.
- [11] G. Regensburger, M. Rosenkranz, J. Middeke. A skew polynomial approach to integro-differential operators. *Proceedings of ISSAC'09*, 2009, pp. 287–294.
- [12] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, 2<sup>nd</sup> edition, 2009.
- [13] B. Stenström. *Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory*. Springer, 1975.

# Polynomial solutions for general linear polynomial ordinary integro-differential systems

THOMAS CLUZEAU, Univ. Limoges, CNRS, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, France

CAMILLE PINTO, Sorbonne University – Inria Paris, France

ALBAN QUADRAT, Sorbonne University – Inria Paris, France

In this article, we consider the problem of computing polynomial solutions of general linear systems of ordinary integro-differential equations with polynomial coefficients. This algorithmic problem is a key step for many computations with matrices having linear integro-differential operator entries such as the computation of left/right syzygies, left/right inverses, left/right factorizations, and thus, for the development of an effective algebraic analysis approach for linear systems of ordinary integro-differential systems using effective elimination methods and effective homological algebra. The linear systems that appear in the above problems are generally rectangular and inhomogeneous. The contribution of this paper is to provide the first algorithm for computing polynomial solutions of inhomogeneous rectangular systems of linear integro-differential equations with polynomial coefficients. Our algorithm is implemented in the freely available MAPLE package BAVULA.

CCS Concepts: • **Computing methodologies** → **Symbolic and algebraic manipulation**; • **Symbolic and algebraic algorithms** → *Algebraic algorithms*;

Additional Key Words and Phrases: Linear systems of integro-differential equations, Linear systems of differential equations, modules over the Weyl algebra, polynomial solutions

## ACM Reference Format:

Thomas Cluzeau, Camille Pinto, and Alban Quadrat. 2025. Polynomial solutions for general linear polynomial ordinary integro-differential systems. 1, 1 (April 2025), 9 pages.

## 1 INTRODUCTION

Systems of linear ordinary differential equations have been studied extensively by the computer algebra community. Algorithms for computing most closed-form solutions, such as polynomial, rational, or exponential solutions, are now available, and implementations of these algorithms in computer algebra software such as MAPLE are available to the user (see, e.g. [4] and references therein). The study of linear differential systems boils down to considering rectangular matrices with coefficients in the so-called (first) Weyl algebra  $\mathbb{A}_1$  of linear ordinary differential operators with polynomial coefficients. An important property of  $\mathbb{A}_1$  is that it is a noetherian ring [17, 20, 27] which implies that left/right syzygies of a matrix

with coefficients in  $\mathbb{A}_1$  are finitely generated. Based on this property, an *effective algebraic analysis approach* to linear systems of ordinary differential equations has been developed [8, 23]. This approach, based on *algebraic D-modules* [6, 17, 18] and homological algebra [26], uses an effective elimination theory and an effective homological algebra [8, 16]. Again, the corresponding algorithms, based on non-commutative Gröbner or Janet bases computations, are implemented in most computer algebra systems [8, 9].

The linear systems that arise in applications are not always systems of differential equations. Another important class of linear systems that we encounter are *systems of integro-differential equations*. Consider the equation of a simple RLC circuit, or any of Volterra’s linear integral or integro-differential equations [28]. It is only recently that the computer algebra community has begun to take an interest in this class of systems. As far as the computation of closed-form solutions is concerned, the only existing works and implementations deal with the computation of polynomial and rational solutions of scalar equations [2, 3, 24]. Linear systems of integro-differential equations can be studied via matrices with coefficients in the ring  $\mathbb{I}_1$  of ordinary linear integro-differential operators with polynomial coefficients which is studied in [5, 25]. Unlike Weyl’s algebra  $\mathbb{A}_1$ , the ring  $\mathbb{I}_1$  is not noetherian [5, 11], but the fact that Bavula has proved that it is a *coherent ring* [5] opens up the possibility of developing an algebraic analysis approach to linear systems of integro-differential equations. Unfortunately, Bavula’s proof is not constructive and if we want a constructive algebraic analysis approach, we need a constructive proof of the coherence of  $\mathbb{I}_1$  as well as algorithms for computing a finite set of generators of left/right syzygies, left/right inverses, and left/right factorizations of given matrices with entries in  $\mathbb{I}_1$ . This is the goal of the second author’s Ph.D. thesis. A constructive proof of the coherence property, based on an algorithm for computing the syzygies of a matrix with entries in  $\mathbb{I}_1$ , is given in [13] (preliminary results have already been published in [11, 12]), and a proof of the *Cramer property* of  $\mathbb{I}_1$  including algorithms for computing left/right inverses and left/right factorizations, will appear in a future article [15]. The algorithms for computing left/right syzygies, left/right inverses, and left/right factorizations have in common the fact that some of their steps are based on the calculation of polynomial solutions of inhomogeneous rectangular linear systems of integro-differential equations, which is the subject of this article.

The main contribution of this article is to provide the first algorithm, and its implementation in the computer algebra software MAPLE, for computing polynomial solutions of inhomogeneous rectangular systems of integro-differential equations with polynomial coefficients in  $\mathbb{k}[t]$ , where  $\mathbb{k}$  is a computable field of characteristic zero. By sufficiently deriving the integro-differential equations with

Authors’ addresses: Thomas Cluzeau, Univ. Limoges, CNRS, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, France, thomas.cluzeau@unilim.fr; Camille Pinto, Sorbonne University – Inria Paris, Paris, France, camille.pinto@inria.fr; Alban Quadrat, Sorbonne University – Inria Paris, Paris, France, alban.quadrat@inria.fr.

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. Copyrights for components of this work owned by others than the author(s) must be honored. Abstracting with credit is permitted. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee. Request permissions from [permissions@acm.org](mailto:permissions@acm.org).

© 2025 Copyright held by the owner/author(s). Publication rights licensed to ACM.

XXXX-XXXX/2025/4-ART \$15.00

<https://doi.org/>

polynomial coefficients, we obtain a homogeneous rectangular linear system of ordinary differential equations. Existing algorithms for computing polynomial solutions of linear differential systems are mainly limited to holonomic systems [21] or connections [4]. See also [8, 23] for other classes of systems. Using algebraic  $D$ -module theory [6, 17] and homological algebra techniques [26], we provide an explicit parametrization of polynomial solutions of general homogeneous rectangular linear differential systems (see Theorem 3.1). The parametrization is divided into two parts. The first corresponds to the torsion submodule of the left  $\mathbb{A}_1$ -module finitely presented by the differential system matrix, which leads to a finite-dimensional  $\mathbb{k}$ -vector space of polynomial solutions of a holonomic system. The second part corresponds to the torsion-free part of the same module and depends on arbitrary polynomial vectors. From this parametrization, using the Taylor operators of  $\mathbb{I}_1$  (see Definition 2.2), the original problem boils down to computing a finite set of  $\mathbb{k}$ -linear conditions on the parameters of the parametrization, which can be done using basic linear algebra methods. Theorem 4.2 then provides an explicit parametrization of polynomial solutions of general inhomogeneous rectangular linear integro-differential systems.

The paper is organized as follows. Section 2 recalls the necessary definitions and properties of the rings  $\mathbb{A}_1$  and  $\mathbb{I}_1$ . Section 3 presents the first contribution of the paper, i.e. an algorithm providing an explicit parametrization of the polynomial solutions of a homogeneous general rectangular differential system. Next, Section 4 contains the main contribution of the article, i.e. the first algorithm for computing polynomial solutions of inhomogeneous rectangular systems of linear integro-differential equations with polynomial coefficients. Section 5 presents our MAPLE implementation based on other packages and provides some examples from the integral equations literature. Finally, Section 6 concludes and gives some hints on a possible extension of our algorithm to the computation of exponential solutions of general linear systems of integro-differential equations with polynomial coefficients. Throughout the document, for ease of reading, the algorithms are given in boxes and illustrated with simple examples.

## 2 THE RINGS OF DIFFERENTIAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS

Let  $\mathbb{k}$  be a computable field of characteristic zero (e.g.,  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ , the field of rational numbers),  $\mathbb{k}[t]$  the ring of polynomials in the variable  $t$  with coefficients in  $\mathbb{k}$ , and  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  the ring of endomorphisms of  $\mathbb{k}[t]$  as a vector space over  $\mathbb{k}$ , i.e., the ring of all  $\mathbb{k}$ -linear maps from  $\mathbb{k}[t]$  to itself.

*Definition 2.1.* The ring of ordinary differential operators with polynomial coefficients, i.e. the (first) Weyl algebra, denoted by  $\mathbb{A}_1$ , is the  $\mathbb{k}$ -subalgebra of  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  generated by the two  $\mathbb{k}$ -linear operators  $m_t : p \rightarrow m_t(p) := tp$  and  $\partial : p \rightarrow \partial(p) = \dot{p} = dp(t)/dt$ .

The ring of ordinary integro-differential operators with polynomial coefficients, denoted by  $\mathbb{I}_1$ , is the  $\mathbb{k}$ -subalgebra of  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  generated by the  $\mathbb{k}$ -linear operators  $m_t$ ,  $\partial$ , and  $I : p \rightarrow I(p) = \int_0^t p(\tau) d\tau$ .

For more details, see [5, 6, 18]. Note that, by construction, we have  $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{I}_1$ . If  $\mathbb{A}_1$  is a noetherian ring [17, 20],  $\mathbb{I}_1$  is not [5, 11], which leads to some complications when computing in  $\mathbb{I}_1$ .

It is well known [17] that every differential operator  $L \in \mathbb{A}_1$  can be written uniquely as

$$L = \sum_{i=0}^l a_i \partial^i, \quad l \in \mathbb{N}, \quad a_i \in \mathbb{k}[t].$$

For integro-differential operators, finding a *normal form* like the unique writing of  $L$  above is a little more complicated, as the generators of  $\mathbb{I}_1$  satisfy many relations (see [11, 24, 25]). However, if  $1$  denotes the identity of  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  and  $e := 1 - I\partial$  the *evaluation operator at 0* satisfying  $e p = p(0)$  for all  $p \in \mathbb{k}[t]$ , then it has been proved [5, 25] that any integro-differential operator  $P \in \mathbb{I}_1$  can be uniquely written as

$$P = \sum_{i=0}^l a_i \partial^i + \sum_{j=0}^m b_j I t^j + \sum_{k=0}^n c_k e \partial^k,$$

where  $l, m, n \in \mathbb{N}$  and  $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{k}[t]$ .

If  $E = \sum_{k=0}^n c_k e \partial^k$ , then  $E$  is called an *evaluation operator*. In the following, some particular evaluation operators called *Taylor operators* will play an important role.

*Definition 2.2.* The Taylor operators  $T_n$  for  $n \in \mathbb{N}$  are defined by

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} e \partial^k.$$

Taylor's operators satisfy that  $T_n(p)(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} p^{(k)}(0)$ , for all  $p \in \mathbb{k}[t]$  and Taylor's theorem with integral remainder can then be written as follows:

$$1 = T_{n-1} + I^n \partial^n. \quad (1)$$

We recall the following useful property of evaluation operators.

**LEMMA 2.3** ([11]). *If  $E = \sum_{k=0}^n c_k e \partial^k$ , with  $n \in \mathbb{N}$  and  $c_k \in \mathbb{k}[t]$ , is an evaluation operator and  $P \in \mathbb{I}_1$ , then we have*

$$PE = \sum_{k=0}^n P(c_k) e \partial^k,$$

where  $P(c_k)$  denotes the application of the element  $P \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  to  $c_k \in \mathbb{k}[t]$  for all  $k = 0, \dots, n$ .

Let us consider the two-sided ideal of  $\mathbb{I}_1$  generated by the evaluation  $e$ , i.e.,  $\langle e \rangle := \mathbb{I}_1 e \mathbb{I}_1$ . Then, from [11, Proposition 2.3], we have that  $\langle e \rangle = \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial]$  and  $\langle e \rangle$  is the only two-sided ideal of  $\mathbb{I}_1$ .

We finally state the following useful lemma that can be proved by straightforward calculations.

**LEMMA 2.4.** *We have the following:*

- (1) *If  $E = \sum_{k=0}^n c_k(t) e \partial^k \in \langle e \rangle$  and  $M = 1 + \max_{k=0, \dots, n} \deg_t c_k$ , then  $\partial^M E = 0$ .*
- (2) *If  $P = \sum_{i=0}^l a_i(t) \partial^i + \sum_{j=0}^m b_j(t) I t^j + \sum_{k=0}^n c_k(t) e \partial^k \notin \langle e \rangle$  and  $N = 1 + \max\{\max_{k=0, \dots, n} \deg_t c_k, \max_{j=0, \dots, m} \deg_t b_j\}$ , then  $\partial^N P \in \mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$ .*

### 3 POLYNOMIAL SOLUTIONS OF HOMOGENEOUS RECTANGULAR DIFFERENTIAL SYSTEMS

In section 4, we will present the main contribution of this paper, i.e. an algorithm for computing polynomial solutions of inhomogeneous rectangular integro-differential systems. A key step will be the computation of polynomial solutions of homogeneous rectangular differential systems.

The problem of computing polynomial solutions of linear differential systems has been studied by the computer algebra community, but existing works are limited to the case of *holonomic* systems [21] or systems written as a *connection*  $Y'(t) = C(t)Y(t)$ , where  $C(t)$  is a square matrix of rational functions in  $\mathbb{k}(t)$  [1]. In this section, we use algebraic  $D$ -module theory and homological algebra techniques to provide an algorithm for computing polynomial solutions of general linear differential systems.

#### 3.1 Finitely presented left $\mathbb{A}_1$ -modules

Any homogeneous linear system of ordinary differential equations can be written as  $P y = 0$ , where  $y$  is a vector of unknown functions and  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  is a rectangular  $l \times m$  matrix with coefficients in  $\mathbb{A}_1$  which defines the *finitely presented left  $\mathbb{A}_1$ -module* [26]

$$\mathcal{P} = \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.P) = \mathbb{A}_1^{1 \times m} / (\mathbb{A}_1^{1 \times l} P),$$

i.e.,  $\mathcal{P}$  is finitely generated by the residue classes  $\{y_i = \pi(e_i)\}_{i=1, \dots, m}$  of the standard basis  $\{e_i\}_{i=1, \dots, m}$  of  $\mathbb{A}_1^{1 \times m} - e_i$  is defined by 1 at the  $i$ th entry or 0 elsewhere, and  $\pi : \mathbb{A}_1^{1 \times m} \rightarrow \mathcal{P}$  is the canonical left  $\mathbb{A}_1$ -homomorphism sending  $\lambda \in \mathbb{A}_1^{1 \times m}$  to its residual class  $\pi(\lambda)$  in  $\mathcal{P}$  – satisfying the finite generating set of left  $\mathbb{A}_1$ -relations  $P y = 0$ , where  $y = (y_1 \dots y_m)^T \in \mathcal{P}^m$ . Thus, linear differential systems can be studied by considering the *category of finitely presented left modules over  $\mathbb{A}_1$* . This idea is at the core of *algebraic analysis* [6, 18].

To parametrize all the polynomial solutions of  $P y = 0$ , we will need to consider the torsion-submodule of  $\mathcal{P}$ . The domain  $\mathbb{A}_1$  is noetherian [20], and thus, a *left Ore domain* [20]. As a consequence, the set of *torsion elements* of  $\mathcal{P}$

$$t(\mathcal{P}) = \{y \in \mathcal{P} \mid \exists a \in \mathbb{A}_1 : a y = 0\}$$

is a left  $\mathbb{A}_1$ -submodule of  $\mathcal{P}$ . The left  $\mathbb{A}_1$ -module  $\mathcal{P}$  is said to be *torsion* if  $t(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$  and *torsion-free* if  $t(\mathcal{P}) = 0$ .

Let us now characterize explicitly  $t(\mathcal{P})$ . The right  $\mathbb{A}_1$ -module  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P) = \{\eta \in \mathbb{A}_1^{m \times 1} \mid P \eta = 0\}$  being noetherian, there exists a matrix  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$  such that  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q) := Q \mathbb{A}_1^{n \times 1}$ . We then have the following exact sequence of right  $\mathbb{A}_1$ -modules

$$0 \longleftarrow T(\mathcal{P}) \longleftarrow \mathbb{A}_1^{l \times 1} \xleftarrow{.P} \mathbb{A}_1^{m \times 1} \xleftarrow{.Q} \mathbb{A}_1^{n \times 1}, \quad (2)$$

where  $T(\mathcal{P}) = \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(P) = \mathbb{A}_1^{l \times 1} / (P \mathbb{A}_1^{m \times 1})$  is the right  $\mathbb{A}_1$ -module finitely presented by  $P$ , i.e. the so-called *Auslander transpose* of  $\mathcal{P}$ .

The identity  $P Q = 0$  shows that

$$\mathbb{A}_1^{1 \times l} \xrightarrow{.P} \mathbb{A}_1^{1 \times m} \xrightarrow{.Q} \mathbb{A}_1^{1 \times n}$$

is a *complex* of left  $\mathbb{A}_1$ -modules [26] obtained by application of the *contravariant left exact functor*  $\text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\cdot, \mathbb{A}_1)$  to the exact sequence (2). A standard result (see [8, 23] and the references therein)

asserts that the *defect of exactness*  $\text{Ext}_{\mathbb{A}_1}^1(T(\mathcal{P}), \mathbb{A}_1)$  of the above complex at  $\mathbb{A}_1^{1 \times m}$  defines  $t(\mathcal{P})$ , i.e., that we have

$$t(\mathcal{P}) = \text{Ext}_{\mathbb{A}_1}^1(T(\mathcal{P}), \mathbb{A}_1) = \ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) / \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P).$$

Similarly as above,  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q)$  being a noetherian left  $\mathbb{A}_1$ -module, there exists a matrix  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$  such that

$$\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P') = \mathbb{A}_1^{1 \times p} P'.$$

Similarly, there exists a matrix  $M' \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  such that

$$\ker_{\mathbb{A}_1}(.P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.M'). \quad (3)$$

Thus, we have the long exact sequence of left  $\mathbb{A}_1$ -modules

$$\mathbb{A}_1^{1 \times q} \xrightarrow{.M'} \mathbb{A}_1^{1 \times p} \xrightarrow{.P'} \mathbb{A}_1^{1 \times m} \xrightarrow{.Q} \mathbb{A}_1^{1 \times n}. \quad (4)$$

We then have

$$t(\mathcal{P}) = \ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) / \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P') / \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P).$$

Now, using  $\text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P) \subseteq \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P')$ , there exists  $P'' \in \mathbb{A}_1^{l \times p}$  such that

$$P = P'' P'. \quad (5)$$

Let  $H = (M'^T \quad P''^T)^T \in \mathbb{A}_1^{(q+l) \times p}$ . Using [16, Lemma 3.1], we then have

$$t(\mathcal{P}) \cong \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(.H) = \mathbb{A}_1^{1 \times p} / \left( \mathbb{A}_1^{1 \times (q+l)} H \right).$$

The matrices  $Q$ ,  $P'$ ,  $M'$ , and  $P''$  can be computed from  $P$  using Gröbner basis methods [8] and using the OREMODULES package [9]. The algorithm is summarized in Algorithm 1.

---

**Algorithm 1** Torsion decomposition of  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times m} / (\mathbb{A}_1^{1 \times l} P)$ .

---

**Require:**  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$

- 1- Compute  $Q \in \mathbb{A}_1^{m \times n}$  such that  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q)$ .
  - 2- Compute  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$  such that  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.P')$ .
  - 3- Compute  $M' \in \mathbb{A}_1^{q \times p}$  such that  $\ker_{\mathbb{A}_1}(.P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(.M')$ .
  - 4- Compute  $P'' \in \mathbb{A}_1^{l \times p}$  such that  $P = P'' P'$ .
- return**  $Q, P', M',$  and  $P''$
- 

Steps 1, 2, and 3 involve calculating right and left syzygies, while Step 4 is a left factorization.

#### 3.2 Explicit description of the set of polynomial solutions

Let  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$ . Our goal is to compute/parametrize

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \{v \in \mathbb{k}[t]^m \mid P(v) = 0\}.$$

From (5) and (3), we obtain

$$P(v) = 0 \Leftrightarrow (P'' P')(v) = P''(P'(v)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P'(v) = u, \\ P''(u) = 0, \\ M'(u) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Therefore, with the notation of Subsection 3.1, we must first study  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H)$  and then we have to consider the inhomogeneous system of linear differential equations  $P'(v) = u$  to obtain  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P)$ . The following theorem asserts that  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H)$  is always finite-dimensional and provides an explicit parametrization of  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P)$ .

