

Introduction à quelques résultats récents d'automatique linéaire basés sur des méthodes de calcul formel

Alban Quadrat

INRIA Sophia Antipolis, Projet APICS,
2004 route des lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex, France.
www-sop.inria.fr/cafe/Alban.Quadrat/index.html

en collaboration avec

Thomas Cluzeau

ENSIL - Parc Ester Technopole
16 rue d'Atlantis 87068 Limoges, France.
cluzeau@ensil.unilim.fr

JD-JN-MACS 2007, Reims

- But de l'exposé:

Comment utiliser les méthodes algébriques et de calcul formel pour simplifier les systèmes apparaissant en automatique?

- Intérêts d'un pré-conditionnement algébrique:
 - Simplification des équations du système
⇒ simplification de l'étude des propriétés structurelles.
 - Découplage des équations du système ⇒ analyse numérique.
- Autres domaines concernés:
 - Physique mathématique.
 - Sciences de l'ingénieur: électromagnétisme, hydrodynamique...

Au commencement: une histoire de notations!

- **Newton:** Le calcul des fluxions (1666)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \frac{g}{l} x_1(t) - \frac{g}{l} u(t) = 0, \\ \ddot{x}_2(t) + \frac{g}{l} x_2(t) - \frac{g}{l} u(t) = 0. \end{cases}$$

- **Leibniz:** Le calcul infinitésimal (1676)

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} x_1(t) - \frac{g}{l} u(t) = 0, \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} x_2(t) - \frac{g}{l} u(t) = 0. \end{cases}$$

- **Boole:** Le calcul opérationnel (1859-60)

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} & 0 & -\frac{g}{l} \\ 0 & \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} & -\frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = 0.$$

⇒ anneau d'opérateurs différentiels $D = \mathbb{Q}(g, l) \left[\frac{d}{dt} \right]$:

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{d}{dt} \right)^i \in D, \quad a_i \in \mathbb{Q}(g, l), \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^i = \frac{d}{dt} \circ \dots \circ \frac{d}{dt} = \frac{d^i}{dt^i}.$$

Forme canonique de Smith

- $D = k[s]$, k corps (e.g., \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}): **anneau euclidien**.
- **Théorème:** $\forall R \in D^{q \times p}$, $\exists V \in GL_q(D)$, $U \in GL_p(D)$:

$$\bar{R} = V R U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où $\alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_r \neq 0$ et $\alpha_i \in D$, $i = 1, \dots, r$.

- **Applications en automatique:** Invariants, propriétés structurelles, réalisations... (c.f. Kailath, d'Andréa-Novel & Cohen de Lara).

Exemple

- Considérons 2 pendules de même taille montés sur un mobile:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \frac{g}{l} x_1(t) - \frac{g}{l} u(t) = 0, \\ \ddot{x}_2(t) + \frac{g}{l} x_2(t) - \frac{g}{l} u(t) = 0. \end{cases}$$

- Considérons l'anneau euclidien $D = \mathbb{Q}(g, l) \left[\frac{d}{dt} \right]$.
- Nous avons la forme de Smith suivante:

$$\begin{pmatrix} -\frac{l}{g} & 0 \\ g & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} & 0 & -\frac{g}{l} \\ 0 & \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} & -\frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}.$$

Forme canonique de Jacobson

- $D = K \left[\frac{d}{dt} \right]$, K **corps différentiel** (e.g., \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}(t)$, \mathcal{M}).
- D est un **anneau euclidien à gauche**:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a(t) y(t)) &= a(t) \frac{d}{dt} (y(t)) + \dot{a}(t) y(t) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} a \cdot &= a \frac{d}{dt} \cdot + \dot{a} \cdot. \end{aligned}$$

- **Théorème:** $\forall R \in D^{q \times p}$, $\exists V \in GL_q(D)$, $\exists U \in GL_p(D)$:

$$\bar{R} = VRU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_r \neq 0.$$

Exemple

- Considérons le **système linéaire variant dans le temps**:

$$\begin{cases} t \dot{y}_1(t) - y_1(t) - t^2 \dot{y}_2(t) + u_1(t) = 0, \\ \dot{y}_1(t) + t \dot{y}_2(t) - y_2(t) + u_2(t) = 0. \end{cases}$$

- Considérons l'**anneau euclidien à gauche** $D = \mathbb{Q}(t) \left[\frac{d}{dt} \right]$.

$$\begin{pmatrix} t \frac{d}{dt} - 1 & -t^2 \frac{d}{dt} & 1 & 0 \\ \frac{d}{dt} & t \frac{d}{dt} - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -t \frac{d}{dt} + 1 & t^2 \frac{d}{dt} \\ 0 & 1 & -\frac{d}{dt} & -t \frac{d}{dt} + 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Implantation** dans la librairie **OREMODULES**.