**THEOREM 3.1.** Let  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  and  $Q, P', M',$  and  $P''$  be defined as in Subsection 3.1 (see also Algorithm 1). Then, we have:

- (1) Setting  $H = (M'^T \ P''^T)^T \in \mathbb{A}_1^{(q+1) \times p}$ , the set  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H)$  of all polynomial solutions of the linear ordinary differential system defined by  $H$  is finite-dimensional. Let  $d$  be its dimension and  $\{b_i\}_{i=1, \dots, d}$  a basis of  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H)$ .
- (2) The matrix  $P' \in \mathbb{A}_1^{p \times m}$  admits a generalized inverse, i.e., there exists  $T' \in \mathbb{A}_1^{m \times p}$  satisfying  $P' T' P' = P'$ .
- (3) Let  $u_g = \sum_{i=1}^d c_i b_i$  be the general solution of  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H)$ , where the  $c_i$ 's are arbitrary constants. Then, we have

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid \forall s \in \mathbb{k}[t]^n\}.$$

**PROOF.** The left  $\mathbb{A}_1$ -module  $t(\mathcal{P})$  being torsion, it is a *holonomic* left  $\mathbb{A}_1$ -module ([17, Ch. 10, Corollary 1.2]) and thus the linear ordinary differential system

$$H(u) = 0 \iff \begin{cases} P'(u) = 0, \\ M'(u) = 0, \end{cases}$$

is holonomic. A result of algebraic  $D$ -modules theory asserts that the  $\mathbb{k}$ -vector space of the polynomial solutions of a holonomic left  $\mathbb{A}_1$ -module is finite-dimensional. See, e.g., [6] and [4, 21, 22] for algorithmic proofs and implementations of the computation of bases of the polynomial solutions of holonomic  $\mathbb{A}_1$ -modules. Let  $d := \dim_{\mathbb{k}}(\ker_{\mathbb{k}[t]}(H)) < \infty$  and  $\{b_i\}_{i=1, \dots, d}$  be a basis of polynomial solutions of  $H(u) = 0$ . We now have to solve the inhomogeneous linear ordinary differential system  $P'(v) = u_g$ , where  $u_g = \sum_{i=1}^d c_i b_i$  is the general polynomial solution of  $H(u) = 0$ , i.e.  $c_1, \dots, c_d$  are arbitrary constants. The general solution of  $P'(v) = u_g$  is the sum of a particular solution  $v_p \in \mathbb{k}[t]^m$  of  $P'(v) = u_g$  and the general polynomial solution of the homogeneous linear differential system  $P'(v) = 0$ .

Using the long exact sequence (2), we have  $Q := \text{coker}_{\mathbb{A}_1}(Q) \cong \text{im}_{\mathbb{A}_1}(P)$ , which shows that  $Q$  is torsion-free because we have  $\text{im}_{\mathbb{A}_1}(P) \subseteq \mathbb{A}_1^{l \times 1}$  and  $\mathbb{A}_1^{l \times 1}$  is a torsion-free right  $\mathbb{A}_1$ -module. Using the fact that the *global dimension*  $\text{gld}(\mathbb{A}_1)$  of  $\mathbb{A}_1$  is equal to 1 (see [20, Theorem 7.5.8]),  $Q$  is *projective*, namely, there exist  $r \in \mathbb{N}$  and a finitely generated right  $\mathbb{A}_1$ -module  $\mathcal{R}$  such that  $Q \oplus \mathcal{R} \cong \mathbb{A}_1^{r \times 1}$  [26]. Moreover, any projective  $\mathbb{A}_1$ -module is *stably free* (see [27, Theorem 2.2]), namely, there exist  $r, s \in \mathbb{N}$  such that  $Q \oplus \mathbb{A}_1^{s \times 1} \cong \mathbb{A}_1^{r \times 1}$ .

Let us give a more explicit characterization of the stably freeness property of  $Q$  that will be useful to solve the linear ordinary differential system (6). Set  $Q_1 := Q$  and  $m_0 := m$ . Using Gröbner basis methods [8], we can compute a *finite free resolution* of  $Q$ , i.e., a long exact sequence of right  $\mathbb{A}_1$ -modules of the form

$$0 \longleftarrow Q \longleftarrow \mathbb{A}_1^{m_0 \times 1} \xleftarrow{Q_1} \dots \xleftarrow{Q_r} \mathbb{A}_1^{m_r \times 1} \longleftarrow 0,$$

where  $Q_i \in \mathbb{A}_1^{m_{i-1} \times m_i}$  for  $i = 1, \dots, r$ . The fact that  $Q$  is projective implies that the above finite free resolution *splits* [26]. Note  $Q^* = \text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(Q, \mathbb{A}_1)$ . Applying the contravariant left exact functor  $\text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\cdot, \mathbb{A}_1)$  to the above split exact sequence yields the following split long exact sequence of left  $\mathbb{A}_1$ -modules [26]

$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow \mathbb{A}_1^{1 \times m_0} \xrightarrow{\cdot Q_1} \dots \xrightarrow{\cdot Q_r} \mathbb{A}_1^{1 \times m_r} \longrightarrow 0.$$

The left  $\mathbb{A}_1$ -homomorphism  $\cdot Q_r$  is surjective, which shows that there exists a matrix  $S_r \in \mathbb{A}_1^{m_r \times m_{r-1}}$  satisfying  $S_r Q_r = I_{m_r}$ . A left inverse  $S_r$  of  $Q_r$  can be computed using Gröbner basis methods [8] and the OREMODULES package [9]. We also have

$$\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q_i) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q_{i-1}), \quad i = r, \dots, 2.$$

Setting  $\Pi_r := I_{m_{r-1}} - Q_r S_r \in \mathbb{A}_1^{m_{r-1} \times m_{r-1}}$ , we have  $\Pi_r Q_r = Q_r - Q_r S_r Q_r = 0$ , i.e.,  $\text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot \Pi_r) \subseteq \ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q_r) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q_{r-1})$ , which shows that there exists a matrix  $S_{r-1} \in \mathbb{A}_1^{m_{r-1} \times m_{r-2}}$  satisfying  $\Pi_r = S_{r-1} Q_{r-1}$ , i.e.,  $Q_r S_r + S_{r-1} Q_{r-1} = I_{m_{r-1}}$ . The matrix  $S_{r-1}$  can be computed using the OREMODULES package [9]. Premultiplying this last identity by  $Q_{r-1}$  and using  $Q_{r-1} Q_r = 0$ , we get  $Q_{r-1} S_{r-1} Q_{r-1} = Q_{r-1}$ , which shows that  $S_{r-1}$  is a generalized inverse of  $Q_{r-1}$ . Repeating the same arguments inductively and setting  $S = S_1$  and  $Q = Q_1$ , we finally obtain a generalized inverse  $S \in \mathbb{A}_1^{n \times m}$  of  $Q$ , i.e.,  $Q S Q = Q$ .

Setting  $\Pi := I_m - Q S \in \mathbb{A}_1^{m \times m}$ , we have  $\Pi Q = Q - Q S Q = 0$ , i.e.,  $\text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot \Pi) \subseteq \ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot P')$ , and thus, there is a matrix  $T' \in \mathbb{A}_1^{m \times p}$  such that  $\Pi = T' P'$ , i.e.,  $Q S + T' P' = I_m$ , which yields  $P' T' P' = P'$ . Similarly, there exists  $U' \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$  such that we have  $P' T' + U' M' = I_p$ . The matrices  $T'$  and  $U'$  can also be computed with the OREMODULES package [9]. Therefore, we have the following split long exact sequence of left  $\mathbb{A}_1$ -modules

$$\mathbb{A}_1^{1 \times q} \xrightleftharpoons[U']{\cdot M'} \mathbb{A}_1^{1 \times p} \xrightleftharpoons[T']{\cdot P'} \mathbb{A}_1^{1 \times m} \xrightleftharpoons[S]{\cdot Q} \mathbb{A}_1^{1 \times n}.$$

Now, applying the contravariant left exact functor  $\text{Hom}_{\mathbb{A}_1}(\cdot, \mathbb{k}[t])$  to the above split exact sequence, we obtain the following split exact sequence of  $\mathbb{k}$ -vector spaces

$$\mathbb{k}[t]^{n \times 1} \xrightleftharpoons[S]{\cdot Q} \mathbb{k}[t]^{m \times 1} \xrightleftharpoons[T']{\cdot P'} \mathbb{k}[t]^{p \times 1} \xrightleftharpoons[U']{\cdot M'} \mathbb{k}[t]^{q \times 1},$$

which proves that  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P') = \text{im}_{\mathbb{k}[t]}(Q)$ , i.e., every solution of  $P'(v) = 0$  is of the form  $v = Q(s)$  for a certain  $s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1}$ . The identity  $P' T' + U' M' = I_p$  yields  $u_g = P'(T'(u_g)) + U'(M'(u_g)) = P'(T'(u_g))$ , which shows that  $v_p := T'(u_g)$  is a particular solution of the inhomogeneous linear system  $P'(v) = u_g$ . Thus, we have  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_N) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1}\}$ .  $\square$

### 3.3 Algorithm and example

The different steps of the algorithm for computing a parametrization of  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P)$  for  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  are given in the following algorithm.

---

**Algorithm 2** Polynomial solutions of homogeneous rectangular linear differential systems  $P(v) = 0$  with  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$

---

**Require:**  $P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$

- 1- Apply Algorithm 1 to compute  $Q, P', M',$  and  $P''$
  - 2- Compute the general solution  $u_g = \sum_{i=1}^d c_i b_i$  of  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(H)$ , where  $H = (M'^T \ P''^T)^T \in \mathbb{A}_1^{(q+1) \times p}$
  - 3- Compute a generalized inverse  $T' \in \mathbb{A}_1^{m \times p}$  of  $P'$
- return**  $T', u_g,$  and  $Q$  which are such that

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid \forall s \in \mathbb{k}[t]^n\}.$$


---

Steps 1 and 3 can be performed directly using the OREMODULES package [9]. For Step 2, we need to calculate the general polynomial solution of a holonomic linear differential system. In our implementation, we use the fact that any holonomic linear system of ordinary differential equations can be written as a connection  $Y'(t) = C(t)Y(t)$ , where  $C(t)$  is a square matrix of rational functions in  $\mathbb{k}(t)$  (see [10, Proposition 2.1]) and there is a one-to-one correspondence between the polynomial solutions of the holonomic linear differential system and those of  $Y'(t) = C(t)Y(t)$ . The general polynomial solution of  $Y'(t) = C(t)Y(t)$  can be calculated using the algorithm in [1]. It is implemented in the package INTEGRABLECONNECTIONS [4]. An alternative for Step 2 would be to use the algorithms developed in [21, 22], which do not need to write holonomic linear differential systems as a connection.

*Example 3.2.* Let us describe the different steps of Algorithm 2 applied to the matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial^2 + t\partial^3 & 0 \\ \partial & \partial^3 & \partial + \partial^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_1^{2 \times 3}.$$

Applying Algorithm 1 using OREMODULES [9], we get

$$Q = \begin{pmatrix} -\partial - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \partial + 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M' = 0,$$

and

$$P'' = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial^2 + t\partial^3 \\ \partial & \partial^3 \end{pmatrix}.$$

Then, the next step consists in computing the general polynomial solution  $u_g$  of the homogeneous holonomic linear differential system given by  $P''$ . This holonomic system can be written as a connection

$$Y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C(t)} Y(t),$$

and there is a one-to-one correspondence between the solutions in  $\mathbb{k}[t]^2$  of  $P''(u_g) = 0$  and the first and third components of the solutions of  $Y'(t) = C(t)Y(t)$  in  $\mathbb{k}[t]^4$ . Using the package INTEGRABLECONNECTIONS [4], we can compute the general polynomial solution of  $Y'(t) = C(t)Y(t)$  and we get

$$Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

where  $c_1, c_2, c_3$  are arbitrary constants in  $\mathbb{k}$ . Thus

$$u_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_1 t + c_2 \end{pmatrix}$$

is the general polynomial solution of the homogeneous holonomic linear differential system given by  $P''$ . Finally, we have

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} c_3 - s'(t) - s(t) \\ c_1 t + c_2 \\ s(t) \end{pmatrix} \mid \forall s \in \mathbb{k}[t] \right\}.$$

## 4 POLYNOMIAL SOLUTIONS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEMS

In this section, we characterize the solutions of inhomogeneous linear integro-differential systems  $P(v) = w$ , where  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$  and  $w \in \mathbb{k}[t]^l$  are given, and  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  is the unknown. As is often the case when working in  $\mathbb{I}_1$  (see for example [5, 11, 12]), we need to distinguish between the case  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  and the case  $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$ .

### 4.1 Case $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$

Let us consider  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  and write  $P = \sum_{k=0}^c t^k e P_k(\partial)$ , where  $P_k(\partial) \in \mathbb{k}[\partial]^{l \times m}$  for  $k = 0, \dots, c$ , and  $w(t) = \sum_{l=0}^d t^l w_l$ , with  $w_l \in \mathbb{k}^l$  for  $l = 0, \dots, d$ . Then,  $P(v) = w$  is written as

$$\sum_{k=0}^c t^k (e P_k(\partial))(v) = \sum_{l=0}^d t^l w_l,$$

where  $(e P_k(\partial))(v) \in \mathbb{k}^l$ , and thus, we have

- (1) If  $d > c$ , then the linear system  $P(v) = w$  has no solutions.
- (2) If  $d \leq c$ , then the linear system  $P(v) = w$  is equivalent to

$$\begin{cases} (e P_k(\partial))(v) = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ (e P_k(\partial))(v) = 0, & k = d + 1, \dots, c. \end{cases} \quad (7)$$

We now study the linear system (7). Write  $P_k(\partial) = \sum_{i=0}^{d_k} P_{k,i} \partial^i$ , where  $P_{k,i} \in \mathbb{k}^{l \times m}$  for  $i = 0, \dots, d_k$  and  $k = 0, \dots, c$ , and consider the ansatz  $v(t) = \sum_{j=0}^r t^j v_j$  for  $v$ , where the degree  $r$  and the  $v_j \in \mathbb{k}^m$  for  $j = 0, \dots, r$  are unknown. Then, (7) is equivalent to the following linear system

$$\begin{cases} \left( \sum_{i=0}^{d_k} e P_{k,i} \partial^i \right) \left( \sum_{j=0}^r t^j v_j \right) = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ \left( \sum_{i=0}^{d_k} e P_{k,i} \partial^i \right) \left( \sum_{j=0}^r t^j v_j \right) = 0, & k = d + 1, \dots, c, \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{d_k} \sum_{j=0}^r (e \partial^i)(t^j) P_{k,i} v_j = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ \sum_{i=0}^{d_k} \sum_{j=0}^r (e \partial^i)(t^j) P_{k,i} v_j = 0, & k = d + 1, \dots, c. \end{cases}$$

Using  $(e \partial^i)(t^j) = j! \delta_{i,j}$ , where  $\delta_{i,j} = 1$  if  $i = j$  and  $\delta_{i,j} = 0$  if  $i \neq j$ , the last linear system is equivalent to

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\min\{d_k, r\}} j! P_{k,j} v_j = w_k, & k = 0, \dots, d, \\ \sum_{j=0}^{\min\{d_k, r\}} j! P_{k,j} v_j = 0, & k = d + 1, \dots, c. \end{cases} \quad (8)$$

Let  $s := \max\{d_0, \dots, d_c\}$ . The solutions  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  of  $P(v) = w$  can then be written as

$$v(t) = \sum_{j=0}^s t^j v_j + t^{s+1} \tilde{v}(t),$$

where  $\tilde{v} \in \mathbb{k}[t]^m$  is an arbitrary vector of polynomials and  $v_0, \dots, v_s$  are solutions of the inhomogeneous  $\mathbb{k}$ -linear system (8) defined by  $c + 1$  equations in the  $s + 1$  unknown vectors  $v_j \in \mathbb{k}^m$ ,  $j = 0, \dots, s$ . Taking  $\min\{d_k, r\} = d_k$  for  $k = 0, \dots, c$  (without loss of generality),

the linear system (8) can be solved using standard linear algebra methods.

We summarize the above discussion in the following algorithm which only involves the resolution of a linear system.

---

**Algorithm 3** Polynomial solutions of inhomogeneous linear integro-differential systems  $P(v) = w$  with  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$ ,  $w \in \mathbb{k}[t]^l$

---

**Require:**  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$  and  $w \in \mathbb{k}[t]^l$

1– Write  $P = \sum_{k=0}^c t^k e P_k(\partial)$  and  $w = \sum_{l=0}^d t^l w_l$

2– If  $d > c$ , then **return** [ ]

3– Write  $P_k(\partial) = \sum_{i=0}^{d_k} P_{k,i} \partial^i$  and set  $s := \max\{d_0, \dots, d_c\}$

4– Solve the linear system (8) in the  $s + 1$  unknown vectors  $v_j$

5– Set  $\tilde{v}(t) = \sum_{j=0}^s t^j v_j$ , where the  $v_j$ 's are solutions of Step 4

**return**  $v(t) = \tilde{v}(t) + t^{s+1} \tilde{v}(t)$ , where  $\tilde{v} \in \mathbb{k}[t]^m$  is an arbitrary polynomial vector

---

*Example 4.1.* We consider the following matrix

$$\begin{aligned} P &= e \begin{pmatrix} \partial^2 & \partial \\ \partial & -1 \end{pmatrix} + t e \begin{pmatrix} 1 & \partial \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \langle e \rangle^{2 \times 2} \\ &= e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial^2 + e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial + e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + t e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial + t e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Let us study the linear system  $P(v) = w$ , where  $w = \sum_{l=0}^d t^l w_l$  and  $w_l = (w_{l,1} \ w_{l,2})^T \in \mathbb{k}^2$ , is a fixed vector. If  $d > \deg_t P = 1$ , then  $P(v) = w$  has no solutions. Assume  $d \leq 1$ , i.e.,  $w = w_0 + t w_1$ . Considering  $v(t) = \sum_{k=0}^r t^k v_k$ , where  $v_k = (v_{k,1} \ v_{k,2})^T \in \mathbb{k}^2$ , the  $\mathbb{k}$ -linear system (8) is then defined by

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} \\ \quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ v_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{0,1} \\ w_{0,2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ v_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Solving the above linear system in the  $\deg_{\partial} P + 1 = 3$  unknown vectors  $\{v_0, v_1, v_2\}$ , i.e., in  $3 \times 2 = 6$  unknowns, we finally obtain

$$\begin{aligned} v(t) &= \begin{pmatrix} w_{1,1} - w_{0,1} + 2v_{2,1} \\ w_{1,2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_{0,2} + w_{1,2} \\ w_{0,1} - 2v_{2,1} \end{pmatrix} \\ &\quad + t^2 \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} + t^3 \tilde{v}(t), \end{aligned}$$

where  $v_{2,1}$  and  $v_{2,2}$  are arbitrary constants in  $\mathbb{k}$ , and  $\tilde{v}(t)$  is an arbitrary polynomial vector in  $\mathbb{k}[t]^2$ .

#### 4.2 Case $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$

The goal of this section is to parametrize all the polynomial solutions  $v$  of an inhomogeneous linear integro-differential system  $P(v) = w$ , where  $P \in \mathbb{1}_1^{l \times m}$ ,  $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$ , and  $w \in \mathbb{k}[t]^l$  is fixed. We state the main result.

**THEOREM 4.2.** Let  $P \in \mathbb{1}_1^{l \times m}$ ,  $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$ , and  $w \in \mathbb{k}[t]^l$ . There exists  $N \in \mathbb{N}$  such that  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  and  $\partial^N(w) = 0$ . Let us assume, according to Theorem 3.1, that

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_N) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid \forall s \in \mathbb{k}[t]^n\}.$$

Let  $T_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} e \partial^k$  be the  $(N-1)$ th Taylor operator.

Then the set of all the polynomial solutions  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  of the inhomogeneous linear system  $P(v) = w$  is defined by

$$\begin{aligned} \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid \forall s \in \mathbb{k}[t]^n : \\ (T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Using  $T_{N-1} P Q \in \langle e \rangle^{l \times n}$ , the  $\mathbb{k}$ -linear conditions

$$(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)$$

on the parameter  $s \in \mathbb{k}[t]^n$  of the parametrization (9) can be made explicit using Algorithm 3 in Subsection 4.1.

**PROOF.** Let  $P \notin \langle e \rangle^{l \times m}$ . By Point (2) of Lemma 2.4, there is  $N_1 \in \mathbb{N}$  such that  $\partial^{N_1} P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  and  $\partial^{N_1} P \neq 0$ . Let  $N_2$  be the maximal degree in  $t$  of the entries of  $w$  and set  $N = \max\{N_1, N_2 + 1\}$ . Therefore, we have  $\partial^N(w) = 0$  and the inhomogeneous linear integro-differential system  $P(v) = w$  yields the homogeneous linear ordinary differential system  $P_N(v) = 0$ , where  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$  and  $P_N \neq 0$ . Let us now suppose that  $v \in \mathbb{k}[t]^m$  is a solution of  $P_N(v) = 0$ . By (1), we have the identity  $1 = T_{N-1} + I^N \partial^N$ , where  $T_{N-1}$  is the  $(N-1)$ th Taylor operator (see Definition 2.2). We then have  $P(v) = \left( (T_{N-1} + I^N \partial^N) P \right)(v) = (T_{N-1} P)(v)$ . Thus, the equality  $P(v) = w$  yields  $(T_{N-1} P)(v) = w$  and the polynomial solutions of  $P(v) = w$  are those of the linear system

$$\begin{cases} P_N(v) = 0, \\ (T_{N-1} P)(v) = w. \end{cases} \quad (10)$$

Theorem 3.1 provides a parametrization of the polynomial solutions of  $P_N(v) = 0$  which can be written as

$$v = T'(u_g) + Q(s), \quad s \in \mathbb{k}[t]^n.$$

Now, substituting  $v = T'(u_g) + Q(s)$  into the second equation of (10), i.e.,  $(T_{N-1} P)(v) = w$ , we obtain

$$(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g),$$

with  $s \in \mathbb{k}[t]^n$ ,  $(T_{N-1} P Q) \in \langle e \rangle^{l \times n}$ ,  $w - (T_{N-1} P T')(u_g) \in \mathbb{k}[t]^l$ . We are then reduced to the problem studied in Subsection 4.1. Applying Algorithm 3, we finally obtain a finite number of  $\mathbb{k}$ -linear conditions on the free polynomial vector  $s \in \mathbb{k}[t]^n$  of the parametrization  $v = T'(u_g) + Q(s)$  of  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_N)$ .  $\square$

#### 4.3 Main algorithm

The result of Theorem 4.2 leads to an algorithm based on Algorithms 2 and 3 for computing polynomial solutions of inhomogeneous linear systems of integro-differential equations.

Note that  $u_g$  is the general solution of a holonomic linear differential system, so it depends on certain arbitrary constants in  $\mathbb{k}$  (see Theorem 3.1). It implies that the right-hand side of the inhomogeneous system  $(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)$  has parameters. However, Algorithm 3 can be easily adapted to handle the case of a right-hand side with parameters.

**Algorithm 4** Polynomial solutions of inhomogeneous linear integro-differential systems  $P(v) = w$  with  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$ ,  $w \in \mathbb{k}[t]^l$

**Require:**  $P \in \mathbb{I}_1^{l \times m}$  and  $w \in \mathbb{k}[t]^l$

- 1- If  $P \in \langle e \rangle^{l \times m}$ , then apply Algorithm 3 to  $(P, w)$  **end**
- 2- Compute  $N \in \mathbb{N}$  such that  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{l \times m}$ ,  $\partial^N(w) = 0$
- 3- Apply Algorithm 2 to  $P_N$ . Let

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_N) = \{T'(u_g) + Q(s) \mid \forall s \in \mathbb{k}[t]^n\}.$$

- 4- Apply Algorithm 3 to  $(T_{N-1}PQ, w - (T_{N-1}PT')(u_g))$
- return**  $T'(u_g) + Q(s)$ , where  $s$  is the output of Step 4.

*Example 4.3.* Let us illustrate all the steps in Algorithm 4 on a simple example. Let  $P = (\partial \quad 1 + e) \notin \langle e \rangle^{1 \times 2}$  and  $w = 0$ . We have  $N = 1$  thus we set  $P_1 = \partial P = (\partial^2 \quad \partial) \in \mathbb{A}_1^{1 \times 2}$ . Let us compute  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_1)$  by applying Algorithm 2 to  $P_1$ . We first get

$$P' = \begin{pmatrix} \partial & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \partial \end{pmatrix},$$

so that we have

$$u_g = c, \quad c \in \mathbb{k}, \quad T' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

and

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_1) = \left\{ v(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} s(t) \mid \forall s \in \mathbb{k}[t] \right\}.$$

Note that in this simple example, this parametrization can be found by hand calculations. Indeed, let  $v = (v_1 \quad v_2)^T \in \ker_{\mathbb{k}[t]}(P_1)$ , i.e.,

$$\partial^2 v_1(t) + \partial v_2(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial v_1(t) + v_2(t) = u(t), \\ \partial u(t) = 0, \end{cases}$$

i.e.,  $\partial v_1(t) + v_2(t) = c \in \mathbb{k}$ , which is equivalent to

$$\forall s = v_1 \in \mathbb{k}[t], \quad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} s(t).$$

Let us now compute  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(P)$ . We have  $T_{N-1} = T_0 = e$  and thus

$$T_{N-1}PQ = -e\partial, \quad T_{N-1}PT' = 2e,$$

so that we must apply Algorithm 3 to  $(-e\partial, -2c)$ . We then obtain the linear condition  $s'(0) = 2c$  and thus the polynomial solutions of  $-e\partial(s(t)) = -2c$  are given by  $s(t) = s(0) + 2ct + \tilde{s}(t)t^2$ , where  $s(0) \in \mathbb{k}$  and  $\tilde{s} \in \mathbb{k}[t]$  are free. Finally, we have obtained

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} s(t) \mid s(t) = s(0) + 2ct + t^2 \tilde{s}(t), \forall \tilde{s} \in \mathbb{k}[t] \right\}.$$

## 5 IMPLEMENTATION AND EXAMPLES

All the algorithms presented above have been implemented in the `BAVULA` package developed in `MAPLE` [14].

Our implementation relies on three other `MAPLE` packages:

- (1) `INTDIFFOP` [19] for arithmetic calculations in  $\mathbb{I}_1$  (including normal forms),
- (2) `OREMODULES` [9] for all calculations with matrices with entries in  $\mathbb{A}_1$  (Algorithm 1, Step 3 of Algorithm 2, and writing the holonomic linear differential system as a connection),

- (3) `INTEGRABLECONNECTIONS` [4] for computing the general polynomial solution of the holonomic linear differential system written as a connection (Step 2 of Algorithm 2).

The literature on integro-differential equations contains many interesting examples on which we tested our implementation. Here are two particular examples.

*Example 5.1.* Let us consider the system of integral equations studied in [7, Example 1] and given by

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

To compute the polynomial solutions of this system we apply Algorithm 4 to

$$P = \begin{pmatrix} 1 & I \\ I & tI - It \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We have  $N = 2$  and

$$P_2 = \begin{pmatrix} \partial^2 & \partial \\ \partial & 1 \end{pmatrix}.$$

The finitely presented left  $\mathbb{A}_1$ -module  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times 2} / (\mathbb{A}_1^{1 \times 2} P_2)$  is torsion-free and we have

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} s \mid \forall s \in \mathbb{k}[t] \right\}.$$

Then, we consider the system

$$(T_{N-1}PQ)(s) = w - (T_{N-1}PT')(u_g) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e \\ te \end{pmatrix} s = 0,$$

which yields  $s(0) = 0$ . Finally, we obtain

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial \end{pmatrix} s \mid \forall s = t\tilde{s} \in t\mathbb{k}[t] \right\},$$

so that the polynomial solutions of (11) are given by  $u(t) = t\tilde{s}(t)$  and  $v(t) = -\tilde{s}(t) - t\partial(\tilde{s}(t))$ , for any polynomial  $\tilde{s} \in \mathbb{k}[t]$ . Note that, in [7, Example 1], the authors write that the solutions are given by  $u(t) = \phi(t)$  and  $v(t) = -\partial(\phi(t))$  for any function  $\phi \in C^1([0, 1])$ . But the first equation of (11) then implies that we necessarily have  $\phi(0) = 0$  so that if  $\phi$  is a polynomial, we find again our result.

*Example 5.2.* We consider the system of Volterra integro-differential equations studied in [28, Example 10.17, p. 335] and given by

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2t^2 + \int_0^t ((t-x)u(x) + (t-x)v(x)) dx, \quad u(0) = 1, \\ v'(t) &= -3t^2 - \frac{1}{10}t^5 + \int_0^t ((t-x)u(x) - (t-x)v(x)) dx, \quad v(0) = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

To compute the polynomial solutions of this system we apply Algorithm 4 to

$$P = \begin{pmatrix} \partial - tI + It & -tI + It \\ e & 0 \\ -tI + It & \partial + tI - It \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 1 \\ -3t^2 - \frac{1}{10}t^5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We have  $N = 6$  and

$$P_6 = \begin{pmatrix} -\partial^4 + \partial^7 & -\partial^4 \\ 0 & 0 \\ -\partial^4 & \partial^4 + \partial^7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The finitely presented left  $\mathbb{A}_1$ -module  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times 2} / (\mathbb{A}_1^{1 \times 4} P_6)$  is torsion and we have

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P_6) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 t^3 + c_3 t^2 + c_5 t + c_7 \\ c_2 t^3 + c_4 t^2 + c_6 t + c_8 \end{pmatrix} \right\},$$

where the  $c_i$ 's are arbitrary constants in  $\mathbb{k}$ . Then, we consider the system

$$(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g) \Leftrightarrow 0 = q(t),$$

where  $q(t) \in \mathbb{k}[t]^4$  is given by

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{c_1}{20} + \frac{c_2}{20} \right) t^5 + \left( \frac{c_3}{12} + \frac{c_4}{12} \right) t^4 + \left( \frac{c_5}{6} + \frac{c_6}{6} \right) t^3 + \left( 2 - 3c_1 + \frac{c_7}{2} + \frac{c_8}{2} \right) t^2 - 2c_3 t - c_5 \\ 1 - c_7 \\ \left( -\frac{1}{10} + \frac{c_1}{20} - \frac{c_2}{20} \right) t^5 + \left( \frac{c_3}{12} - \frac{c_4}{12} \right) t^4 + \left( \frac{c_5}{6} - \frac{c_6}{6} \right) t^3 + \left( -3 - 3c_2 + \frac{c_7}{2} - \frac{c_8}{2} \right) t^2 - 2c_4 t - c_6 \\ 1 - c_8 \end{pmatrix}.$$

Solving for the  $c_i$ 's, we finally get

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} t^3 + 1 \\ -t^3 + 1 \end{pmatrix} \right\},$$

and we find again the result obtained in [28, Example 10.17, p. 335] using Laplace transform.

## 6 CONCLUSION AND EXTENSION

In this article, we have presented the first algorithm for computing polynomial solutions of general inhomogeneous linear systems of integro-differential equations with polynomial coefficients. The algorithm is implemented in the MAPLE package BAVULA [14] (freely available). As mentioned in the introduction, this algorithm is a key step in the development of an effective algebraic analysis approach to linear systems of integro-differential equations with polynomial coefficients. Indeed, the computation of polynomial solutions is necessary to compute left/right syzygies, left/right inverses, and left/right factorizations of matrices of integro-differential operators.

Finally, it should be noted that the method presented in this paper (e.g. Algorithm 4) could probably be extended to compute exponential (including rational) solutions of inhomogeneous linear systems of integro-differential equations with polynomial coefficients. In addition, the INTEGRABLECONNECTIONS package includes the computation of exponential solutions (see [4]) of a connection so our implementation could also be adapted. Let us explain how easy this extension is in some special cases. If the left  $\mathbb{A}_1$ -module  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times m} / (\mathbb{A}_1^{1 \times l} P_N)$  – finitely presented by the matrix  $P_N$  involved in Step 2 of Algorithm 4 – is torsion, then a parametrization of the exponential solutions of  $P_N$  is given by  $\{T'(u_g)\}$ , where  $u_g$  is the general exponential solution of the homogeneous holonomic linear differential system defined by  $P_N$ . Then, in Step 4, we have  $T_{N-1} P Q = 0$  and, assuming that  $u_g(t)$  can be evaluated at  $t = 0$ ,  $w - (T_{N-1} P T')(u_g) \in \mathbb{k}[t]^l$ . Thus in a similar way to what happens when calculating polynomial solutions, we only have to solve the linear system formed by the coefficients of  $w - (T_{N-1} P T')(u_g) \in \mathbb{k}[t]^l$  for the arbitrary constants appearing in the general exponential solution  $u_g$ . We illustrate this with the following simple example computed with the BAVULA package, where we have just replaced the computation of polynomial solutions of the homogeneous holonomic linear differential system by the computation of its exponential solutions.

*Example 6.1.* We consider the Volterra integral equation studied in [28, Example 3.18, p. 91] and given by

$$u(t) = 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \int_0^t (t-x)^2 u(x) dx. \quad (13)$$

We set

$$P = \left( 1 - \frac{1}{2} t^2 I + t I t - \frac{1}{2} I t^2 \right), \quad w = \left( 1 + t + \frac{1}{2} t^2 \right).$$

We have  $N = 3$ ,  $P_3 = (\partial^3 - 1)$ , and  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1 / (\mathbb{A}_1 P_3)$  is a torsion left  $\mathbb{A}_1$ -module. Using INTEGRABLECONNECTIONS, we find that the general exponential solution of the homogeneous holonomic linear differential system defined by  $P_3$  is given by

$$u_g(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-\alpha_1 t) + c_3 \exp(-\alpha_2 t),$$

where  $\alpha_1, \alpha_2$  are the two complex conjugate roots of  $Z^2 - Z + 1$  and  $c_1, c_2, c_3$  are arbitrary constants in  $\mathbb{k}$ . As  $T' = 1$ , we get that the exponential solutions of  $P_3$  are given by  $u_g$ . We then need to solve  $w - (T_{N-1} P T')(u_g) = 0$  which consists in solving a linear system for  $c_1, c_2, c_3$  and we get  $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$ . We finally obtain the solution  $u(t) = \exp(t)$  of (13) as found in [28, Example 3.18, p. 91] using the *variational iteration method*.

Finally, if the left  $\mathbb{A}_1$ -module  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times m} / (\mathbb{A}_1^{1 \times l} P_N)$  – finitely presented by the matrix  $P_N$  involved in Step 2 of Algorithm 4 – is not a torsion module, then we still have to generalize the content of Subsection 4.1 so that we can apply it to the calculation of exponential solutions of the system  $(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)$ . Another point is to take into account the case of exponential solutions that cannot be evaluated at zero. These questions will be addressed in future research.

## REFERENCES

- [1] M. Barkatou. *On rational solutions of systems of linear differential equations*. Journal of Symbolic Computation, 28, 547-567, 1999.
- [2] M. Barkatou, T. Cluzeau. *On polynomial solutions of linear integro-differential equations*. Proceedings of the 8th IFAC Symposium on System Structure and Control, Montreal, Canada, 2022.
- [3] M. Barkatou, T. Cluzeau. *On the computation of rational solutions of linear integro-differential equations with polynomial coefficients*. Journal of Symbolic Computation, 121, 2024.
- [4] Barkatou, T. Cluzeau, C. El Bacha, J.-A. Weil. *Computing closed-form solutions of integrable connections*. Proceedings of ISSAC'12, 43-50, 2012, [https://www.unim.fr/pages\\_perso/thomas.cluzeau/Packages/IntegrableConnections/PDS.html](https://www.unim.fr/pages_perso/thomas.cluzeau/Packages/IntegrableConnections/PDS.html).
- [5] V. V. Bavula. *The algebra of integro-differential operators on an affine line and its modules*. Journal of Pure and Applied Algebra, 217 (3), 495-529, 2013.
- [6] A. Borel. *Algebraic D-modules*. Perspectives in Mathematics, vol. 2, Academic Press, 1987.
- [7] M. Bulatov, O. S. Budnikova. *On stable algorithms for numerical solution of integral-algebraic equations*. Bulletin of the South Ural State University Series Mathematical Modelling Programming and Computer Software, 2013.
- [8] F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz. *Effective algorithms for parametrizing linear control systems over Ore algebras*. Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput., 16, 319-376, 2005.
- [9] F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz. *OreModules: A symbolic package for the study of multidimensional linear systems*. Applications of Time-Delay Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 352, Springer, 233-264, 2007, <https://who.rocq.inria.fr/Alban.Quadrat/OreModules.html>.
- [10] F. Chyzak, B. Salvy. *Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate identities*. Journal of Symbolic Computation, 26, 187-227, 1998.
- [11] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. *Further results on the computation of the annihilator of integro-differential operator*. Proceedings of ISSAC'23, 182-190, 2023.
- [12] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. *Effective characterization of evaluation ideals of the ring of integro-differential operators*. Proceedings of ISSAC'24, 117-125, 2024.
- [13] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. *An algorithmic proof of the coherence of the ring of polynomial ordinary integro-differential operators*. Proceedings of ISSAC'25, 2025.

- [14] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. BAVULA, *A symbolic package for linear ordinary polynomial integro-differential systems*. Freely available on the authors' web pages.
- [15] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. *The effective Cramer property of the ring of polynomial ordinary linear integro-differential operators*. In preparation, 2025.
- [16] T. Cluzeau, A. Quadrat. *Factoring and decomposing a class of linear functional systems*. Linear Algebra and its Applications 428, 324-381, 2008.
- [17] S. C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-modules*. Cambridge University Press, 1995.
- [18] M. Kashiwara, T. Kawai, T. Kimura. *Foundations of Algebraic Analysis*. Princeton University Press, 1986.
- [19] A. Korpöral, G. Regensburger, M. Rosenkranz. *Symbolic computation for ordinary boundary problems in Maple*. ACM Communications in Computer Algebra, 44 (3/4), 120-122, 2011.
- [20] J. C. McConnell, J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society, 2000.
- [21] T. Oaku, N. Takayama, H. Tsai. *Polynomial and rational solutions of holonomic systems*. Journal of Pure and Applied Algebra, 164, 199-220, 2001.
- [22] H. Tsai, U. Walther. *Computing homomorphisms between holonomic D-modules*. Journal of Symbolic Computation, 32, 597-617, 2001.
- [23] A. Quadrat. *An introduction to constructive algebraic analysis and its applications*. Les cours du CIRM, Journées Nationales de Calcul Formel (2010), 281-471, 2010.
- [24] A. Quadrat, G. Regensburger. *Computing polynomial solutions and annihilators of integro-differential operators with polynomial coefficients*. Algebraic Methods and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems, Advances in Delays and Dynamics, 9, 87-114, 2020.
- [25] G. Regensburger, M. Rosenkranz, J. Middeke. *A skew polynomial approach to integro-differential operators*. Proceedings of ISSAC'09, 287-294, 2009.
- [26] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, 2<sup>nd</sup> edition, 2009.
- [27] J. T. Stafford. *Module structure of Weyl algebras*. J. London Math. Soc., 18 (3): 429-442, 1978.
- [28] A.-M. Wazwaz. *Linear and Nonlinear Integral Equations - Methods and Applications*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

# An algorithmic proof of the coherence of the ring of polynomial ordinary integro-differential operators

THOMAS CLUZEAU, Univ. Limoges, CNRS, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, France

CAMILLE PINTO, Sorbonne University – Inria Paris, France

ALBAN QUADRAT, Sorbonne University – Inria Paris, France

Bavula proved that the ring  $\mathbb{I}_1$  of polynomial ordinary integro-differential operators over a field  $\mathbb{k}$  of characteristic zero is coherent in the sense that the left/right kernel of any rectangular matrix with entries in  $\mathbb{I}_1$  is a finitely generated left/right  $\mathbb{I}_1$ -module. Unfortunately, his proof is not algorithmic. The contribution of this paper is to give an algorithmic proof of the coherence property of  $\mathbb{I}_1$ . We show that the kernel computation can be reduced to a kernel computation in a certain ring of skew Laurent polynomials and the computation of polynomial solutions of linear polynomial integro-differential systems. These two problems are shown to be effective. The algorithmic proof of the coherence of  $\mathbb{I}_1$  allows us to develop an algorithmic elimination theory for linear systems of polynomial integro-differential equations with separable polynomial kernels. Finally, the algorithms presented in the paper are implemented in the freely available MAPLE package BAVULA.

CCS Concepts: • **Computing methodologies** → **Symbolic and algebraic manipulation**; • **Symbolic and algebraic algorithms** → *Algebraic algorithms*;

Additional Key Words and Phrases: Linear systems of integro-differential equations, rings of integro-differential operators, coherent ring, linear integro-differential elimination, effective homological algebra

## ACM Reference Format:

Thomas Cluzeau, Camille Pinto, and Alban Quadrat. 2025. An algorithmic proof of the coherence of the ring of polynomial ordinary integro-differential operators. 1, 1 (April 2025), 9 pages. <https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX>

## 1 INTRODUCTION

Differential systems have been studied extensively in the computer algebra literature. Unfortunately and despite their interests in natural sciences (e.g., mathematical physics, biology) and engineering sciences (e.g., control theory), integral systems and, more generally, integro-differential systems do not seem to have attracted much attention from the computer algebra community. To our knowledge, the only exceptions are the works of Rosenkranz-Regensburger in the direction of the computation of Green functions and boundary value problems [33–36] and, more recently, the work of Boulier-Lemaire and their co-authors on integro-differential elimination for

---

Authors' addresses: Thomas Cluzeau, Univ. Limoges, CNRS, XLIM, UMR 7252, F-87000 Limoges, France, [thomas.cluzeau@unilim.fr](mailto:thomas.cluzeau@unilim.fr); Camille Pinto, Sorbonne University – Inria Paris, Paris, France, [camille.pinto@inria.fr](mailto:camille.pinto@inria.fr); Alban Quadrat, Sorbonne University – Inria Paris, Paris, France, [alban.quadrat@inria.fr](mailto:alban.quadrat@inria.fr).