Quid des systèmes fonctionnels généraux?

- **Modèle d'un réservoir 1-D** contenant un fluide animé d'un mouvement horizontal (Petit-Rouchon, IEEE TAC 02):

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t - 2h) + \alpha \ddot{y}_3(t - h) = 0, \\ \dot{y}_1(t - 2h) - \dot{y}_2(t) + \alpha \ddot{y}_3(t - h) = 0, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{R}_+.$$

- Considérons $D = \mathbb{R} \left[\frac{d}{dt}, \delta \right]$, $\delta(y(t)) = y(t - h)$, et la matrice:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} \delta^2 & \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \\ \frac{d}{dt} \delta^2 & -\frac{d}{dt} & \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \end{pmatrix} \in D^{2 \times 3}.$$

- **Question:** $\exists U \in GL_3(D)$, $V \in GL_2(D)$ telles que:

$$V R U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in D?$$

Quid des systèmes fonctionnels généraux?

- Approximation linéaire d'un **écoulement 2-D stationnaire, rotationnel et isentropique** (Courant-Hilbert):

$$\begin{cases} u \rho \frac{\partial \omega}{\partial x} + c^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \\ u \rho \frac{\partial \lambda}{\partial x} + c^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0, \\ \rho \frac{\partial \omega}{\partial x} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

- Considérons $D = \mathbb{Q}(u, \rho, c)[\partial_x, \partial_y]$ et la matrice:

$$R = \begin{pmatrix} u \rho \partial_x & c^2 \partial_x & 0 \\ 0 & c^2 \partial_y & u \rho \partial_x \\ \rho \partial_x & u \partial_x & \rho \partial_y \end{pmatrix} \in D^{3 \times 3}.$$

- **Question:** $\exists U \in \text{GL}_3(D), V \in \text{GL}_3(D)$ telles que:

$$V R U = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in D?$$

Quid des systèmes fonctionnels généraux?

- Considérons les **équations de Dirac** suivantes:

$$\begin{cases} d_4 y_1 - i d_3 y_3 - (i d_1 + d_2) y_4 = 0, \\ d_4 y_2 - (i d_1 - d_2) y_3 + i d_3 y_4 = 0, \\ i d_3 y_1 + (i d_1 + d_2) y_2 - d_4 y_3 = 0, \\ (i d_1 - d_2) y_1 - i d_3 y_2 - d_4 y_4 = 0, \end{cases} \quad d_i = \partial / \partial x_i.$$

- Considérons $D = \mathbb{Q}(i)[d_1, d_2, d_3, d_4]$ et la matrice:

$$R = \begin{pmatrix} d_4 & 0 & -i d_3 & -(i d_1 + d_2) \\ 0 & d_4 & -i d_1 + d_2 & i d_3 \\ i d_3 & i d_1 + d_2 & -d_4 & 0 \\ i d_1 - d_2 & -i d_3 & 0 & -d_4 \end{pmatrix}.$$

- **Question:** $\exists U \in \text{GL}_4(D), V \in \text{GL}_4(D)$ telles que:

$$V R U = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \end{pmatrix} ?$$

Exemples d'algèbres d'Ore

- Opérateurs différentiels: $A = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n),$

$$D = A[\partial_1, \dots, \partial_n], \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$P = \sum_{0 \leq |\mu| \leq m} a_\mu(x) \partial^\mu \in D, \quad \partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_n^{\mu_n}, \quad a_\mu \in A.$$

- Opérateurs de décalage:

$$D = A[\sigma], \quad A = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}[n], \mathbb{Q}(n),$$

$$P = \sum_{i=0}^m a_i(n) \sigma^i \in D, \quad \sigma(a(n)) = a(n+1).$$

- Opérateurs différentiels à retard:

$$D = A\left[\frac{d}{dt}, \delta\right], \quad A = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}[t], \mathbb{Q}(t),$$

$$P = \sum_{0 \leq i+j \leq m} a_{ij}(t) \frac{d^i}{dt^i} \delta^j \in D, \quad \delta(a(t)) = a(t-h).$$

- Théorème:** Pour tout ordre monomial, il existe une **base de Gröbner** qui peut être calculée par **l'algorithme de Buchberger**.

Problèmes de factorisation et décomposition

- Soit D une **algèbre d'Ore** d'opérateurs fonctionnels.

- Soit $R \in D^{q \times p}$ une matrice.

- Questions:

1. $\exists R_1 \in D^{r \times p}, R_2 \in D^{q \times r} : R = R_2 R_1 ?$

2. $\exists W \in GL_p(D), V \in GL_q(D)$ t.q. $V R W = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix} ?$

3. $\exists W \in GL_p(D), V \in GL_q(D)$ t.q. $V R W = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix} ?$

Théorie des systèmes par l'analyse algébrique

- Considérons une algèbre de Ore D d'opérateurs fonctionnels.
- Considérons une matrice $R \in D^{q \times p}$.
- Soit \mathcal{F} un espace fonctionnel possédant la propriété suivante

$$\forall a_1, a_2 \in D, \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{F} : \quad a_1 f_1 + a_2 f_2 \in \mathcal{F}.$$

c-à-d, \mathcal{F} est un D -module à gauche.

- Le système ou behaviour est défini par:

$$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = \{\eta \in \mathcal{F}^p \mid R \eta = 0\}.$$

- **Exemple:** Soient $D = \mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]$, $R = \left(\frac{d}{dt} I_n - A, -B \right) \in D^{n \times (n+m)}$ et $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Alors, nous avons:

$$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = \{(x, u) \in \mathcal{F}^{n+m} \mid \dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t) = 0\}.$$

Théorie des systèmes par l'analyse algébrique

- On aimerait faire de l'algèbre linéaire sur la matrice R
⇒ étude par **la théorie des modules du D -module à gauche**:

$$M = D^{1 \times p} / (D^{1 \times q} R).$$

On réduit à zéro les combinaisons D -linéaires des lignes de R .

- **Exemple:** $D = \mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]$, $R = \left(\frac{d}{dt} I_n - A, -B \right) \in D^{n \times (n+m)}$,

$$M = D^{1 \times (n+m)} / (D^{1 \times n} R).$$

- Exemples en théorie des nombres & géométrie algébrique:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x] / (\mathbb{R}[x] (x^2 + 1)), \quad \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \mathbb{Z}[x] / (\mathbb{Z}[x] (x^2 + 5)),$$

$$A = \mathbb{Q}[x, y] / (\mathbb{Q}[x, y] (x^2 + y^2 - 1) + \mathbb{Q}[x, y] (y - x)).$$

- $\text{hom}_D(M, \mathcal{F})$: groupe des **applications D -linéaires de M dans \mathcal{F}** .
- **Théorème de Malgrange:** Nous avons $\ker_{\mathcal{F}}(R.) \cong \text{hom}_D(M, \mathcal{F})$.

Transformations de Galois des systèmes

- Considérons un autre système $\ker_{\mathcal{F}}(R')$ avec $R' \in D^{q' \times p'}$.

Comment envoyer un élément de $\ker_{\mathcal{F}}(R')$ sur un élément de $\ker_{\mathcal{F}}(R)$?

- Soient $M = D^{1 \times p} / (D^{1 \times q} R)$ et $M' = D^{1 \times p'} / (D^{1 \times q'} R')$.
- Ce problème revient au calcul du **groupe** $\text{hom}_D(M, M')$.
- **Théorème:** $f \in \text{hom}_D(M, M')$ est entièrement défini par la donnée de $P \in D^{p \times p'}$ et $Q \in D^{q \times q'}$ satisfaisant la relation:

$$R P = Q R'.$$

- **Vérification:** $R' \eta' = 0 \Rightarrow R (P \eta') = Q (R' \eta') = 0$.
- **Exemple:** $D = K \left[\frac{d}{dt} \right]$, $R = \left(\frac{d}{dt} I_n - A(t) \right)$, $R' = \left(\frac{d}{dt} I_n - A'(t) \right)$,
 $\text{hom}_D(M, M') = \{ P = Q \in K^{n \times n} \mid \dot{P}(t) = A(t) P(t) - P(t) A'(t) \}$.