---

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. Copyrights for components of this work owned by others than ACM must be honored. Abstracting with credit is permitted. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee. Request permissions from [permissions@acm.org](mailto:permissions@acm.org).

© 2025 Association for Computing Machinery.

XXXX-XXXX/2025/4-ART \$15.00

<https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX>

nonlinear systems and its applications to the parameter estimation problem [8, 25, 26]. See also [10, 15, 16, 31] for related studies.

This paper aims to develop an *algorithmic elimination theory* for the simplest class of *linear integro-differential systems*, namely, the class of linear integro-differential systems with polynomial coefficients and *polynomial separable kernels*. Recall that the kernel  $K$  of an integral operator  $\int_0^t K(t, \tau) y(\tau) d\tau$  is *polynomial and separable* if  $K(t, \tau) = \sum_{i=1}^r p_i(t) q_i(\tau)$  for some polynomials  $p_i$ 's and  $q_i$ 's. This class of linear integro-differential systems corresponds to linear systems defined by matrices with entries in the ring  $\mathbb{I}_1$  of ordinary integro-differential operators with polynomial coefficients over a given field  $\mathbb{k}$  of characteristic zero [7, 36].

Considering a matrix  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ , a natural question is to characterize its left kernel  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) := \{\lambda \in \mathbb{I}_1^{1 \times q} \mid \lambda R = 0\}$  and its right kernel  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) := \{\eta \in \mathbb{I}_1^{p \times 1} \mid R \eta = 0\}$ . This issue can be studied algebraically if  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  is a finitely generated left  $\mathbb{I}_1$ -module so that  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  can be generated by a *finite* set of generators, and similarly for  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ . In [7], Bavula proved that  $\mathbb{I}_1$  is a so-called (*left/right*) *coherent ring* [9, 37, 38], namely, that  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  is a finitely generated left  $\mathbb{I}_1$ -module and  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  is a finitely generated right  $\mathbb{I}_1$ -module for all  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  and  $p, q \geq 1$ . The coherence property of  $\mathbb{I}_1$  shows that an *elimination theory* can be developed for this class of linear polynomial integro-differential systems. Indeed, considering the linear polynomial integro-differential system  $R_1 y_1(t) + R_2 y_2(t) = 0$ , where  $R_1 \in \mathbb{I}_1^{q \times p_1}$  and  $R_2 \in \mathbb{I}_1^{q \times p_2}$ , the problem of finding a generating set for the linear integro-differential equations on  $y_1$  alone (i.e., the equations obtained by eliminating  $y_2$  from the above system) corresponds to the computation of a set of generators of the finitely generated left  $\mathbb{I}_1$ -module  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R_2)$ : let  $S_2 \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  be such that  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R_2) = \text{im}_{\mathbb{I}_1}(.S_2) := \mathbb{I}_1^{1 \times r} S_2$ . Then, we have  $S_2 R_1 y_1(t) + S_2 R_2 y_2(t) = 0$ , i.e.,  $(S_2 R_1) y_1(t) = 0$ , which shows that  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(.S_2 R_1) = \mathbb{I}_1^{1 \times r} (S_2 R_1)$  is a generating set of linear integro-differential equations on  $y_1$  alone. For instance, the problem of computing the *compatibility conditions* of an inhomogeneous linear integro-differential system  $R_2 y_2(t) = y_1(t)$  corresponds to the case where  $R_1 = -I_q$ , which shows that  $S_2 y_1(t) = 0$  generates the compatibility conditions of the inhomogeneous linear system.

Unfortunately, the proof of the coherence of  $\mathbb{I}_1$  given in [7] does not seem to be effective. More precisely, we could not make it algorithmic (in particular, the use of *simple* left  $\mathbb{I}_1$ -modules and the *length function* [37]). Combining ideas and results of [7] with the effective computation of the polynomial solutions of inhomogeneous (underdetermined) linear systems of ordinary integro-differential equations with polynomial coefficients – using *effective algebraic D-module theory* [9, 12, 14, 21, 30]) – we develop here an algorithmic proof of the coherence of  $\mathbb{I}_1$ . The corresponding algorithm is

implemented in a MAPLE package called BAVULA [18], built upon the three packages INTDIFFOP [22], OREMODULES [13], and INTEGRABLECONNECTIONS [2]. For instance, using the BAVULA package, we can show that elimination of  $y_2$  of the following linear system

$$\begin{cases} y_1(t) + \int_0^t y_1(\tau) d\tau + \dot{y}_2(t) = 0, \\ \dot{y}_1(t) + \int_0^t y_2(\tau) d\tau = 0, \end{cases}$$

yields the following linear integro-differential system in  $y_1$  only

$$\begin{cases} y_1(t) + \int_0^t y_1(\tau) d\tau - y_1^{(3)}(t) = 0, \\ \dot{y}_1(0) = 0. \end{cases}$$

Note that the results of this article go hand in hand with those of the other article [17] published in the same proceedings.

## 2 THE RING $\mathbb{I}_1$ OF POLYNOMIAL ORDINARY INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS

Let  $\mathbb{k}$  be a field of characteristic zero. For explicit computations, we shall assume that  $\mathbb{k}$  is an effective field, in particular  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ .

Let  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  be the noncommutative endomorphism ring of  $\mathbb{k}[t]$  and  $t_0 \in \mathbb{k}$  a fixed point. Consider the following  $\mathbb{k}$ -endomorphisms of  $\mathbb{k}[t]$ , i.e., the following elements of  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$

$$\begin{aligned} \partial : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longrightarrow \partial(p) = \dot{p}, \\ \forall a \in \mathbb{k}[t], m_a : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longrightarrow m_a(p) = ap, \\ I : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longrightarrow I(p), \quad I(p)(t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau, \\ e : \mathbb{k}[t] &\longrightarrow \mathbb{k}[t], & p &\longrightarrow e(p) = p(t_0). \end{aligned}$$

Thus,  $\partial$  is the standard derivation,  $m_a$  is the multiplication by a fixed polynomial  $a \in \mathbb{k}[t]$ ,  $I$  is the indefinite integral, and  $e$  is the evaluation at  $t_0$ . To simplify the notation, in the rest of the paper, we shall suppose that  $t_0 = 0$  but the results of the paper remain valid for  $t_0 \in \mathbb{k}$  and the computational ones for  $t_0 \in \mathbb{Q}$ .

*Definition 2.1 ([7]).* With the above notations, we can define the following two  $\mathbb{k}$ -subalgebras of  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$ :

- (1) The  $\mathbb{k}$ -subalgebra  $\mathbb{A}_1(\mathbb{k})$  of  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  generated by  $\partial$  and  $m_a$  for all  $a \in \mathbb{k}[t]$ , namely  $\mathbb{A}_1(\mathbb{k})$  is the *first Weyl algebra* of ordinary differential operators with polynomial coefficients.
- (2) The  $\mathbb{k}$ -subalgebra  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  of  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  generated by  $\partial$ ,  $m_a$  for all  $a \in \mathbb{k}[t]$ ,  $I$ , and  $e$ , namely  $\mathbb{I}_1(\mathbb{k})$  is the ring of ordinary integro-differential operators with polynomial coefficients.

The index 1 of  $\mathbb{A}_1$  and  $\mathbb{I}_1$  comes from the fact that the above constructions can be generalized to  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ . See the references in [7]. Since the base field  $\mathbb{k}$  is fixed once and for all, to simplify notation, in what follows, we shall simply note  $\mathbb{A}_1$  and  $\mathbb{I}_1$ .

By construction,  $\mathbb{A}_1$  is a subring of  $\mathbb{I}_1$ . Even if  $\mathbb{A}_1$  is a noetherian domain [9, 27], we shall see that  $\mathbb{I}_1$  is neither a domain nor noetherian, which makes the study of  $\mathbb{I}_1$  more complicated.

In what follows, to simplify notation, the composition  $\circ$  will be written multiplicatively and  $m_a$  will be identified with  $a$  in  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$ . Furthermore,  $1$  will denote the identity endomorphism of  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  and if  $P \in \mathbb{I}_1$ ,  $P(p)$  will stand for the element of  $\mathbb{k}[t]$  obtained by applying  $P \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  to  $p \in \mathbb{k}[t]$ .

We then have the following relations among the generators of  $\mathbb{I}_1$

$$\partial I = 1, \quad I \partial = 1 - e, \quad \forall a \in \mathbb{k}[t], \quad \partial a = a \partial + \partial(a), \quad e a = e(a) e. \quad (1)$$

The first (resp., second, third) identity corresponds to the first fundamental theorem of calculus (resp., the second one, Leibniz rule).

We can easily prove that (1) yields the following identities

$$\forall a \in \mathbb{k}[t], \quad \begin{cases} e^2 = e, \quad e I = 0, \quad \partial e = 0, \quad I a \partial = -I \partial(a) + a - e(a) e, \\ I a e = I(a) e, \quad I a I = I(a) I - I I(a), \\ I^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2)$$

See [31, 34] and the references therein. The fourth (resp., sixth, last) identity of (2) corresponds to the integration by parts (resp., double integration, multiple integration). Furthermore, it can be shown that the identities (1) and (2) for all  $a = t^n$  and  $n \in \mathbb{N}$  define an infinite Gröbner basis for a graded partial order  $\partial > t$  and  $I > t$  [34].

*THEOREM 2.2. ([7, 36])* Every element  $P$  of  $\mathbb{I}_1$  can be uniquely written as a finite sum of terms of the form (normal form)

$$P = \underbrace{\sum_{i=0}^l a_i(t) \partial^i}_{\text{differential op.}} + \underbrace{\sum_{j=0}^m b_j(t) I t^j}_{\text{integral op.}} + \underbrace{\sum_{k=0}^n c_k(t) e \partial^k}_{\text{evaluation op.}}$$

where  $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{k}[t]$ , and  $l, m, n \in \mathbb{N}$ .

The integral part of  $P$  can be rewritten as  $IK(t, \tau)$ , where the kernel  $K(t, \tau) = \sum_{j=0}^m b_j(t) \tau^j \in \mathbb{k}[t, \tau]$  of the integral operator is *polynomial* and *separable/degenerated* since  $K(t, \tau) = \sum_{j=0}^m A_j(t) B_j(\tau)$  with  $A_j(t) = b_j(t)$  and  $B_j(\tau) = \tau^j$ .

*Definition 2.3.* The *Taylor operators* defined by  $T_n = \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} e \partial^i$  for  $n \in \mathbb{N}$  act by

$$\forall b \in \mathbb{k}[t], \quad T_n(b)(t) = \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} b^{(i)}(0).$$

The multiple integration identity  $I^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} I \frac{(-t)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}$  defines the following convolution

$$I^n(b)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} b(\tau) d\tau.$$

Let us state two lemmas that will be often used in what follows.

*LEMMA 2.4 ([15, 28]).* For all  $n \in \mathbb{N}$ , the identity

$$1 = T_{n-1} + I^n \partial^n, \quad (3)$$

holds in  $\mathbb{I}_1$ . This identity corresponds to the Taylor theorem with integral reminder, i.e.

$$\begin{aligned} \forall b \in \mathbb{k}[t], \quad b(t) &= b(0) + \dot{b}(0)t + \dots + b^{(n-1)}(0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &+ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} b^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

*LEMMA 2.5 ([15, 36]).* Let  $E = \sum_{k=0}^m c_k(t) e p_k(\partial)$ , where  $c_k \in \mathbb{k}[t]$  and  $p_k \in \mathbb{k}[\partial]$  for  $k = 0, \dots, m$ . Then, we have

$$\forall P \in \mathbb{I}_1, \quad P E = \sum_{k=0}^m P(c_k)(t) e p_k(\partial) \in \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial],$$

where  $P(c_k)$  denotes the application of  $P \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])$  to  $c_k \in \mathbb{k}[t]$ .

A theorem due to Jacobson [20] asserts that a ring in which an element has a left/right inverse but not a two-sided inverse is not noetherian. Thus,  $\mathbb{I}_1$  is not a noetherian ring because  $\partial I = 1$  and  $I \partial = 1 - e$ .

*Example 2.6.* Using Definition 2.3, we have

$$T_n(t^k) = \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} e \partial^i(t^k) = \begin{cases} t^k, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

If  $p_k(\partial) \in \mathbb{k}[\partial]$  for  $k = 0, \dots, r$ , then, using Lemma 2.5, we get

$$T_n \left( \sum_{k=0}^r t^k e p_k(\partial) \right) = \sum_{k=0}^r T_n(t^k) e p_k(\partial) = \sum_{k=0}^{\min\{r, n\}} t^k e p_k(\partial).$$

In particular, the identities  $T_n = T_n T_{n+1}$  hold in  $\mathbb{I}_1$  for all  $n \in \mathbb{N}$ , which yields the following ascending chain of left ideals of  $\mathbb{I}_1$

$$\mathbb{I}_1 T_0 \subseteq \mathbb{I}_1 T_1 \subseteq \mathbb{I}_1 T_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{I}_1 T_n \subseteq \mathbb{I}_1 T_{n+1} \subseteq \dots$$

This ascending chain is not stationary because, by Lemma 2.5,  $\mathbb{I}_1 T_{n+1} = \mathbb{I}_1 T_n$  is equivalent to the existence of  $P \in \mathbb{I}_1$  satisfying the identity

$$T_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{t^i}{i!} e \partial^i = P T_n = \sum_{i=0}^n \frac{P(t^i)}{i!} e \partial^i.$$

This last equality yields a contradiction because the  $(n+1)^{\text{th}}$  term of  $T_{n+1}$  cannot vanish, which shows that  $\mathbb{I}_1$  is not left noetherian.

*Definition 2.7* ([6, 7]). The ring  $\mathbb{I}_1$  has an *involution*  $\theta$  – namely, a  $\mathbb{k}$ -algebra anti-isomorphism (i.e.,  $\theta(P_1 P_2) = \theta(P_2) \theta(P_1)$  for all  $P_1, P_2 \in \mathbb{I}_1$ ) satisfying  $\theta^2 = 1 - e$  – defined by

$$\theta(t) = \partial t \partial, \quad \theta(\partial) = I, \quad \theta(I) = \partial, \quad \theta(e) = e.$$

*Example 2.8.* Using the involution  $\theta$  defined above and the identities  $e(\partial t \partial)^i = e! \partial^i$  and  $Ie = te$ , we have

$$\theta(T_n) = \sum_{i=0}^n I^i e \frac{(\partial t \partial)^i}{i!} = \sum_{i=0}^n I^i e \partial^i = \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} e \partial^i = T_n.$$

Considering again Example 2.6 and the following equivalences

$$\begin{aligned} T_n = T_n T_{n+1} &\Leftrightarrow T_n = \theta(T_n) = \theta(T_{n+1}) \theta(T_n) = T_{n+1} T_n, \\ T_{n+1} = P T_n &\Leftrightarrow T_{n+1} = \theta(T_{n+1}) = \theta(T_n) \theta(P) = T_n \theta(P), \end{aligned}$$

the following ascending chain of right ideals of  $\mathbb{I}_1$

$$T_0 \mathbb{I}_1 \subseteq T_1 \mathbb{I}_1 \subseteq T_2 \mathbb{I}_1 \subseteq \dots \subseteq T_n \mathbb{I}_1 \subseteq T_{n+1} \mathbb{I}_1 \subseteq \dots$$

is not stationary, showing that  $\mathbb{I}_1$  is also not a right noetherian ring.

The fact that the ring  $\mathbb{I}_1$  is not noetherian seems to prove that an algorithmic study of linear systems over  $\mathbb{I}_1$  is not possible. But, as explained in [9, 29], a theory of  $\mathcal{R}$ -linear systems only requires the assumption that the ring  $\mathcal{R}$  is *coherent*. Recall this key concept.

*Definition 2.9* ([38]). A ring  $\mathcal{R}$  is called *left coherent* if

$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall R \in \mathcal{R}^{q \times p}, \quad \ker_{\mathcal{R}}(R) = \{Q \in \mathcal{R}^{1 \times p} \mid QR = 0\}$   
is a finitely generated left  $\mathcal{R}$ -module.

Similarly, a ring  $\mathcal{R}$  is called a *right coherent* if

$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall R \in \mathcal{R}^{q \times p}, \quad \ker_{\mathcal{R}}(R) = \{Q \in \mathcal{R}^{p \times 1} \mid RQ = 0\}$   
is a finitely generated right  $\mathcal{R}$ -module.

A ring  $\mathcal{R}$  is called *coherent* if  $\mathcal{R}$  is left and right coherent.

Equivalently,  $\mathcal{R}$  is left coherent if for every finitely generated left ideal of  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^p \mathcal{R} R_i = \mathcal{R}^{1 \times p} R$  with  $R = (R_1 \dots R_p)^T$ , where  $R_i \in \mathbb{I}_1$  for  $i = 1, \dots, p$ , the left  $\mathcal{R}$ -module of relations of  $\mathcal{I}$ , namely,

$$\text{Syz}(R) = \left\{ Q = (Q_1 \dots Q_p) \in \mathcal{R}^{1 \times p} \mid QR = \sum_{i=1}^p Q_i R_i = 0 \right\},$$

is finitely generated. Similarly for a right coherent ring [38].

**THEOREM 2.10** ([7]). *The ring  $\mathbb{I}_1$  is coherent.*

Unfortunately, Bavula's proof does not seem to be algorithmic, or at least, we were not able to develop an algorithm from it. Bavula's proof uses the following equivalent formulation.

**THEOREM 2.11** ([38]). *A ring  $\mathcal{R}$  is left coherent if and only if*

- (1)  $\forall r \in \mathcal{R}, \text{ann}_{\mathcal{R}}(r) = \{q \in \mathcal{R} \mid qr = 0\}$  is finitely generated.
- (2) For all finitely generated left ideals  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$  of  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  is a finitely generated left ideal of  $\mathcal{R}$ .

*A similar characterization holds for right coherent rings.*

**REMARK 1.** If  $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^m \mathcal{R} f_i$  and  $\mathcal{J} = \sum_{j=1}^n \mathcal{R} g_j$  are two finitely generated left  $\mathcal{R}$ -modules and  $R = (f_1 \dots f_m \quad g_1 \dots g_n)^T$ , then any  $(\lambda \quad -\mu) \in \ker_{\mathcal{R}}(R)$ , where  $\lambda \in \mathcal{R}^{1 \times m}$  and  $\mu \in \mathcal{R}^{1 \times n}$ , yields  $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i = \sum_{j=1}^n \mu_j g_j \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ . Conversely, every element in  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  clearly defines  $(\lambda \quad -\mu) \in \ker_{\mathcal{R}}(R)$ . Hence,  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$  is finitely generated if and only if  $\ker_{\mathcal{R}}(R)$  is finitely generated. Finally, note that  $\text{ann}_{\mathcal{R}}(r) = \ker_{\mathcal{R}}(r)$  for all  $r \in \mathcal{R}$ .

In [31], an algorithmic characterization of  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(r)$  is obtained when  $r$  is not purely an evaluation operator, i.e.,  $r \notin \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial]$ . In [15],  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(r)$  is effectively characterized when  $r \in \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial]$ . Thus, the first condition for the coherence of  $\mathbb{I}_1$  was made constructive. In [16], the second condition was algorithmically solved when  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$  are two ideals finitely generated by evaluation operators. These ideals are *semi-simple* as proved in [7]. An explicit description of these ideals as finitely generated  $\mathbb{k}[t]$ -modules is given in [16]. In the case where  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$  are not generated by only evaluation operators, Bavula's proof uses his classification of *simple*  $\mathbb{I}_1$ -modules [7] and the *length function* of a module [37]. We could not develop an algorithmic proof from these arguments and results. We had to follow another approach, explained in Section 3, that covers the case where  $\mathcal{I}$  or  $\mathcal{J}$  are not defined by only evaluation operators.

Finally, let us state a few consequences of Theorem 2.10 for the study of linear systems of polynomial integro-differential equations.

It is important to notice that every linear integro-differential system is defined by a finite matrix  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ , and thus, defines the following *finitely presented* left  $\mathbb{I}_1$ -module [9, 38]

$$\mathcal{M} = \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(R) = \mathbb{I}_1^{1 \times p} / (\mathbb{I}_1^{1 \times q} R).$$

The left  $\mathbb{I}_1$ -module  $\mathcal{M}$  is finitely generated by the residue classes  $\{y_i = \pi(e_i)\}_{i=1, \dots, p}$  of the standard basis  $\{e_i\}_{i=1, \dots, p}$  of  $\mathbb{I}_1^{1 \times p}$ , where  $e_i$  is defined by 1 at the  $i^{\text{th}}$  entry or 0 elsewhere, and  $\pi : \mathbb{I}_1^{1 \times p} \rightarrow \mathcal{M}$  is the canonical left  $\mathbb{I}_1$ -homomorphism sending  $\lambda \in \mathbb{I}_1^{1 \times p}$  to its residual class  $\pi(\lambda)$  in  $\mathcal{M}$ . Moreover, the generators  $\{y_i\}_{i=1, \dots, p}$  satisfy the finite generating set of left  $\mathbb{I}_1$ -relations  $Ry = 0$ , where  $y = (y_1 \dots y_p)^T \in \mathcal{M}^{p \times 1}$ . Thus, linear integro-differential systems can be studied by considering the *category of finitely presented left*

modules over the coherent ring  $\mathbb{I}_1$ . This idea is at the core of *algebraic analysis* [9, 21]. Let us explain why. We need the next definition.