Calcul de $\text{hom}_D(M, M')$

- Nous considérons ici que le cas d'un **anneau D commutatif**.
- **Définition:** Le **produit de Kronecker** de $E \in D^{q \times p}$ par $F \in D^{r \times s}$:

$$E \otimes F = \begin{pmatrix} E_{11} F & \dots & E_{1p} F \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{q1} F & \dots & E_{qp} F \end{pmatrix} \in D^{(qr) \times (ps)}.$$

- **Lemme:** Soient $U \in D^{a \times b}$, $V \in D^{b \times c}$ et $W \in D^{c \times d}$.

$$U V W = (V_1 \dots V_b) (U^T \otimes W).$$

- $R P I_{p'} = (P_1 \dots P_p) (R^T \otimes I_{p'})$, $I_q Q R' = (Q_1 \dots Q_q) (I_q \otimes R')$.

Le calcul de $R P = Q R'$ se réduit alors au calcul de

$$\ker_D \left(\cdot \begin{pmatrix} R^T \otimes I_{p'} \\ -I_q \otimes R' \end{pmatrix} \right)$$

par **bases de Gröbner** \Rightarrow **générateurs & relations de $\text{hom}_D(M, M')$** .

Exemple des 2 pendules

- Considérons l'algèbre de Ore $D = \mathbb{Q}(g, l) \left[\frac{d}{dt} \right]$.
- Considérons la matrice du système:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} & 0 & -\frac{g}{l} \\ 0 & \frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{l} & -\frac{g}{l} \end{pmatrix} \in D^{2 \times 3}.$$

- Considérons le D -module $M = D^{1 \times 3} / (D^{1 \times 2} R)$.
- $\text{end}_D(M) = \text{hom}_D(M, M)$ est défini par les matrices:

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 g \\ \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 & \alpha_3 g \\ 0 & 0 & \alpha_3 l \frac{d^2}{dt^2} + \alpha_1 + \alpha_2 + g \alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in D.$$

Exemple d'un réservoir (Dubois-Petit-Rouchon, ECC99)

- Considérons l'anneau $D = \mathbb{Q} \left[\frac{d}{dt}, \delta \right]$ des opérateurs différentiels à retard et la matrice du système:

$$R = \begin{pmatrix} \delta^2 & 1 & -2 \frac{d}{dt} \delta \\ 1 & \delta^2 & -2 \frac{d}{dt} \delta \end{pmatrix} \in D^{2 \times 3}.$$

- Soit $M = D^{1 \times 3} / (D^{1 \times 2} R)$. Le D -module $\text{end}_D(M)$ est défini par:

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 \frac{d}{dt} + 2\alpha_5 \frac{d}{dt} \delta \\ \alpha_4 \delta + \alpha_5 \\ \alpha_2 & 2\alpha_3 \frac{d}{dt} \delta \\ \alpha_1 - 2\alpha_4 \frac{d}{dt} - 2\alpha_5 \frac{d}{dt} \delta & 2\alpha_3 \frac{d}{dt} \delta \\ -\alpha_4 \delta - \alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 (\delta^2 + 1) \end{pmatrix},$$

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_4 \frac{d}{dt} & \alpha_2 + 2\alpha_4 \frac{d}{dt} \\ \alpha_2 + 2\alpha_5 \frac{d}{dt} \delta & \alpha_1 - 2\alpha_5 \frac{d}{dt} \delta \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha_i \in D, i = 1, \dots, 5.$$

Exemple de l'écoulement 2-D isentropique

- Considérons $D = \mathbb{Q}(u, \rho, c)[\partial_x, \partial_y]$ et la matrice du système:

$$R = \begin{pmatrix} u \rho \partial_x & c^2 \partial_x & 0 \\ 0 & c^2 \partial_y & u \rho \partial_x \\ \rho \partial_x & u \partial_x & \rho \partial_y \end{pmatrix} \in D^{3 \times 3}.$$

- Soit $M = D^{1 \times 3} / (D^{1 \times 3} R)$. Le D -module $\text{end}_D(M)$ est défini par:

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c^2 \alpha_2 & c^2 u \rho \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 - u \rho \alpha_2 & -u^2 \rho^2 \alpha_3 \\ 0 & -c^2 (u^2 - c^2) \alpha_3 & \alpha_1 - u \rho \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ c^2 u \rho \alpha_3 & \alpha_1 - u \rho \alpha_2 & -c^2 u^2 \rho \alpha_3 \\ \rho \alpha_2 & -\rho (u^2 - c^2) \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 u \rho \end{pmatrix},$$

avec α_1, α_2 et α_3 des éléments arbitraires de D .