**Definition 2.12** ([9, 38]). A left  $\mathcal{R}$ -module  $\mathcal{M}$  is *coherent* if  $\mathcal{M}$  is finitely generated and every left  $\mathcal{R}$ -submodule of  $\mathcal{M}$  is finitely presented, i.e., isomorphic to  $\text{coker}_{\mathcal{R}}(L)$  for a matrix  $L$ .

A ring  $\mathcal{R}$  is left coherent if it is coherent as a left  $\mathcal{R}$ -module.

**THEOREM 2.13** ([9, 38]). *A ring  $\mathcal{R}$  is left coherent if and only if every finitely presented left  $\mathcal{R}$ -module is coherent.*

The category of finitely presented modules/coherent modules over a coherent ring is *abelian* [37, Ch. 5, p. 307], which shows that standard *homological algebra methods* [37] can be used to study linear polynomial integro-differential systems. This category highly resembles that of finitely generated modules over a noetherian ring.

### 3 ALGORITHMIC PROOF OF THE COHERENCE OF $\mathbb{I}_1$

#### 3.1 The unique two-sided ideal $\langle e \rangle$ of $\mathbb{I}_1$

Here we state some results from [7] that will play an important role.

Let us consider the two-sided ideal of  $\mathbb{I}_1$  generated by the evaluation  $e$ , i.e.,  $\langle e \rangle := \mathbb{I}_1 e \mathbb{I}_1$ . Let us first show that  $\langle e \rangle = \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial]$ .

Let  $P = \sum_{i=0}^l a_i(t) \partial^i + \sum_{j=0}^m b_j(t) I t^j + \sum_{k=0}^n c_k(t) e \partial^k \in \mathbb{I}_1$ . Using  $eI = 0$ ,  $\partial e = 0$ ,  $I t^j e = I(t^j) e$  ((2)), and Lemma 2.5, we get

$$eP = e \left( \sum_{i=0}^l a_i(0) \partial^i + \sum_{k=0}^n c_k(0) \partial^k \right) \in e \mathbb{k}[\partial],$$

$$Pe = P(1) e = (a_0(t) + \sum_{j=0}^m b_j(t) I(t^j) + c_0(t)) e \in \mathbb{k}[t] e,$$

which shows that  $\langle e \rangle = \mathbb{k}[t] e \mathbb{k}[\partial]$ . Let us now prove that  $\langle e \rangle$  is the only two-sided ideal of  $\mathbb{I}_1$ . To do that, we first state a useful lemma that can be proved by direct calculations:

**LEMMA 3.1.** *We have the following results:*

- (1) If  $E = \sum_{k=0}^n c_k(t) e \partial^k \in \langle e \rangle$  and  $M = 1 + \max_{k=0, \dots, n} \deg_t c_k$ , then  $\partial^M E = 0$ .
- (2) If  $P = \sum_{i=0}^l a_i(t) \partial^i + \sum_{j=0}^m b_j(t) I t^j + \sum_{k=0}^n c_k(t) e \partial^k \notin \langle e \rangle$  and  $N = 1 + \max\{\max_{j=0, \dots, m} \deg_t b_j, \max_{k=0, \dots, n} \deg_t c_k\}$ , then  $\partial^N P \in \mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$ .

Suppose that  $I$  is a two-sided ideal of  $\mathbb{I}_1$ . If  $I \not\subseteq \langle e \rangle$ , then there exists  $P \in \mathbb{I}_1 \setminus \langle e \rangle$ . Using Point (2) of Lemma 3.1, there exists  $N \in \mathbb{N}^*$  such that  $\partial^N P \in \mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$ . Now, using the fact that  $\mathbb{A}_1$  is a *simple ring* (see [27, Theorem 1.3.5]), the nonzero two-sided ideal  $\mathbb{A}_1 \partial^N P \mathbb{A}_1$  of  $\mathbb{A}_1$  is equal to  $\mathbb{A}_1$ , i.e., there exist  $Q, R \in \mathbb{A}_1$  such that  $Q \partial^N P R = 1$ , which shows that  $I = \mathbb{I}_1$ . Let us now suppose that  $I \subseteq \langle e \rangle$  and let  $E = \sum_{j,k} c_{j,k} t^j e \partial^k \in I \setminus \{0\}$ . Then,  $(e \partial^j) E(t^k e) = j! k! c_{j,k} e$ , which shows that  $e \in I$ , and thus,  $\langle e \rangle \subseteq I$ , which finally yields  $I = \langle e \rangle$ .

We have the following *short exact sequence* of algebras [37]

$$0 \longrightarrow \langle e \rangle \xrightarrow{i} \mathbb{I}_1 \xrightarrow{\chi} \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle \longrightarrow 0,$$

where  $\chi$  is defined by

$$\chi(t) = \bar{t}, \chi(\partial) = \sigma := \bar{\partial}, \chi(I) = \bar{I} = \bar{\partial}^{-1} = \sigma^{-1}, \chi(e) = 0. \quad (4)$$

We have  $\mathbb{I}_1 / \langle e \rangle \cong \mathbb{A}_1(\mathbb{k})_{\partial}$ , where  $\mathbb{A}_1(\mathbb{k})_{\partial}$  stands for the *localization* of  $\mathbb{A}_1(\mathbb{k})$  by the *left Ore set*  $\{\partial^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  [7, 27, 36].

**PROPOSITION 3.2** ([7]). *Let  $h = \partial t = t \partial + 1$  and  $H = \bar{h} \in \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$ . We have  $\mathbb{I}_1 / \langle e \rangle = \mathbb{B}_1(\mathbb{k}) := \mathbb{k}[H] \langle \sigma, \sigma^{-1} \mid \sigma^{\pm 1} H = (H \pm 1) \sigma^{\pm 1} \rangle$ , where  $\mathbb{B}_1(\mathbb{k})$  is a skew Laurent polynomial ring, also denoted by  $\mathbb{B}_1$ .*

**PROOF.** The identity  $\partial h = \partial(t \partial + 1) = t \partial^2 + 2 \partial = (t \partial + 1) \partial + \partial = h \partial + \partial = (h + 1) \partial$  yields  $\sigma H = (H + 1) \sigma$  in  $\mathbb{B}_1$ . Moreover,  $I h = I \partial t = (1 - e) t = t$  implies that  $\bar{t} = \sigma^{-1} H$  in  $\mathbb{B}_1$ . Finally,  $(h - 1) I = t \partial I = t$  shows that  $(H - 1) \sigma^{-1} = \bar{t} = \sigma^{-1} H$  in  $\mathbb{B}_1$ .  $\square$

We can prove a similar result using the *eulerian operator*  $t \partial$ .

**PROPOSITION 3.3.** *Let  $g = t \partial \in \mathbb{I}_1$  be the eulerian operator and  $G = \bar{g} = H - 1 \in \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$  with the notation of Proposition 3.2. Then, we have  $\mathbb{I}_1 / \langle e \rangle = \mathbb{B}_1 = \mathbb{k}[G] \langle \sigma, \sigma^{-1} \mid \sigma^{\pm 1} G = (G \pm 1) \sigma^{\pm 1} \rangle$ .*

**PROOF.** The identity  $\partial g = \partial(t \partial) = t \partial^2 + \partial = (t \partial) \partial + \partial = g \partial + \partial = (g + 1) \partial$  yields  $\sigma G = (G + 1) \sigma$  in  $\mathbb{B}_1$ . Moreover,  $I g = I t \partial = -I + t = -I + (t \partial) I = -I + g I = (g - 1) I$  shows that  $\sigma^{-1} G = (G - 1) \sigma^{-1}$  in  $\mathbb{B}_1$ . Finally,  $g = t \partial$  implies that  $G = \bar{t} \sigma$ , i.e.,  $\bar{t} = G \sigma^{-1}$  in  $\mathbb{B}_1$ .  $\square$

For more details on skew Laurent polynomial rings, see [27].

#### 3.2 Two important short exact sequences

This section generalizes some results of [7] obtained for scalar operators to the matrix operators. They will play important roles.

Let  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  and define the left  $\mathbb{I}_1$ -homomorphism

$$\begin{aligned} .R : \mathbb{I}_1^{1 \times q} &\longrightarrow \mathbb{I}_1^{1 \times p} \\ \lambda &\longrightarrow (.R)(\lambda) = \lambda R. \end{aligned}$$

The fact that  $\langle e \rangle$  is a left ideal of  $\mathbb{I}_1$  yields the left  $\mathbb{I}_1$ -homomorphism

$$\begin{aligned} .R : \langle e \rangle^{1 \times q} &\longrightarrow \langle e \rangle^{1 \times p} \\ \varepsilon &\longrightarrow (.R)(\varepsilon) = \varepsilon R. \end{aligned}$$

Combining these two left  $\mathbb{I}_1$ -homomorphisms, we obtain the following *commutative diagram with exact rows and columns* [37] of left  $\mathbb{I}_1$ -modules

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) \xrightarrow{\delta} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times q} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times q} & \longrightarrow & \mathbb{B}_1^{1 \times q} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow .R & & \downarrow .R & & \downarrow \bar{R} \\ 0 & \longrightarrow & \langle e \rangle^{1 \times p} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times p} & \longrightarrow & \mathbb{B}_1^{1 \times p} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \kappa & & \downarrow & & \downarrow \\ \xrightarrow{\delta} & \text{coker}_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) & \longrightarrow & \text{coker}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) & \longrightarrow 0, \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

where  $\bar{R} \in \mathbb{B}_1^{q \times p}$  is the matrix obtained by applying  $\chi$  defined by (4) to each entry of the matrix  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ ,

$$\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \left\{ \bar{\mu} \in \mathbb{B}_1^{1 \times q} \mid \mu \in \mathbb{I}_1^{1 \times q} : \mu R \in \langle e \rangle^{1 \times p} \right\},$$

and the connecting left  $\mathbb{I}_1$ -homomorphism  $\delta$  is defined by

$$\begin{aligned} \delta : \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) &\longrightarrow \operatorname{coker}_{\langle e \rangle}(.R) \\ \bar{\mu} &\longrightarrow \kappa(\mu R), \end{aligned}$$

and for all  $a \in \mathbb{I}_1$  and  $\bar{\mu} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$ ,  $a\delta(\bar{\mu}) = \delta(a\bar{\mu}) = \kappa(a\mu R)$ .

The *Snake lemma* (see, e.g., [37, Cor. 6.12]) yields the following long exact sequence of left  $\mathbb{I}_1$ -modules

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \ker_{\langle e \rangle}(.R) \longrightarrow \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) \longrightarrow \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) \\ &\xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}_{\langle e \rangle}(.R) \longrightarrow \operatorname{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) \longrightarrow \operatorname{coker}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Using the fact that  $\sigma^{-M}\sigma^M = 1$  in  $\mathbb{B}_1$ , we first obtain

$$\forall M \in \mathbb{N}, \quad \delta(\bar{\mu}) = \delta\left(\sigma^{-M}\sigma^M\bar{\mu}\right) = I^M\delta\left(\bar{\partial}^M\bar{\mu}\right) = I^M\kappa\left(\partial^M\mu R\right).$$

Moreover, for  $\bar{\mu} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$ , we have  $\mu R \in \langle e \rangle^{1 \times p}$ , and thus, there exists  $M \in \mathbb{N}$  such that  $\partial^M\mu R = 0$  (see Point (1) of Lemma 3.1), which implies that  $\delta(\bar{\mu}) = 0$  and shows that  $\delta = 0$ . As a consequence, the above long exact sequence yields the following two short exact sequences of left  $\mathbb{I}_1$ -modules

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \ker_{\langle e \rangle}(.R) \longrightarrow \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) \longrightarrow \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \operatorname{coker}_{\langle e \rangle}(.R) \longrightarrow \operatorname{coker}_{\mathbb{I}_1}(.R) \longrightarrow \operatorname{coker}_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

### 3.3 Horseshoe lemma

We state a more explicit formulation of the vanishing of  $\delta$ .

**LEMMA 3.4.** *Let  $\mu \in \mathbb{I}_1^{1 \times q}$  such that  $\bar{\mu} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$ . Then, there exists  $\nu \in \langle e \rangle^{1 \times q}$  such that  $\mu R = \nu R$ , which shows that*

$$\operatorname{im}_{\mathbb{I}_1}(\mu - \nu) = \mathbb{I}_1(\mu - \nu) \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R).$$

**PROOF.** If  $\bar{\mu} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$ , then  $\mu R \in \langle e \rangle^{1 \times p}$  and  $\delta(\bar{\mu}) = \kappa(\mu R) = 0$  implies that  $\mu R \in \ker_{\langle e \rangle}(\kappa) = \operatorname{im}_{\langle e \rangle}(.R)$  and thus there exists  $\nu \in \langle e \rangle^{1 \times q}$  satisfying  $\mu R = \nu R$ . We thus have  $(\mu - \nu)R = 0$ .  $\square$

**REMARK 2.** Lemma 3.4, which plays a key role in what follows, can be proved directly without using the homological algebra arguments leading to the fact that  $\delta = 0$ . Indeed if  $\bar{\mu} \in \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R})$ , then we have  $\mu R \in \langle e \rangle^{1 \times p}$  and thus, there is  $M \in \mathbb{N}$  such that  $\partial^M\mu R = 0$  (see Point (1) of Lemma 3.1). This implies  $I^M\partial^M\mu R = 0$  and using (3), we get  $(1 - T_{M-1})\mu R = 0$ . This proves that  $\nu = T_{M-1}\mu \in \langle e \rangle^{1 \times q}$  satisfies  $\mu R = \nu R$ .

*Gröbner basis methods* can be used in the skew Laurent polynomial ring  $\mathbb{B}_1$ . Hence, a matrix  $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  can be computed satisfying  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \operatorname{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$  (see, e.g., [5, 23, 24]). For implementations of this kernel computation, see SINGULAR subsystem PLURAL [24], the OREALGEBRAICANALYSIS package [14] built upon the MATHEMATICA package HOLONOMICFUNCTIONS [23], and the package CAPANDHOMALG (GAP) [3, 5].

The package OREMODULES [13] can also be used by first left or right multiplying  $\bar{R}$  by  $\sigma^N$  for a certain  $N \in \mathbb{N}$  so that the result belongs to the Ore algebra  $\mathbb{S} = \mathbb{k}[H]\langle \sigma \mid \sigma H = (H+1)\sigma \rangle$  and using the fact that  $\mathbb{B}_1$  is a *flat* left  $\mathbb{S}$ -module [27] because  $\mathbb{B}_1$  is the localization of  $\mathbb{S}$  by the *left Ore set*  $\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  (see [27, Section 2.1.5]). Similarly with  $\mathbb{T} = \mathbb{k}[H]\langle \tau \mid \tau H = (H-1)\tau \rangle$ , where  $\tau := \sigma^{-1}$ .

Let  $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  satisfy  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \operatorname{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$ . We have  $\bar{L}\bar{R} = 0$ , i.e.,  $LR \in \langle e \rangle^{r \times p}$ . Using Lemma 3.4, there exists  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  satisfying  $ER = LR$ . Note that from Remark 2, if  $\partial^M LR = 0$ , we can always choose  $E = T_{M-1}L$ . If we set  $L' := L - E$ , then we have

$$\operatorname{im}_{\mathbb{I}_1}(.L') = \mathbb{I}_1^{1 \times r} L' \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R). \quad (5)$$

*Example 3.5.* Consider  $R = (\partial \ I \ t \ e)^T \in \mathbb{I}_1^{4 \times 1}$ . Using (4),

$$\bar{R} = \left( \sigma \quad \sigma^{-1} \quad (H-1)\sigma^{-1} \quad 0 \right)^T \in \mathbb{B}_1^{4 \times 1},$$

and using an implementation for the kernel computation of matrices with entries in  $\mathbb{B}_1$ , we obtain  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \mathbb{B}_1^{1 \times 3} \bar{L}$ , where

$$L = \begin{pmatrix} I^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t\partial & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{L} = \begin{pmatrix} \sigma^{-2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & H-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We then have  $LR = (-te \ 0 \ 0 \ e)^T \in \langle e \rangle^{3 \times 1}$ . If we consider

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -te \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \in \langle e \rangle^{3 \times 4},$$

then  $ER = LR$ , which shows that  $\operatorname{im}_{\mathbb{I}_1}(.L') \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , where

$$L' := L - E = \begin{pmatrix} I^2 & -1 & 0 & te \\ 0 & t\partial & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-e \end{pmatrix}. \quad (6)$$

In general, the matrix  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  satisfying  $ER = LR$  is not unique because  $\ker_{\langle e \rangle}(.R) \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , i.e.,

$$\forall F \in \langle e \rangle^{r \times q} : FR = 0 \implies \operatorname{im}_{\mathbb{I}_1}(.L - (E + F)) \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R).$$

Therefore, we are led to study the set of the solutions  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  of the inhomogeneous linear integro-differential system

$$GR = LR \in \langle e \rangle^{r \times p}. \quad (7)$$

This set is formed by the sum of a particular solution  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  of  $GR = LR$  and matrices formed by  $r$  rows with entries in the left  $\mathbb{I}_1$ -module defined by a set of generators of  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$ .

In other words, using the language of homological algebra, let us suppose that  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  is a finitely generated left  $\mathbb{I}_1$ -module. Then, there exists  $M \in \langle e \rangle^{s \times q}$  satisfying  $\ker_{\langle e \rangle}(.R) = \operatorname{im}_{\mathbb{I}_1}(.M)$  and we have the commutative diagram of left  $\mathbb{I}_1$ -modules with exact rows and columns

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{I}_1^{1 \times s} & & \mathbb{I}_1^{1 \times r} & \xrightarrow{\chi^{\otimes r}} & \mathbb{B}_1^{1 \times r} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cdot M & & \downarrow \cdot (L-E) & & \downarrow \cdot \bar{L} & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\langle e \rangle}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{I}_1}(.R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

where  $\chi^{\otimes r} : \mathbb{I}_1^{1 \times r} \longrightarrow \mathbb{B}_1^{1 \times r}$  is the canonical morphism obtained by applying  $\chi$  defined by (4) to each entry of a row vector in  $\mathbb{I}_1^{1 \times r}$ .

The *Horseshoe lemma* (see, e.g., [37, Proposition 6.24]) then shows that we have the commutative diagram of left  $\mathbb{I}_1$ -modules with exact rows and columns

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times s} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times r} \oplus \mathbb{I}_1^{1 \times s} & \longrightarrow & \mathbb{I}_1^{1 \times r} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cdot M & & \downarrow \cdot \begin{pmatrix} L-E \\ M \end{pmatrix} & & \downarrow \cdot \bar{L} \circ \chi^{\otimes r} \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\langle e \rangle}(\cdot R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) & \longrightarrow & \ker_{\mathbb{B}_1}(\cdot \bar{R}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

As a consequence, we obtain

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R) = \mathbb{I}_1^{1 \times (r+s)} \begin{pmatrix} L-E \\ M \end{pmatrix} = \text{im}_{\mathbb{I}_1} \left( \cdot \begin{pmatrix} L-E \\ M \end{pmatrix} \right),$$

which proves that a set of generators of  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R)$  is obtained by concatenating a set of generators of  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$ , i.e., the homogeneous part of (7), and  $L' = L - E$ , where  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  is any particular solution of (7). Note that  $\langle e \rangle^{1 \times r} (L - E) \subseteq \ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$ . In Section 4, we shall show that we do not need to compute a finite set of generators of  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$  to obtain a set of generators of  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R)$  but only to consider a finite number of elements of  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$  that are not left  $\langle e \rangle$ -linear combinations of the rows of  $L'$ , i.e., that are not in  $\langle e \rangle^{1 \times r} (L - E)$ .