Factorisation

- Considérons une algèbre de Ore D , une matrice $R \in D^{q \times p}$ et le D -module à gauche $M = D^{1 \times p} / (D^{1 \times q} R)$.
- **Théorème:** A tout $f \in \text{end}_D(M)$ non-injectif, défini par P et Q , correspond une factorisation de la matrice R de la forme

$$R = LS,$$

où la matrice S est définie par:

$$\ker_D \left(\cdot \begin{pmatrix} P \\ R \end{pmatrix} \right) = D^{1 \times r} (S \quad -T), \quad S \in D^{r \times p}, \quad T \in D^{r \times q}.$$

- **Intérêt:** $\ker_{\mathcal{F}}(S \cdot) \subseteq \ker_{\mathcal{F}}(R \cdot)$:

$$S \eta = 0 \Rightarrow R \eta = L(S \eta) = 0.$$

- De plus, nous avons $\text{coim } f \triangleq M / \ker f = D^{1 \times p} / (D^{1 \times r} S)$.

Réservoir (Dubois-Petit-Rouchon, ECC99)

- Soient $D = \mathbb{Q} \left[\frac{d}{dt}, \delta \right]$ et le D -module $M = D^{1 \times 3} / (D^{1 \times 2} R)$, où:

$$R = \begin{pmatrix} \delta^2 & 1 & -2 \frac{d}{dt} \delta \\ 1 & \delta^2 & -2 \frac{d}{dt} \delta \end{pmatrix} \in D^{2 \times 3}.$$

- Un D -endomorphisme non-injectif est défini par les matrices:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Nous avons alors la factorisation suivante:

$$R = \begin{pmatrix} \delta^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \delta^2 + 1 & -2 \frac{d}{dt} \delta \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} y_1(t) = 2\dot{\xi}(t-h), \\ y_2(t) = 2\dot{\xi}(t-h), \\ y_3(t) = \xi(t-2h) + \xi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t-2h) + y_2(t) - 2\dot{y}_3(t-h) = 0, \\ y_1(t) + y_2(t-2h) - 2\dot{y}_3(t-h) = 0. \end{cases}$$

Réservoir (Petit-Rouchon, IEEE TAC 02)

- Soient $D = \mathbb{Q}(\alpha) \left[\frac{d}{dt}, \delta \right]$ et le D -module $M = D^{1 \times 3} / (D^{1 \times 2} R)$:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} \delta^2 & \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \\ \frac{d}{dt} \delta^2 & -\frac{d}{dt} & \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \end{pmatrix} \in D^{2 \times 3}.$$

- Un D -endomorphisme non-injectif est défini par les matrices:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Nous avons alors la factorisation suivante:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 \\ \frac{d}{dt} \delta^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} (\delta^2 + 1) & -\alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} y_1(t) = -\alpha \dot{\xi}(t-h) - C, \\ y_2(t) = \alpha \dot{\xi}(t-h) + C, \\ y_3(t) = \xi(t-2h) + \xi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t-2h) + \alpha \ddot{y}_3(t-h) = 0, \\ \dot{y}_1(t-2h) - \dot{y}_2(t) + \alpha \ddot{y}_3(t-h) = 0. \end{cases}$$

Décomposition bloc-triangulaire

- **Théorème:** Soient $R \in D^{q \times p}$, $M = D^{1 \times p} / (D^{1 \times q} R)$ et $f \in \text{end}_D(M)$ défini par P et Q satisfaisant $R P = Q R$.

Si les D -modules à gauche

$$\ker_D(.P), \quad \text{coim}_D(.P) = D^{1 \times p} / \ker_D(.P),$$

$$\ker_D(.Q), \quad \text{coim}_D(.Q) = D^{1 \times q} / \ker_D(.Q),$$

sont **libres** de rang m , $p - m$, l , $q - l$, alors il existe 2 matrices

$$U = (U_1^T \quad U_2^T)^T \in \text{GL}_p(D), \quad V = (V_1^T \quad V_2^T)^T \in \text{GL}_q(D),$$

telles que

$$\bar{R} = V R U^{-1} = \begin{pmatrix} V_1 R W_1 & 0 \\ V_2 R W_1 & V_2 R W_2 \end{pmatrix} \in D^{q \times p},$$

où $U^{-1} = (W_1 \quad W_2)$, $W_1 \in D^{p \times m}$, $W_2 \in D^{p \times (p-m)}$ et:

$$U_1 \in D^{m \times p}, \quad U_2 \in D^{(p-m) \times p}, \quad V_1 \in D^{l \times q}, \quad V_2 \in D^{(q-l) \times q}.$$