### 3.4 Polynomial solutions of integro-differential systems

The previous section shows that computing  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot R)$  is reduced to solving (7). Let us then study the solutions  $G \in \langle e \rangle^{r \times q}$  of the inhomogeneous linear system  $GR = U$ , where  $U \in \langle e \rangle^{r \times p}$  is fixed. To do that, we first write

$$U = \sum_{i=0}^m t^i e U_i(\partial), \quad G = \sum_{k=0}^n t^k e G_k(\partial), \quad U_m(\partial) \neq 0, \quad G_n(\partial) \neq 0,$$

$$\begin{cases} U_i(\partial) = \sum_{j=0}^{\alpha_i} U_{i,j} \partial^j, & U_{i,j} \in \mathbb{k}^{r \times p}, \quad j = 0, \dots, \alpha_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ G_k(\partial) = \sum_{l=0}^{\beta_k} G_{k,l} \partial^l, & G_{k,l} \in \mathbb{k}^{r \times q}, \quad l = 0, \dots, \beta_k, \quad k = 0, \dots, n. \end{cases}$$

*Definition 3.6.* If  $a(\partial) = \sum_{i=0}^d a_i \partial^i$  and  $b(t) = \sum_{i=0}^d b_i t^i$ , we note

- $\check{a}$  the element of  $\mathbb{k}[t]$  obtained by replacing  $\partial^i$  by  $\frac{t^i}{i!}$  in  $a(\partial)$ .
- $\hat{b}$  the element of  $\mathbb{k}[\partial]$  obtained by replacing  $t^i$  by  $i! \partial^i$  in  $b(t)$ .

The transforms  $\check{\cdot}$  and  $\hat{\cdot}$  apply to vectors/matrices component-wise.

Using the involution  $\theta$  of  $\mathbb{I}_1$  (see Definition 2.7), we have

$$GR = U \Leftrightarrow \theta(R) \theta(G) = \theta(U), \quad (8)$$

where  $\theta(G)$  and  $\theta(U)$  are defined by

$$\theta(G) = \sum_{k=0}^n G_k(I)^T e (\partial t \partial)^k = \sum_{k=0}^n G_k(I)^T e k! \partial^k = \sum_{k=0}^n \check{G}_k(t)^T e k! \partial^k,$$

because, using the identity  $Ie = te$ , we have

$$G_k(I)^T e = \sum_{l=0}^{\beta_k} G_{k,l}^T I^l e = \sum_{l=0}^{\beta_k} G_{k,l}^T \frac{t^l}{l!} e = \check{G}_k(t)^T e.$$

Similarly, we have  $\theta(U) = \sum_{i=0}^m \check{U}_i(t)^T e i! \partial^i$ . Therefore, (8) yields

$$\theta(R) \left( \sum_{k=0}^n \check{G}_k(t)^T e k! \partial^k \right) = \sum_{i=0}^m \check{U}_i(t)^T e i! \partial^i.$$

Using Lemma 2.5 and  $\theta(R) \left( \check{G}_k(t)^T \right) \in \mathbb{k}[t]^{p \times r}$ , the above equality is equivalent to the following equality of normal forms

$$\sum_{k=0}^n \theta(R) \left( \check{G}_k(t)^T \right) e k! \partial^k = \sum_{i=0}^m \check{U}_i(t)^T e i! \partial^i.$$

We thus obtain the following results

- (1) If  $m > n$ , then  $GR = U$  has no solution.
- (2) If  $m \leq n$ , then  $GR = U$  is equivalent to the linear system

$$\begin{cases} \theta(R) \left( \check{G}_k(t)^T \right) = \check{U}_k(t)^T, & k = 0, \dots, m, \\ \theta(R) \left( \check{G}_k(t)^T \right) = 0, & k = m + 1, \dots, n. \end{cases}$$

The existence of solutions of  $GR = U$  is then equivalent to the existence of polynomial solutions of the inhomogeneous linear integro-differential system of the form  $\theta(R)(v) = w$ , where  $\theta(R) \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$  and  $w \in \mathbb{k}[t]^{p \times r}$  are given and  $v \in \mathbb{k}[t]^{q \times r}$  is the unknown.

In the case of an operator, i.e.,  $p = q = 1$ , this problem is solved in [1, 31]. The general case is the subject of [17] and its implementation is done in the BAVULA package [18]. We summarize the main results of [17] in the following theorem.

**THEOREM 3.7** ([17]). *Let  $P \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$ ,  $P \notin \langle e \rangle^{p \times q}$  and  $w \in \mathbb{k}[t]^p$ . Let  $N \in \mathbb{N}$  be such that  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$  and  $\partial^N(w) = 0$ . We define matrices  $Q, P', M', P'', H$ , and  $T'$  with entries in  $\mathbb{A}_1$  such that*

- $\ker_{\mathbb{A}_1}(P_N \cdot) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q \cdot)$ ,  $Q \in \mathbb{A}_1^{q \times n}$ ,  $\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot Q) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot P')$ ,
- $\ker_{\mathbb{A}_1}(\cdot P') = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(\cdot M')$ ,  $P_N = P'' P'$ ,
- $H = (M'^T \quad P''^T)^T$ ,  $P' T' P' = P'$ .

The set of all the polynomial solutions  $v \in \mathbb{k}[t]^q$  of the inhomogeneous linear system  $P(v) = w$  is parametrized by

$$\{v = T'(u_g) + Q(s) \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1} : (T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)\},$$

where  $u_g$  is the general polynomial solution of the homogeneous homogeneous linear differential system defined by the matrix  $H$  and the  $\mathbb{k}$ -linear conditions  $(T_{N-1} P Q)(s) = w - (T_{N-1} P T')(u_g)$  on the parameter  $s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1}$  can be made explicit.

Note that all the matrices involved in Theorem 3.7 can be computed using OREMODULES [13] and  $u_g$  can be computed using INTEGRABLECONNECTIONS [2]. Moreover the case  $P \in \langle e \rangle^{p \times q}$  can be handled using simple linear algebra techniques [17].

Finally, let us note that the computation of  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  satisfying  $ER = LR$  corresponds to the computation of a particular polynomial solution of an inhomogeneous linear integro-differential system of the form  $P(v) = w$ , and the computation of  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot R)$  to the computation of all the polynomial solutions of the homogeneous linear system  $P(v) = 0$ .

*Example 3.8.* We consider again Example 3.5. Let us show how to compute a particular solution  $E \in \langle e \rangle^{3 \times 4}$  of the inhomogeneous system  $ER = U := LR \in \langle e \rangle^{3 \times 1}$ , where  $R = (\partial \quad I \quad t \quad e)^T$  and  $U = (-te \quad 0 \quad e)^T = eU_0 + teU_1$ , with  $U_0 = (0 \quad 0 \quad 1)^T$ ,  $U_1 = (-1 \quad 0 \quad 0)^T$ . We thus have  $\theta(R) = (I \quad \partial \quad \partial t \partial \quad e)$  and considering the ansatz  $E = eE_0(\partial) + teE_1(\partial) \in \langle e \rangle^{3 \times 4}$ , where  $E_0, E_1 \in \mathbb{k}[\partial]^{3 \times 4}$ , we get that  $\theta(R)\theta(E) = \theta(U)$  is equivalent to the search for a particular polynomial solution  $(\check{E}_0(t)^T, \check{E}_1(t)^T)$  of the

inhomogeneous linear system defined by  $\theta(R) \begin{pmatrix} \check{E}_i(t) \\ \check{v}(t) \end{pmatrix} = U_i^T$  for  $i = 0, 1$ . This problem is equivalent to  $(I \ \partial \ \partial t \ \partial \ e) v(t) = w$ , i.e.,

$$\int_0^t v_1(\tau) d\tau + \dot{v}_2(t) + t \dot{v}_3(t) + \dot{v}_3(t) + v_4(0) = w, \quad (9)$$

where  $w = 0$  or  $1$ . Note that the linear integro-differential system (9) is *underdetermined*. For  $w = 0$ ,  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$  provides a solution of (9) whereas, for  $w = 1$ , we can take  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$  and  $v_4 = 1$ . We thus find again the matrix  $E$  given in Example 3.5. Finally,  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  is related to the set of all the polynomial solutions of (9) with  $w = 0$ .

## 4 SYZGY MODULE COMPUTATION

### 4.1 Parametrization of $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$

In this section, we prove that a finite set of generators of  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  always exists and can be computed for any  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ .

Let  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  and let us see how the results developed earlier in this paper can be used to determine a finite set of generators of  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  obtained by completing the rows of the matrix  $L' = L - E$  in  $\mathbb{I}_1^{r \times q}$  (see Section 3.3) by a finite number of elements of  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  that are not left  $\langle e \rangle$ -combinations of the rows of  $L'$ , i.e., that are not in  $\langle e \rangle^{1 \times r} (L - E)$ .

**REMARK 3.** Using Remark 1, the case of  $R \notin \langle e \rangle^{(m+n) \times 1}$  corresponds to the characterization of  $I \cap \mathcal{J}$ , where  $I = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_1 f_i$  and  $\mathcal{J} = \sum_{j=1}^m \mathbb{I}_1 g_j$  are not both included in  $\langle e \rangle$  (see Theorem 2.11). The case  $R \in \langle e \rangle^{(m+n) \times 1}$ , considered in [16], corresponds to  $I, \mathcal{J} \subset \langle e \rangle$ . If  $r \notin \langle e \rangle$  (resp.,  $r \in \langle e \rangle$ ), an effective characterization the left ideal  $\text{ann}_{\mathbb{I}_1}(.r) = \ker_{\mathbb{I}_1}(.r)$  is obtained in [31] (resp., [15]). We shall see that, for  $R \notin \langle e \rangle^{(m+n) \times 1}$ , the approach developed below generalizes the approach developed in [31] for  $r \notin \langle e \rangle$ .

**PROPOSITION 4.1.** *Let  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$  and consider the following data:*

- $\bar{R} \in \mathbb{B}_1^{q \times p}$ , the matrix whose entries are the residue classes of the entries of  $R$  in  $\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}_1 / \langle e \rangle$ ,
- $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  such that  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$ ,
- $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  satisfying  $ER = LR \in \langle e \rangle^{r \times p}$ ,
- $P = \theta(R) \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$ ,
- The least  $N \in \mathbb{N}$  such that  $P_N := \partial^N P \in \mathbb{A}_1^{p \times q}$  (Point (2) of Lemma 3.1),
- $Q \in \mathbb{A}_1^{q \times n}$  such that  $\ker_{\mathbb{A}_1}(P_N \cdot) = \text{im}_{\mathbb{A}_1}(Q \cdot)$ .

Then, there exist  $G \in \mathbb{I}_1^{n \times r}$  and  $F \in \langle e \rangle^{n \times q}$  satisfying the identity

$$\theta(Q) = G(L - E) + F. \quad (10)$$

**PROOF.** We have  $P_N Q = 0$ , i.e.,  $\partial^N \theta(R) Q = 0$ , which, by application of the involution  $\theta$ , is equivalent to  $\theta(Q) R^N = 0$ . Thus, in  $\mathbb{B}_1$ , we have  $\overline{\theta(Q)} \bar{R} \sigma^{-N} = 0$ , i.e.,  $\overline{\theta(Q)} \bar{R} = 0$  because  $\sigma^{-N}$  is invertible there. This shows that  $\text{im}_{\mathbb{B}_1}(\overline{\theta(Q)}) \subseteq \ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$ , and thus, there exists  $G \in \mathbb{I}_1^{n \times r}$  satisfying  $\overline{\theta(Q)} = \bar{G} \bar{L}$ . Hence, there exists  $E' \in \langle e \rangle^{n \times q}$  such that  $\theta(Q) = GL + E'$ , and thus, we have  $\theta(Q) = G(L - E) + F$ , where  $F = E' + GE \in \langle e \rangle^{n \times q}$ .  $\square$

We now state the main result of this section.

**THEOREM 4.2.** *Let  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . With the previous notation, we have*

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1^{1 \times r} (L - E) + \sum_{i=1}^d \mathbb{I}_1 M_i = \mathbb{I}_1^{1 \times (r+d q)} \begin{pmatrix} L - E \\ M_1 \\ \vdots \\ M_d \end{pmatrix},$$

where  $\{M_i\}_{i=1, \dots, d}$  is a finite basis of the finite-dimensional  $\mathbb{k}$ -vector space

$$\mathcal{E} = \{e \widehat{u}_g(\partial)^T \theta(T') + e \widehat{s}(\partial)^T F \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1} : (T_{N-1} P Q)(s) = -(T_{N-1} P T')(u_g)\}. \quad (11)$$

**PROOF.** As explained in Section 3.4, the computation of  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  is related to the computation of  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R))$ . Applying Theorem 3.7 to  $P = \theta(R) \in \mathbb{I}_1^{p \times q}$  and  $w = 0$ , we have

$$\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R)) = \{v = T'(u_g) + Q(s) \mid s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1} : (T_{N-1} P Q)(s) = -(T_{N-1} P T')(u_g)\}. \quad (12)$$

Let us now characterize  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$ . Using Lemma 2.5 and (2) of Definition 3.6, we have

$$\begin{aligned} \theta(v e) &= \theta(T'(u_g(t)) e + Q(s(t)) e) \\ &= \theta(T' u_g(t) e + Q s(t) e) \\ &= e u_g(\partial t \partial)^T \theta(T') + e s(\partial t \partial)^T \theta(Q) \\ &= e \widehat{u}_g(\partial)^T \theta(T') + e \widehat{s}(\partial)^T \theta(Q), \end{aligned}$$

for all  $s \in \mathbb{k}[t]^{n \times 1}$  satisfying  $(T_{N-1} P Q)(s) = -(T_{N-1} P T')(u_g)$ . Now, by Proposition 4.1, there exist  $G$  and  $F$  such that we have  $\theta(Q) = G(L - E) + F$  and thus

$$\theta(v e) = e \widehat{u}_g(\partial)^T \theta(T') + e \widehat{s}(\partial)^T F + e \widehat{s}(\partial)^T G(L - E). \quad (13)$$

From (5), we have  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(. (L - E)) \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ . Hence, from (13), to compute a finite set of generators for  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , we only have to consider elements of  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$  which generate  $\mathcal{E}$  (see Section 3.4). It remains to prove that  $\mathcal{E}$  is a finite-dimensional  $\mathbb{k}$ -vector space. First  $u_g$  is the general polynomial solution of a holonomic linear differential system (see [17]) and therefore lies in a finite-dimensional  $\mathbb{k}$ -vector space. Second, there exists  $\ell \geq 0$  such that  $\partial^\ell F = 0$  because  $F \in \langle e \rangle^{n \times q}$  (see (1) of Lemma 3.1) which provides a bound on the needed degree of the polynomial vector  $s$ . This ends the proof.  $\square$

### 4.2 Algorithm and examples

We combine the results obtained in Sections 3.3 and 4.1 to provide Algorithm 1 below for calculating a finite set of generators of the syzygy module  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  for a given matrix  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ .

We have implemented this algorithm in a MAPLE package called BAVULA [7]. As already mentioned, it is based on the packages INTDIFFOP [22] for calculations in  $\mathbb{I}_1$ , OREMODULES [13] for calculations in  $\mathbb{A}_1$  and  $\mathbb{B}_1$ , and INTEGRABLECONNECTIONS [2] for calculating polynomial solutions of a connection. Steps 1 and 3 can be performed using the implementation of the algorithm developed in [17] (see Section 3.4).

**Example 4.3.** We continue Example 3.5 in which we proved that  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(.L') \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ , where  $L' = L - E$  is defined by (6). Let us now study  $\ker_{\langle e \rangle}(.R)$ . To do that, we have to characterize  $\ker_{\mathbb{k}[t]}(\theta(R))$ ,

**Algorithm 1** Finite set of generators of  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot, R)$  for  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$

**Require:**  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$

- 1- Compute the parametrization (12) of  $\ker_{\mathbb{K}[t]}(\theta(R))$
- 2- Compute  $L \in \mathbb{I}_1^{r \times q}$  such that  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \text{im}_{\mathbb{B}_1}(\bar{L})$
- 3- Compute  $E \in \langle e \rangle^{r \times q}$  such that  $ER = LR$
- 4- Compute  $G \in \mathbb{I}_1^{n \times r}$  such that  $\overline{\theta(Q)} = \bar{G}\bar{L}$
- 5- Compute  $F = \theta(Q) - G(L - E)$
- 6- Compute a basis  $\{M_i\}_{i=1, \dots, d}$  of (11)
- 7- **return**  $\left( (L - E)^T \quad M_1^T \quad \dots \quad M_d^T \right)^T$

where  $P = \theta(R) = \begin{pmatrix} I & \partial & \partial t \partial & e \end{pmatrix} \notin \mathbb{A}_1^{1 \times 4}$ . Thus, let us consider  $P_1 = \partial \theta(R) = \begin{pmatrix} 1 & \partial^2 & \partial^2 t \partial & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_1^{1 \times 4}$ . The polynomial solutions of  $P_1(v) = 0$  are then defined by

$$\forall s \in \mathbb{K}[t]^{3 \times 1}, \quad v(t) = Q(s(t)), \quad Q = \begin{pmatrix} -\partial^2 & -\partial^2 t \partial & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore, the polynomial solutions of  $\theta(R)(v) = 0$  are defined by  $v(t) = Q(s(t))$ , where  $s \in \mathbb{K}[t]^{3 \times 1}$  satisfies

$$(e \theta(R))(v(t)) = ((0 \quad e \partial \quad e \partial \quad e) Q)(s(t)) = \dot{s}_1(0) + \dot{s}_2(0) + s_3(0) = 0.$$

Then,  $\theta(v(t)e) = \theta(Q(s)e) = \theta(Qs)e = e \widehat{s}(\partial)^T \theta(Q)$ , where

$$\theta(Q) = \begin{pmatrix} -I^2 & 1 & 0 & 0 \\ -tI & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Furthermore, we have the identity  $\theta(Q) = GL' + F$ , where

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -t\partial & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & te \\ 0 & 0 & 0 & te \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

which yields  $\theta(v(t)e) = e \widehat{s}(\partial)^T \theta(Q) = e \widehat{s}(\partial)^T (GL' + F)$ .

Using  $\mathbb{I}_1^{1 \times 3} L' \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot, R)$  and  $\widehat{s}(\partial)^T = (\widehat{s}_1(\partial) \quad \widehat{s}_2(\partial) \quad \widehat{s}_3(\partial))$ , where

$$\begin{cases} \widehat{s}_1(\partial) = s_1(0) + \dot{s}_1(0)t + r_1(t)t^2, \\ \widehat{s}_2(\partial) = s_2(0) + \dot{s}_2(0)t + r_2(t)t^2, \\ \widehat{s}_3(\partial) = -(\dot{s}_1(0) + \dot{s}_2(0)) + r_3(t)t, \end{cases}$$

for all  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{K}[t]$ , and thus, if  $r_i(t) = \sum_{j=0}^{d_i} r_{i,j} t^j$ , for  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{cases} \widehat{s}_1(\partial) = s_1(0) + \dot{s}_1(0)\partial + \sum_{j=0}^{d_1} (j+2)! r_{1,j} \partial^{j+2}, \\ \widehat{s}_2(\partial) = s_2(0) + \dot{s}_2(0)\partial + \sum_{j=0}^{d_2} (j+2)! r_{2,j} \partial^{j+2}, \\ \widehat{s}_3(\partial) = -(\dot{s}_1(0) + \dot{s}_2(0)) + \sum_{j=0}^{d_3} (j+1)! r_{3,j} \partial^{j+1}, \end{cases}$$

we can only consider the term

$$e \widehat{s}(\partial)^T F = (0 \quad 0 \quad 0 \quad e(\widehat{s}_1(\partial) + \widehat{s}_2(\partial))te + e \widehat{s}_3(\partial)e) = 0,$$

which proves that  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot, R) = \mathbb{I}_1^{1 \times 3} L'$ .

*Example 4.4.* Let us compute the compatibility conditions of the inhomogeneous integral linear system

$$\begin{cases} t u_1(t) + \int_0^t u_2(\tau) d\tau = w_1(t), \\ t u_1(t) + \int_0^t (u_2(\tau) - \tau u_1(\tau)) d\tau = w_2(t). \end{cases} \quad (14)$$

To do that, let us compute  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot, R)$ , where

$$R = \begin{pmatrix} t & I \\ t - It & I \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_1^{2 \times 2}.$$

We have

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} (H-1)\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \\ (H-1)\sigma^{-1} - (H-2)\sigma^{-2} & \sigma^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{B}_1^{2 \times 2},$$

$\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = 0$ , and thus,  $\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot, R) = \ker_{\langle e \rangle}(\cdot, R)$ . Let us characterize  $\ker_{\langle e \rangle}(\cdot, R)$  by means of  $\ker_{\mathbb{K}[t]}(\theta(R))$ , where  $\theta(R)$  is defined by

$$\theta(R) = \begin{pmatrix} \partial t \partial & \partial t \partial - \partial t \partial^2 \\ \partial & \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\partial + 1 & (t\partial + 1)(1 - \partial) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial.$$

Note that  $P = \theta(R) \in \mathbb{A}_1^{2 \times 2}$  and  $\mathcal{P} = \mathbb{A}_1^{1 \times 2} / (\mathbb{A}_1^{1 \times 2} P)$  is a torsion left  $\mathbb{A}_1$ -module, and thus, holonomic. Let us compute a basis of the finite-dimensional  $\mathbb{K}$ -vector space  $\ker_{\mathbb{K}[t]}(\theta(R))$ . Setting  $y(t) = \dot{v}(t)$ ,  $\theta(R)(v(t)) = 0$  then yields

$$\begin{pmatrix} t\partial + 1 & (t\partial + 1)(1 - \partial) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (y(t)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_2(t) = -y_1(t), \\ (t\partial + 1)\dot{y}_1(t) = 0. \end{cases}$$

Note that  $(t\partial + 1)(t^n) = (n+1)t^n$  and the indicial equation  $n+1$  of  $t\partial + 1$  has no solutions  $n$  in  $\mathbb{N}$ . Thus, the ordinary differential equation  $(t\partial + 1)(z(t)) = 0$  has only 0 as polynomial solution, which yields  $\dot{y}_1(t) = 0$ , i.e.,  $y_1(t) = c \in \mathbb{K}$ , and thus,  $y_2(t) = -c$  and  $v(t) = (ct + d \quad -ct + f)^T$  for all  $d, f \in \mathbb{K}$ . Then, we have

$$\begin{aligned} \theta(v(t)e) &= \theta \left( \begin{pmatrix} ct + d \\ -ct + f \end{pmatrix} e \right) = e(c\partial t \partial + d \quad -c\partial t \partial + f) \\ &= e(c\partial + d \quad -c\partial + f) = ce(\partial \quad -\partial) + de(1 \quad 0) + fe(0 \quad 1), \end{aligned}$$

which finally shows that

$$\ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot, R) = \mathbb{I}_1^{1 \times 3} \begin{pmatrix} e\partial & -e\partial \\ e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

System (14) then has the following compatibility conditions:

$$\dot{w}_1(0) - \dot{w}_2(0) = 0, \quad w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 0.$$

Finally, we give a few remarks about the case  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ . We first note that  $\bar{R} = 0$ , and thus,  $\ker_{\mathbb{B}_1}(\bar{R}) = \mathbb{B}_1^{1 \times q}$ , i.e., we can take  $\bar{L} = I_q$  and  $L = I_q$ . Using (1) of Lemma 3.1, let  $M \in \mathbb{N}$  be such that  $\partial^M R = 0$  and using the identity  $1 = I^M \partial^M + T_{M-1}$  (see Lemma 2.4), we obtain  $R = T_{M-1} R$ , which shows that we can take  $E = T_{M-1} I_q$ , and thus,  $\text{im}_{\mathbb{I}_1}(\cdot, (L - E)) \subseteq \ker_{\mathbb{I}_1}(\cdot, R)$ , where  $L - E = (1 - T_{M-1}) I_q$ . Now,  $P = \theta(R) \in \langle e \rangle^{p \times q}$ , and thus, by (1) of Lemma 3.1, there exists  $N \in \mathbb{N}$  such that  $P_N = \partial^N \theta(R) = 0$ , and thus,  $P = T_{N-1} P$ . Thus, we can take  $Q = I_q$  in Theorem 3.7 and  $H = 0$  so that

$$\ker_{\mathbb{K}[t]}(P) = \{v = s \mid s \in \mathbb{K}[t]^{q \times 1} : P(s) = 0\}.$$

Furthermore, we have the identity  $\theta(Q) = I_q = L - E + T_{M-1} I_q$ , which shows that we can take  $F = E = T_{M-1} I_q$ . Hence, (11) yields

$$\mathcal{E} = \{e \widehat{s}(\partial) T_{M-1} I_q \mid s \in \mathbb{k}[t]^{q \times 1} : P(s) = 0\}.$$

Extracting a finite basis  $\{M_i\}_{i=1, \dots, m}$  of the  $\mathbb{k}$ -vector space  $\mathcal{E}$ , we obtain  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \left( ((1 - T_{M-1}) I_q)^T \quad M_1^T \quad \dots \quad M_m^T \right)^T$ . Note that [16, Theorems 3.2 and 3.7] provides another algorithm for computing  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  with  $R \in \langle e \rangle^{q \times p}$ .

*Example 4.5.* We consider [16, Examples 3.5 and 3.8], namely,  $R = t e + t e \partial \in \langle e \rangle$ . We have  $M = 2$  so that  $1 - T_1 = 1 - e - t e \partial \in \ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$ . Now,  $\theta(R) = e \partial + I e \partial = e \partial + t e \partial$ . The polynomial solutions of  $\theta(R)$  are defined by  $(1 + t) \dot{p}(0) = 0$ , i.e.,  $\dot{p}(0) = 0$ , which yields  $p(t) = p_0 + t^2 r(t)$  for all  $p_0 \in \mathbb{k}$ ,  $r(t) = \sum_{j=0}^d r_j t^j \in \mathbb{k}[t]$ , and

$$\mathcal{E} = \{e(p_0 + \sum_{j=0}^d (j+2)! r_j \partial^{j+2}) T_1 \mid p_0, r_j \in \mathbb{k}\} = \{e p_0 \mid p_0 \in \mathbb{k}\}.$$

We obtain  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1(1 - e - t e \partial) + \mathbb{I}_1 e$ . In [16, Example 3.8], it is proved that  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R) = \mathbb{I}_1(1 - t \partial) + \mathbb{I}_1 \partial^2$ , which is correct since

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - t \partial \\ \partial^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t \partial & e \\ \partial^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e - t e \partial \\ e \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 - e - t e \partial \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I^2 \\ e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - t \partial \\ \partial^2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

## 5 CONCLUSION

In this paper, we have provided an algorithmic proof of the coherence of  $\mathbb{I}_1$  by giving an algorithm for computing a finite set of generators of the syzygy module  $\ker_{\mathbb{I}_1}(.R)$  for a given matrix  $R \in \mathbb{I}_1^{q \times p}$ . In [19], we prove that  $\mathbb{I}_1$  is an *effective Cramer ring* in the sense that any linear system of the form  $AX = Y$  or  $XA = Y$ , where  $A$  and  $Y$  are two fixed rectangular matrices with entries in  $\mathbb{I}_1$ , can be solved effectively and, if a solution exists, all solution matrices  $X$  with entries in  $\mathbb{I}_1$  can be explicitly parameterized. This property is also called *computable ring* in [4]. The corresponding algorithm is implemented in the BAVULA package. The algorithmic proofs of the coherence, the Cramer property of  $\mathbb{I}_1$ , and their implementation in the BAVULA package allow us to develop an algorithmic elimination theory and an effective algebraic analysis approach – using effective homological algebra [4] – for linear systems of polynomial ordinary integro-differential equations with separable kernels.

## REFERENCES

- [1] M. Barkatou, T. Cluzeau. *On polynomial solutions of linear integro-differential equations*. Proceedings of the 8th IFAC Symposium on System Structure and Control, Montreal, Canada, 2022.
- [2] M. Barkatou, T. Cluzeau, C. El Bacha, J.-A. Weil. *Computing closed-form solutions of integrable connections*. Proceedings of ISSAC'12, 43-50, 2012.
- [3] M. Barakat, M. Lange-Hegermann. <https://github.com/homalg-project/CapAndHomalg.jl>
- [4] M. Barakat, M. Lange-Hegermann. *An axiomatic setup for algorithmic homological algebra and an alternative approach to localization*. J. Algebra Appl., 10(2), 269-293, 2011.
- [5] M. Barakat, R. Brüser, C. Fieker, T. Huber, J. Piclum. *Feynman integral reduction using Gröbner bases*. Journal of High Energy Physics volume, 168, 2023.
- [6] V. V. Bavula. *The algebra of integro-differential operators on a polynomial algebra*. J. London Math. Soc., 83(2), 517-543, 2011.
- [7] V. V. Bavula. *The algebra of integro-differential operators on an affine line and its modules*. Journal of Pure and Applied Algebra, 217(3), 495-529, 2013.

- [8] F. Boulier, F. Lemaire, M. Rosenkranz, R. Ushirobira, N. Verdière. *On symbolic approaches to integro-differential equations*. Algebraic and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems, 9, Springer, 161-182, 2020.
- [9] A. Borel. *Algebraic D-modules*. Perspectives in Mathematics, vol. 2, Academic Press, 1987.
- [10] M. Chartouny, T. Cluzeau, A. Quadrat. *Algorithmic study of the algebraic parameter estimation problem for a class of perturbations*. Maple Transactions, 3(1), 2023.
- [11] F. Chyzak. *Gröbner bases, symbolic summation and symbolic integration*. Gröbner Bases and Applications, London Mathematical Society Lecture Note Series vol. 251, 32-60, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [12] F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz. *Effective algorithms for parametrizing linear control systems over Ore algebras*. Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput., 16, 319-376, 2005.
- [13] F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz. *OreModules: A symbolic package for the study of multidimensional linear systems*. Applications of Time-Delay Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 352, Springer, 233-264, 2007, <https://who.rocq.inria.fr/Alban.Quadrat/OreModules.html>.
- [14] T. Cluzeau, C. Koutschan, A. Quadrat, M. Tönso. *Effective algebraic analysis approach to linear systems over Ore algebras*. In Algebraic Methods and Symbolic-Numeric Computation in Systems Theory, Advances in Delays and Dynamics (ADD), volume 9, Springer, 4-52, 2020, <https://who.rocq.inria.fr/Alban.Quadrat/OreAlgebraicAnalysis/index.html>.
- [15] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. *Further results on the computation of the annihilator of integro-differential operator*. Proceedings of ISSAC'23, 182-190, 2023.
- [16] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. *Effective characterization of evaluation ideals of the ring of integro-differential operators*. Proceedings of ISSAC'24, 117-125, 2024.
- [17] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. *Polynomial solutions for general linear polynomial ordinary integro-differential systems*. Proceedings of ISSAC'25, 2025.
- [18] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. BAVULA. *A symbolic package for linear ordinary polynomial integro-differential systems*. Freely available on the authors' web pages.
- [19] T. Cluzeau, C. Pinto, A. Quadrat. *The effective Cramer property of the ring of polynomial ordinary linear integro-differential operators*. In preparation, 2025.
- [20] N. Jacobson. *Some remarks on one-sided inverses*. Proceedings of the American Mathematical Society, 1(3), 352-355, 1950.
- [21] M. Kashiwara, T. Kawai, T. Kimura. *Foundations of Algebraic Analysis*. Princeton University Press, 1986.
- [22] A. Korporal, G. Regensburger, M. Rosenkranz. *Symbolic computation for ordinary boundary problems in Maple*. ACM Communications in Computer Algebra, 44 (3/4): 120-122, 2011.
- [23] C. Koutschan. *Advanced applications of the holonomic systems approach*. Ph.D. thesis, Johannes Kepler University, 2009. <http://www3.risc.jku.at/research/combinat/software/ergosum/RISC/HolonomicFunctions.html> (HolonomicFunctions).
- [24] V. Levandovskyy, H. Schönemann. *PLURAL—a Computer Algebra System for Noncommutative Polynomial Algebras*. Proceedings of ISSAC'03, 176-183, 2003.
- [25] F. Lemaire, L. Roussel. *Parameter estimation using integral equations*. Maple Transactions, 4(1): 1-15, 2024.
- [26] F. Lemaire, L. Roussel. *Contribution to integral elimination*. Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2024. Lecture Notes in Computer Science, vol 14938. Springer, 215-235, 2024.
- [27] J. C. McConnell, J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society, 2000.
- [28] D. Przeworska-Rolewicz, H. von Trotha. *Right Inverses in D-R Algebras with Unit*. Journal of Integral Equations, no. 3, 245-259, 1981.
- [29] A. Quadrat. *The fractional representation approach to synthesis problems: an algebraic analysis viewpoint. Part I: (weakly) doubly coprime factorizations*. SIAM J. Control & Optimization, 42(1), 266-299, 2003.
- [30] A. Quadrat. *An introduction to constructive algebraic analysis and its applications*. Les cours du CIRM, Journées Nationales de Calcul Formel, 281-471, 2010.
- [31] A. Quadrat, G. Regensburger. *Computing polynomial solutions and annihilators of integro-differential operators with polynomial coefficients*. Algebraic Methods and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems, Advances in Delays and Dynamics, 9, 87-114, 2020.
- [32] G. Regensburger, M. Rosenkranz. *An algebraic foundation for factoring linear boundary problems*. Annali di Matematica 188, 123-151, 2009.
- [33] M. Rosenkranz. *A new symbolic method for solving linear two-point boundary value problems on the level of operators*. J. Symbolic Comput., 39(2), 171-199, 2005.
- [34] M. Rosenkranz, G. Regensburger. *Solving and factoring boundary problems for linear ordinary differential equations in differential algebras*. J. Symbolic Comput., 43(8), 515-544, 2008.
- [35] M. Rosenkranz, G. Regensburger. *Integro-Differential Polynomials and Operators*. Proceedings of ISSAC'08, 261-268, 2008.
- [36] G. Regensburger, M. Rosenkranz, J. Middeke. *A skew polynomial approach to integro-differential operators*. Proceedings of ISSAC'09, 287-294, 2009.
- [37] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, 2<sup>nd</sup> edition, 2009.
- [38] B. Stenström. *Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory*. Springer, 1975.

# Bibliographie

- [1] I. H. Abdel-Halim Hassan. Application to differential transformation method for solving systems of differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 162(1) : 351–358, 2005.
- [2] A. Altürk and T. Coşgun. On Fredholm integral equations with separable kernels. *Proceedings of the 4th International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference (IFSCOM2017)*, 2017.
- [3] G. Arfken, H. Weber, and F. Harris. Mathematical methods for physicists. *Academic Press*, 2012. 7th edition.
- [4] A. Arikoglu and I. Ozkol. Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, 181(2) : 1537–1549, 2006.
- [5] A. Arikoglu and I. Ozkol. Solutions of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(2) : 2411–2417, 2008.
- [6] T. Bächler, M. Gerdt, V. and Lange-Hegermann, and D. Robertz. Algorithmic Thomas decomposition of algebraic and differential systems. *Journal of Symbolic Computation*, 47(10) : 1233–1266, 2012.
- [7] M. Barakat, R. Brüser, C. Fieker, T. Huber, and J. Piclum. Feynman integral reduction using Gröbner bases. *Journal of High Energy Physics*, 168, 2023.
- [8] M. Barakat and M. Lange-Hegermann. An axiomatic setup for algorithmic homological algebra and an alternative approach to localization. *Journal of Algebra and Its Applications*, 10(2) : 269–293, 2011.
- [9] M. Barakat and D. Robertz. `homa1g` – A meta-package for homological algebra. *Journal of Algebra and its Applications*, 7(3) : 299–317, 2008.
- [10] M. Barkatou and T. Cluzeau. On polynomial solutions of linear integro-differential equations. *Proceedings of the 8th IFAC Symposium on System Structure and Control*, 55(34) : 7–12, 2022.
- [11] M. Barkatou and T. Cluzeau. On the computation of rational solutions of linear integro-differential equations with polynomial coefficients. *Journal of Symbolic Computation*, 121, 2024.
- [12] M. Barkatou, T. Cluzeau, C. El Bacha, and J. A. Weil. Computing closed-form solutions of integrable connections. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pages 43–50, 2012.
- [13] M.A. Barkatou. On rational solutions of systems of linear differential equations. *Journal of Symbolic Computation*, 28 : 547–567, 1999.
- [14] V. V. Bavula. Generalized Weyl algebras and their representations. *Algebra i Analiz*, 4(1) : 75–97, 1992.
- [15] V. V. Bavula. The Jacobian conjecture and nilpotency of the Jacobian derivation. *International Journal of Mathematics*, 16(10) : 1151–1170, 2005.
- [16] V. V. Bavula. The algebra of integro-differential operators on an affine line and its modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 217(3) : 495–529, 2013.
- [17] V. V. Bavula. The algebra of polynomial integro-differential operators is a holonomic bimodule over the subalgebra of polynomial differential operators. *Algebras and Representation Theory*, 17 : 275–288, 2014.
- [18] V. V. Bavula. The global dimension of the algebras of polynomial integro-differential operators  $\mathbb{I}_n$  and the Jacobian algebras  $\mathbb{A}_n$ . *Journal of Algebra and Its Applications*, 19(02) : 2050030, 2020.

- [19] V. V. Bavula. General theory of localizations of rings and modules. *Journal of Algebra*, 677 : 745–797, 2025.
- [20] G. E. Baxter. On operator identity. *Pacific Journal of Mathematics*, 8(3) : 649–663, 1958.
- [21] T. Becker, V. Weispfenning, and H. Kredel. Gröbner bases : A computational approach to commutative algebra. *Graduate Texts in Mathematics*, 141, 1993.
- [22] S. H. Behiry and S. I. Mohamed. Solving high-order nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations by differential transform method. *Applied Mathematics*, 3(7) : 741–748, 2012.
- [23] J. Biazar, E. Babolian, and R. Islam. Solution of a system of Volterra integral equations of the first kind by adomian method. *Applied Mathematics and Computation*, 139(2–3) : 249–258, 2003.
- [24] J. Biazar, H. Ghazvini, and M. Eslami. He’s homotopy perturbation method for systems of integro-differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39(3) : 1253–1258.
- [25] A. Borel. Algebraic D-modules. *Perspectives in Mathematics. Academic Press.*, 2, 1987.
- [26] F. Boulier. BLINEIDE. *Bibliothèques Lilloises dédiées à l’Intégration Numérique des Équations Intégro-Différentielles*. <https://pro.univ-lille.fr/francois-boulier/logiciels/blineide>.
- [27] F. Boulier. DifferentialAlgebra. 2023. <https://hal.science/hal-04391259>.
- [28] F. Boulier, H. Castel, N. Corson, V. Lanza, A. Lemaire, F. Poteaux, A. Quadrat, and N. Verdière. Symbolic-numeric methods for nonlinear integro-differential modeling. *CASC 2018 - The 20th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing*, 2018.
- [29] F. Boulier, S. Falkensteiner, M. P. Noordman, and O. L. Sanchez. On the relationship between differential algebra and tropical differential algebraic geometry. *Proceedings of Computer Algebra in Scientific Computing (CASC)*, pages 62–77, 2021.
- [30] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, and M. Petitot. Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 20(1) : 73–121, 2009.
- [31] F. Boulier and F. Lemaire. On formal power series solutions of regular differential chains. *Proceedings of Computer Algebra in Scientific Computing (CASC)*, 14938 : 82–99, 2024.
- [32] F. Boulier, F. Lemaire, M. Rosenkranz, R. Ushirobira, and N. Verdière. On symbolic approaches to integro-differential equations. *Algebraic and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems*, 9 : 161–182, 2020.
- [33] J. M. Bownds. On an initial-value method for quickly solving Volterra integral equations : A review. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 24(1), January 1978.
- [34] M. Brodmann. A short course on Weyl algebras and D-modules. *Notes de cours*, 2015.
- [35] H. Brunner. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations. *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, 15, 2004.
- [36] G. Bruno. From integrodifferential models to data-oriented approaches for emergent phenomena. *European Journal of Applied Mathematics*, 2024.
- [37] R. Bryant, S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt, and P. Griffiths. Exterior differential systems. *Springer*, 1991.
- [38] B. Buchberger. An algorithm for finding the basis elements in the residue class ring of a zero-dimensional polynomial ideal. *PhD Thesis of the University of Innsbruck*, 1965.
- [39] B. Buchberger. Gröbner bases : An algorithmic method in polynomial ideal theory. *Recent Trends in Multi-dimensional Systems Theory*, 1985.
- [40] M. V. Bulatov. Integro-differential systems with a degenerate matrix multiplying the derivative. *Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Division of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia*, 2001.

- [41] M. V. Bulatov and E. V. Chistyakova. Numerical solution of integro-differential systems with a degenerate matrix multiplying the derivative by multistep methods. *Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia*, 2005.
- [42] M. V. Bulatov and E. V. Chistyakova. On a family of singular integro-differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 51(9) : 1460–1472, 2011.
- [43] M. V. Bulatov, M. Hadizadeh, and E. V. Chistyakova. Construction of implicit multistep methods for solving integral algebraic equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 15(3) : 310–322, 2019.
- [44] M. V. Bulatov, P. M. Lima, and E. B. Weinmüller. Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations. *Central European Journal of Mathematics*, 12(2) : 308–321, 2014.
- [45] M. V. Bulatov and D. T. Thanh. Multistep method for solving degenerate integral-differential equations. *Mathematical Modelling and Programming*, 14(3) : 54–65, 2014.
- [46] M. V. Bulatova and P. M. Lima. Two-dimensional integral–algebraic systems : Analysis and computational methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- [47] M. V. Bulatova and M. N. Machkhinab. Features of behavior of numerical methods for solving Volterra integral equations of the second kind. *Institute of System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia, and East Siberian State Academy of Education, Irkutsk, Russia*, 2013.
- [48] A. Cardone, D. Conte, R. D’Ambrosio, and B. Paternoster. Collocation methods for Volterra integral and integro-differential equations : A review. *Mathematics*, 6(7) : 118, 2018.
- [49] F. J. Castro-Jiménez. Théorème de division pour les opérateurs différentiels et calcul des multiplicités. 1984.
- [50] M. Chartouny. Algorithmic study of the algebraic parameter estimation problem. Master’s thesis, Versailles University (UVSQ), Mathematics Department, Saint-Quentin-en-Yvelines, France, 2021.
- [51] C. Chenavier, T. Cluzeau, and A. Quadrat. Computation of Koszul homology and application to involutivity of partial differential systems. *Proceedings of the 8th IFAC Symposium on System Structure and Control, 17th IFAC Workshop on Time Delay Systems, 5th IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems*, 2022.
- [52] C. Chenavier, T. Cluzeau, and A. Quadrat. Formal integrability of partial differential systems : implementation and applications. *Proceedings of the Joint IFAC Conference*, 2025.
- [53] C. Chenavier, C. Hofstadler, C. G. Raab, and G. Regensburger. Compatible rewriting of noncommutative polynomials for proving operator identities. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pages 83–90, 2020.
- [54] E. V. Chistyakova. Properties of finite-difference schemes for singular integro-differential equations of index 1. *Institute of Dynamic Systems and Control Theory, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia*, 2009.
- [55] F. Chyzak. `Ore_algebra`, a package for skew operators. *Algorithms Project, INRIA, France*. [https://specfun.inria.fr/chyzak/Mgfun/Sessions/Ore\\_algebra.html](https://specfun.inria.fr/chyzak/Mgfun/Sessions/Ore_algebra.html).
- [56] F. Chyzak. Fonctions holonomes en calcul formel. *Thèse de l’École Polytechnique*, 1998.
- [57] F. Chyzak, A. Quadrat, and D. Robertz. Linear control systems over Ore algebras : Effective algorithms for the computation of parametrizations. *Journal of Symbolic Computation*, pages 147–154, 2003.
- [58] F. Chyzak, A. Quadrat, and D. Robertz. Effective algorithms for parametrizing linear control systems over Ore algebras. *Applied Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 16 : 319–376, 2005.
- [59] F. Chyzak, A. Quadrat, and D. Robertz. `OreModules` : A symbolic package for the study of multidimensional linear systems. *Applications of Time-Delay Systems*, 352 : 233–264, 2007. <https://who.rocq.inria.fr/Alban.Quadrat/OreModules.html>.

- [60] F. Chyzak and B. Salvy. Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate identities. *Journal of Symbolic Computation*, 26 : 187–227, 1998.
- [61] T. Cluzeau, M. A. Barkatou, C. El Bacha, and J. A. Weil. Computing closed-form solutions of integrable connections. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pages 43–50, 2012.
- [62] T. Cluzeau, V. Dolean, F. Nataf, and A. Quadrat. Symbolic techniques for domain decomposition methods. *Proceedings of the 20th international conference on Domain Decomposition methods*, 2011.
- [63] T. Cluzeau, J. Hossein, A. Quadrat, Raab C., and G. Regensburger. Symbolic computation for integro-differential-time-delay operators with matrix coefficients. *Proceedings of 14th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, 2018.
- [64] T. Cluzeau, C. Koutschan, A. Quadrat, and M. Tönso. Effective algebraic analysis approach to linear systems over Ore algebras. *Algebraic and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems, Advances in Delays and Dynamics*, 9 :3–52, 2020.
- [65] T. Cluzeau, C. Koutschan, A. Quadrat, and M. Tönso. Effective algebraic analysis approach to linear systems over ore algebras. *Algebraic Methods and Symbolic-Numeric Computation in Systems Theory, Advances in Delays and Dynamics*, 9 : 4–52, 2020.
- [66] T. Cluzeau, C. Pinto, and A. Quadrat. Further results on the computation of the annihilator of integro-differential operators. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, page 182–190, 2023.
- [67] T. Cluzeau, C. Pinto, and A. Quadrat. Effective characterization of evaluation ideals of the ring of integro-differential operators. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, page 117–125, 2024.
- [68] T. Cluzeau, C. Pinto, and A. Quadrat. An algorithmic proof of the coherence of the ring of polynomial ordinary integro-differential operators. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, 2025.
- [69] T. Cluzeau, C. Pinto, and A. Quadrat. **Bavula**, A symbolic package for linear ordinary polynomial integro-differential systems. 2025. [https://www.unilim.fr/pages\\_perso/thomas.cluzeau/Packages/Bavula/index.html](https://www.unilim.fr/pages_perso/thomas.cluzeau/Packages/Bavula/index.html).
- [70] T. Cluzeau, C. Pinto, and A. Quadrat. Polynomial solutions of the general linear polynomial ordinary integro-differential systems. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, 2025.
- [71] T. Cluzeau and A. Quadrat. Factoring and decomposing a class of linear functional systems. *Linear Algebra and its Applications*, 428 : 324–381, 2008.
- [72] T. Cluzeau and A. Quadrat. A homological algebraic package for factoring, reducing and decomposing linear functional systems. *Lecture Notes in Control and Information Sciences (LNCIS), Topics in Time-Delay Systems : Analysis, Algorithms and Control*, 2009. [https://www.unilim.fr/pages\\_perso/thomas.cluzeau/Packages/OreMorphisms/](https://www.unilim.fr/pages_perso/thomas.cluzeau/Packages/OreMorphisms/).
- [73] S. C. Coutinho. A primer of algebraic D-modules. *Cambridge University Press*, 1995.
- [74] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. Ideals, varieties, and algorithms. *Springer*, 2015.
- [75] J. M. Cushing. Integro-differential equations and delay models in population dynamics. *Lecture Notes in Biomathematics*, 20, 1977.
- [76] D. S. Cvetković-Ilić, C. Hofstadler, J. Hossein Poor, J. Milošević, C. G. Raab, and G. Regensburger. Algebraic proof methods for identities of matrices and operators : improvements of hartwig’s triple reverse order law. *Applied Mathematics and Computation*, 409, 2021.
- [77] L. M. Delves and J. L. Mohamed. Computational methods for integral equations. *Cambridge University Press*, 2009.

- [78] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles. Collection Grenoble Sciences*, 2006.
- [79] S. Diop. Some control observation problems and their differential algebraic partial solutions. *Proceedings of Computer Algebra in Scientific Computing (CASC)*, 12291 : 65–81, 2020.
- [80] S. E. El-Gendi. Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations. *The Computer Journal*, 12(3) : 282–287, 1969.
- [81] M. S. Farahani and E. Chistyakova. Adaptive iterative regularization schemes for two-dimensional integral-algebraic systems. *Faculty of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, and Institute for System Dynamics and Control Theory, SB RAS, Irkutsk, Russia*, 18(42) : 6635–6647, 2019.
- [82] A. Feldstein and J. R. Sopka. Numerical methods for nonlinear volterra integro- differential equations. *Numerical Analysis*, 11(4) :826–846, 1974.
- [83] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur. Firmin Didot*, 1822.
- [84] I. Fredholm. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Stockholm*, 61(1) : 131–148, 1903.
- [85] A. Galligo. Some algorithmic questions on ideals of differential operators. *EUROCAL, Lecture Notes in Computer Science*, 85(2) :413–421, 1985.
- [86] V. Gerdt and D. Robertz. A Maple package for computing Gröbner bases for linear recurrence relations. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 559(1) : 215–218, 2006.
- [87] V. Gerdt and D. Robertz. Computation of difference Gröbner bases. *Computer Science Journal of Moldova*, 20(1) : 50–72, 2012.
- [88] V. P. Gerdt, M. Lange-Hegermann, and D. Robertz. The Maple package TDDS for computing Thomas decompositions of systems of nonlinear pdes. *Computer Physics Communications*, 234 : 202–215, 2019.
- [89] M. Hadizadeh, F. Ghoreishi, and S. Pishbin. Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2. *Applied Numerical Mathematics*, 61(1) : 131–148, 2011.
- [90] J. H. He. Homotopy perturbation technique. *Computers and Mathematics with Applications*, 54(7–8) : 1151–1159, 2007.
- [91] P. Huabsomboon, B. Novaprateep, and H. Kaneko. On taylor-series expansion methods for the second kind integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5) : 1433–1443, 2010.
- [92] E. Hubert. Factorization-free decomposition algorithms in differential algebra. *Journal of Symbolic Computation*, 29(4–5) : 641–662, 2000.
- [93] J. David Irwin. *Electrical engineering. Prentice Hall*, 1996.
- [94] N. Jacobson. Some remarks on one-sided inverses. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1(3) : 352–355, 1950.
- [95] M. Janet. *Leçons sur les équations aux dérivées partielles. Gauthier-Villars*, 1929.
- [96] J. P. Jans. Rings and homology. *American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs*, 55, 1989.
- [97] B. Jumarhon, W. Lamb, S. McKee, and T. Tang. A Volterra integral type method for solving a class of nonlinear initial-boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 63(1–3) : 179–191, 1995.
- [98] M. Kashiwara. Algebraic study of systems of partial differential equations. *Master's Thesis, Tokyo University*, 1970.
- [99] M. Kashiwara, T. Kawai, and T. Kimura. Foundations of algebraic analysis. *Princeton University Press*, 1986.

- [100] M. Koksal and S. Herdem. Analysis of nonlinear circuits by using differential Taylor transform. *International Journal of Electronics*, 88(1) : 45–56, 2001.
- [101] E. R. Kolchin. Differential algebra and algebraic function fields. *Academic Press*, 1968.
- [102] E. R. Kolchin. Differential algebra and algebraic groups. *Academic Press*, 1973.
- [103] A. Korporal, G. Regensburger, and M. Rosenkranz. Symbolic computation for ordinary boundary problems in `maple`. *ACM Communications in Computer Algebra*, 44(3/4) : 120–122, 2011.
- [104] R. Kress. Linear integral equations. *Applied Mathematical Sciences*, 82, 1999.
- [105] P. K. Kythe and P. Puri. Computational methods for linear integral equations. *Birkhäuser*, 2002.
- [106] T. Lalesco. Introduction à la théorie des équations intégrales. *Librairie Scientifique A. Hermann et Fils*, 1912.
- [107] T. Y. Lam. Lectures on modules and rings. *Graduate Texts in Mathematics*, 189, 1999.
- [108] S. Lang. Algebra. *Addison-Wesley*, 1993.
- [109] S. Larsson and F. Saedpanah. Discontinuous galerkin method for an integro-differential equation modeling dynamic fractional order viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 : 196–209, 2015.
- [110] F. Lemaire and L. Roussel. Parameter estimation using integral equations. *Maple Transactions, Proceedings of the Maple Conference*, 4(1), 2024. <https://doi.org/10.5206/mt.v4i1.17126>.
- [111] V. Levandovskyy. Non-commutative computer algebra for polynomial algebras : Gröbner bases, applications and implementation. *PhD Thesis of Universität Kaiserslautern*, 2005.
- [112] V. Levandovskyy and J. Hoffmann. Constructive arithmetics in Ore localizations of domains. *Journal of Symbolic Computation*, 98 : 23–46, 2020.
- [113] V. Levandovskyy and R. La Scala. Skew polynomial rings, Gröbner bases and the letterplace embedding of the free associative algebra. *Journal of Symbolic Computation*, 45(1) : 164–192, 2010.
- [114] H. Lombardi. Algèbre constructive. *Les cours du C.I.R.M.*, 4(1) : cours 3, 2014.
- [115] H. Lombardi and C. Quitté. Algèbre commutative : Méthodes constructives. modules projectifs de type fini. *Calvage et Mounet*, 2011.
- [116] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2) : 130–141, 1963.
- [117] P. Maisonobe and C. Sabbah. D-modules cohérents et holonomes : éléments de la théorie des systèmes différentiels. *Éditions Hermann*, 1997.
- [118] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, and M. Rabbani. Numerical solution of second kind fredholm integral equations system by using a taylor-series expansion method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(8) : 2436–2445, 2011.
- [119] B. Malgrange. Systèmes différentiels à coefficients constants. *Séminaire N. Bourbaki*, (246) : 79–89, 1964.
- [120] M. Malik and H. H. Dang. Vibration analysis of continuous systems by differential transformation. *Applied Mathematics and Computation*, 96(1) : 17–26, 1998.
- [121] J. C. McConnell and J. C. Robson. Noncommutative noetherian rings. *American Mathematical Society*, 2000.
- [122] R. K. Miller. On the linearization of Volterra integral equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23 : 198–208, 1968.
- [123] R. Mines, F. Richman, and W. Ruitenburg. A course in constructive algebra. *Springer-Verlag*, 1988.
- [124] T. Mora. An introduction to commutative and noncommutative Gröbner bases. *Theoretical Computer Science*, 134 : 131–173, 1994.

- [125] J. Munganga, R. Maritz, J. Mwambakana, and T.A. Batubenge. Introduction of the differential transform method to solve differential equations at undergraduate level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(8) : 1234–1245, 2014.
- [126] T. Oaku, N. Takayama, and H. Tsai. Polynomial and rational solutions of holonomic systems. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 164 : 199–220, 2001.
- [127] Z. M. Odibat. Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels. *Mathematical and Computer Modelling*, 48(7-8) : 1144–1149, 2008.
- [128] L. Pandolfi. Integro-differential equations and applications to viscoelasticity and circuits. *Journal of Integral Equations and Applications*, 15(1) : 1–22, 2003.
- [129] S. Pishbin. Optimal convergence results of piecewise polynomial collocation solutions for integral–algebraic equations of index-3. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(6) : 1502–1513, 2010.
- [130] S. Pishbin, F. Ghoreishi, and M. Hadizadeh. The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernels : The numerical treatments. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 245 : 121–132, 2013.
- [131] J. F. Pommaret. Partial differential equations and group theory. *Academic Publishers Group, Dordrech*, 293, 1994.
- [132] S. Posur. A constructive approach to freyd categories. *Journal of Algebra and Its Applications*, 15(4), 2016.
- [133] G. A. Ptiteyn, M. S. Mirmoosa, A. Sotoodehfar, and S. A. Tretyakov. Tutorial on basics of time-varying electromagnetic systems and circuits. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2023.
- [134] A. Quadrat. A package for Maple : OreAlgebraicAnalysis. <https://who.rocq.inria.fr/Alban.Quadrat/OreAlgebraicAnalysis/index.html>.
- [135] A. Quadrat. An introduction to constructive algebraic analysis and its applications. *Les cours du C.I.R.M.*, 1(2) : 281–471, 2010.
- [136] A. Quadrat. A constructive algebraic analysis approach to artstein’s reduction of linear time-delay systems. *Proceedings of 12th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, 2015.
- [137] A. Quadrat. An integro-differential-delay operator approach to transformations of linear differential time-delay systems. *IFAC Symposium on System Structure and Control (SSSC)*, 2022.
- [138] A. Quadrat. An integro-differential operator approach to linear differential systems. *Proceedings of the 25th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, 2022.
- [139] A. Quadrat. An integro-differential operator approach to linear state-space systems. *Proceedings of the 8th IFAC Symposium on System Structure and Control (SSSC)*, 2022.
- [140] A. Quadrat. Linear ordinary integro-differential systems : An algorithmic study. *Exposé au séminaire MAX de l’École Polytechnique*, 2024.
- [141] A. Quadrat and T. Cluzeau. Serre’s reduction of linear partial differential systems with holonomic adjoints. *Journal of Symbolic Computation*, 10(47) : 1192–1213, 2012.
- [142] A. Quadrat and T. Cluzeau. Further results on the decomposition and serre’s reduction of linear functional systems. *Proceedings of the 5th Symposium on System Structure and Control (IFAC Joint Conference)*, 2013.
- [143] A. Quadrat and T. Cluzeau. Isomorphisms and serre’s reduction of linear systems. *Proceedings of the 8th international Workshop on Multidimensional nD Systems*, 2013.
- [144] A. Quadrat and G. Regensburger. Computing polynomial solutions and annihilators of integro-differential operators with polynomial coefficients. *Algebraic Methods and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems*, 9 : 87–114, 2020.
- [145] A. Quadrat and D. Robertz. Computation of bases of free modules over the Weyl algebras. *Journal of Symbolic Computation*, 42(11-12) : 1113–1141, 2007.

- [146] A. Quadrat and E. Zerz. Algebraic and symbolic computation methods in dynamical systems. *Advances in Delays and Dynamics*, 9 : 161–182, 2020.
- [147] A. Radid and K. Rhofir. Partitioning differential transformation for solving integro-differential equations problem and application to electrical circuits. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 6(2) : 235–240, 2019.
- [148] M. Rahaman. Integral equations and their applications. *WIT Press*, 2007.
- [149] A. S. V. Ravi Kanth and K. Aruna. Differential transform method for solving the linear and nonlinear klein–gordon equation. *Computer Physics Communications*, 180(5) : 708–711, 2009.
- [150] J. Rebenda and Z. Paříková. Differential transform algorithm for functional differential equations with time-dependent delays. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020.
- [151] J. Rebenda, Z. Šmarda, and Y. Khan. A new semi-analytical approach for numerical solving of Cauchy problem for differential equations with delay. *Filomat*, 31(15) : 4725–4733, 2017.
- [152] G. Regensburger. Symbolic computation with integro-differential operators. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, (2) : 17–18, 2016.
- [153] G. Regensburger, C. Hofstadler, and C. G. Raab. Certifying operator identities via noncommutative gröbner bases. *ACM Communications in Computer Algebra*, 53 : 49–52, 2019. Software presentation at ISSAC 2019.
- [154] J. Ritt. Differential algebra. *American Mathematical Society*, 1950.
- [155] D. Robertz. **JanetOre** : A Maple package for computing Janet and Janet-like Gröbner bases in Ore algebras. *RWTH Aachen University, Institute for Mathematics*. Software package.
- [156] D. Robertz. Formal algorithmic elimination for PDEs. *Lecture Notes in Mathematics*, 2121 : VIII, 283, 2014.
- [157] M. Rosenkranz. Integro-differential polynomials and operators. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pages 261–268, 2008.
- [158] M. Rosenkranz. An algebraic foundation for factoring linear boundary problems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 188(1) : 123–151, 2009.
- [159] M. Rosenkranz and A. Korporal. A Maple package for integro-differential operators and boundary problems. *ACM Communications in Computer Algebra*, 44 : 120–122, 2010.
- [160] M. Rosenkranz and A. Korporal. Regular and singular boundary problems in Maple. *Proceedings of Computer Algebra in Scientific Computing (CASC)*, 6885 : 280–293, 2011.
- [161] M. Rosenkranz and A. Korporal. Symbolic computation for ordinary boundary problems in Maple. *ACM Communications in Computer Algebra*, 46 : 154–156, 2012.
- [162] M. Rosenkranz and J. Middeke. A skew polynomial approach to integro-differential operators. *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pages 287–294, 2009.
- [163] M. Rosenkranz, G. Regensburger, L. Tec, and N. Quadrat. A symbolic approach to boundary problems for linear ordinary differential equations. *Journal of Symbolic Computation*, 47(6) : 670–711, 2012.
- [164] M. Rosenkranz, L. Tec, and B. Buchberger. A symbolic framework for operations on linear boundary problems. *Proceedings of Computer Algebra in Scientific Computing (CASC)*, 5743 : 269–283, 2009.
- [165] M. Rosenkranz, L. Tec, and B. Buchberger. Symbolic analysis for boundary problems : From rewriting to parametrized Gröbner bases. *Numerical and Symbolic Scientific Computing : Progress and Prospects*, pages 273–331, 2012.
- [166] J. J. Rotman. An introduction to homological algebra. *Springer*, 2009.
- [167] B. Soltanalizadeh. Application of differential transformation method for solving a fourth-order parabolic partial differential equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 78(3) : 299–308, 2012.

- [168] J.-P. Soublin. Anneaux et modules cohérents. *Journal of Algebra*, 15 : 455–472, 1970.
- [169] D. C. Spencer. Overdetermined systems of linear partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 : 179–239, 1969.
- [170] J. T. Stafford. Module structure of Weyl algebras. *Journal of the London Mathematical Society*, 18(3) : 429–442, 1978.
- [171] B. Stenström. Rings of quotients : An introduction to methods of ring theory. *Springer*, 1975.
- [172] V. Volterra. Leçons sur les Équations intégrales et les Équations intégro-différentielles. *Cours professé à la Faculté des Sciences de Rome en 1910, publié par M. Tomassetti et F.-S. Zarlatti*, 1910.
- [173] A.-M. Wazwaz. Linear and nonlinear integral equations : Methods and applications. *Springer Verlag*, 2011.
- [174] S. Yalçınbas and M. Sezer. The approximate solution of high-order linear Volterra–fredholm integro-differential equations in terms of taylor polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 112(1-2) : 291–308, 2000.
- [175] E. Yusufoglu. An efficient algorithm for solving integro-differential equations system. 192(1) : 51 –55, 2007.
- [176] S. Yuzbas, N. Şahin, and A. Yildirim. A collocation approach for solving high-order linear fredholm–Volterra integro-differential equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3-4) : 547–563, 2012.
- [177] R. Zolfaghari, J. Taylor, and R. J. Spiteri. Structural analysis of integro-differential–algebraic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 394, 2021.