Réservoir (Dubois-Petit-Rouchon, ECC99)

- Soient $D = \mathbb{Q}(\alpha) \left[\frac{d}{dt}, \delta \right]$ et le D -module $M = D^{1 \times 3} / (D^{1 \times 2} R)$:

$$R = \begin{pmatrix} \delta^2 & 1 & -2 \frac{d}{dt} \delta \\ 1 & \delta^2 & -2 \frac{d}{dt} \delta \end{pmatrix} \in D^{2 \times 3}.$$

- $f \in \text{end}_D(M)$ est défini par les matrices:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V R U^{-1} = \begin{pmatrix} \delta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 1 & \delta^2 + 1 & -2 \frac{d}{dt} \delta \end{pmatrix}.$$

Réservoir (Petit-Rouchon, IEEE TAC 02)

- Soient $D = \mathbb{Q}(\alpha) \left[\frac{d}{dt}, \delta \right]$ et le D -module $M = D^{1 \times 3} / (D^{1 \times 2} R)$:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} \delta^2 & \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \\ \frac{d}{dt} \delta^2 & -\frac{d}{dt} & \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \end{pmatrix} \in D^{2 \times 3}.$$

- $f \in \text{end}_D(M)$ est défini par les matrices:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V R U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} (1 - \delta^2) & 0 & 0 \\ \frac{d}{dt} \delta^2 & \frac{d}{dt} (1 + \delta^2) & \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \end{pmatrix}.$$

Exemple d'électromagnétisme

$$\sigma \partial_t \vec{A} + \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \vec{A} - \sigma \vec{\nabla} V = 0$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} \sigma \partial_t - \frac{1}{\mu} (\partial_2^2 + \partial_3^2) & \frac{1}{\mu} \partial_1 \partial_2 & \frac{1}{\mu} \partial_1 \partial_3 & -\sigma \partial_1 \\ \frac{1}{\mu} \partial_1 \partial_2 & \sigma \partial_t - \frac{1}{\mu} (\partial_1^2 + \partial_3^2) & \frac{1}{\mu} \partial_2 \partial_3 & -\sigma \partial_2 \\ \frac{1}{\mu} \partial_1 \partial_3 & \frac{1}{\mu} \partial_2 \partial_3 & \sigma \partial_t - \frac{1}{\mu} (\partial_1^2 + \partial_2^2) & -\sigma \partial_3 \end{pmatrix}.$$

- Soient $D = \mathbb{Q}[\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3]$ et $M = D^{1 \times 4} / (D^{1 \times 3} R)$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma \mu \partial_t & 0 & -\sigma \mu \partial_2 \\ 0 & 0 & \sigma \mu \partial_t & -\sigma \mu \partial_3 \\ 0 & \partial_t \partial_2 & \partial_t \partial_3 & -(\partial_2^2 + \partial_3^2) \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\partial_1 \partial_2 & \sigma \mu \partial_t - \partial_2^2 & -\partial_2 \partial_3 \\ -\partial_1 \partial_3 & -\partial_2 \partial_3 & \sigma \mu \partial_t - \partial_3^2 \end{pmatrix},$$

satisfont $R P = Q R$ et définissent un **morphisme** $f \in \text{end}_D(M)$.

Exemple d'électromagnétisme

- Les D -modules $\ker_D(.P)$, $\text{coim}_D(.P)$, $\ker_D(.Q)$, $\text{coim}_D(.Q)$ sont **libres** et nous avons les bases suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ker_D(.P) = D^{1 \times 2} U_1, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_3 & -\sigma \mu \end{pmatrix}, \\ \text{coim}_D(.P) = D^{1 \times 2} U_2, \quad U_2 = \frac{1}{\sigma \mu} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \ker_D(.Q) = D^{1 \times 2} V_1, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{coim}_D(.Q) = D^{1 \times 2} V_2, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

- La matrice R est alors **équivalente** à $\bar{R} = V R U^{-1}$ définie par:

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} \sigma \partial_t - \frac{1}{\mu} (\partial_2^2 + \partial_3^2) & \frac{1}{\mu} \partial_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} \partial_1 \partial_2 & \frac{1}{\mu} \partial_2 & \sigma (\sigma \mu \partial_t - (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)) & 0 \\ \frac{1}{\mu} \partial_1 \partial_3 & \frac{1}{\mu} \partial_3 & 0 & \sigma (\sigma \mu \partial_t - (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)) \end{pmatrix}.$$

Décomposition bloc-diagonale

- **Théorème:** Soient $R \in D^{q \times p}$, $M = D^{1 \times p} / (D^{1 \times q} R)$ et $f \in \text{end}_D(M)$ défini par P et Q satisfaisant:

$$P^2 = P, \quad Q^2 = Q \quad (\text{idempotents}) \quad \Rightarrow f^2 = f.$$

Si les D -modules à gauche

$$\ker_D(.P), \quad \text{im}_D(.P) = \ker_D(. (I_p - P)),$$

$$\ker_D(.Q), \quad \text{im}_D(.Q) = \ker_D(. (I_q - Q)),$$

sont **libres** de rang m , $p - m$, l , $q - l$, alors il existe 2 matrices

$$U = (U_1^T \quad U_2^T)^T \in \text{GL}_p(D), \quad V = (V_1^T \quad V_2^T)^T \in \text{GL}_q(D),$$

telles que

$$\bar{R} = V R U^{-1} = \begin{pmatrix} V_1 R W_1 & 0 \\ 0 & V_2 R W_2 \end{pmatrix} \in D^{q \times p},$$

où $U^{-1} = (W_1 \quad W_2)$, $W_1 \in D^{p \times m}$, $W_2 \in D^{p \times (p-m)}$ et:

$$U_1 \in D^{m \times p}, \quad U_2 \in D^{(p-m) \times p}, \quad V_1 \in D^{l \times q}, \quad V_2 \in D^{(q-l) \times q}.$$

Réservoir (Dubois-Petit-Rouchon, ECC99)

- Considérons l'anneau $D = \mathbb{Q} \left[\frac{d}{dt}, \delta \right]$, la matrice du système

$$R = \begin{pmatrix} \delta^2 & 1 & -2 \frac{d}{dt} \delta \\ 1 & \delta^2 & -2 \frac{d}{dt} \delta \end{pmatrix} \in D^{2 \times 3},$$

et le D -module $M = D^{1 \times 3} / (D^{1 \times 2} R)$.

- Les matrices $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisfont:

$$R P = Q R, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q.$$

- En utilisant l'**algèbre linéaire**, nous obtenons alors:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \bar{R} = V R U^{-1} = \begin{pmatrix} \delta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta^2 & -4 \frac{d}{dt} \delta \end{pmatrix}.$$

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} \delta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta^2 & -4 \frac{d}{dt} \delta \end{pmatrix}.$$

- Soient $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$ et ψ une **fonction lisse 2 h-périodique**, alors:

$$\bar{R} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1(t) = \psi(t), \\ z_2(t) = 4 \dot{\xi}(t - h), \\ z_3(t) = \xi(t - 2h) + \xi(t), \end{cases} \quad \xi \in \mathcal{F}.$$

- Nous obtenons la **paramétrisation** suivante de $\ker_{\mathcal{F}}(R)$:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \psi(t) + 2 \dot{\xi}(t - h) \\ -\frac{1}{2} \psi(t) + 2 \dot{\xi}(t - h) \\ \xi(t - 2h) + \xi(t) \end{pmatrix}.$$

Réservoir (Petit-Rouchon, IEEE TAC 02)

- Considérons $D = \mathbb{Q}(\alpha) \left[\frac{d}{dt}, \delta \right]$, la matrice du système

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} \delta^2 & \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \\ \frac{d}{dt} \delta^2 & -\frac{d}{dt} & \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \end{pmatrix} \in D^{2 \times 3},$$

et le D -module $M = D^{1 \times 3} / (D^{1 \times 2} R)$.

- Les matrices $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisfont:

$$R P = Q R, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q.$$

- En utilisant l'algèbre linéaire, nous obtenons alors:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(D), \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(D),$$

$$\Rightarrow \bar{R} = V R U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} (1 - \delta) (1 + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} (\delta^2 + 1) & 2 \alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \end{pmatrix}.$$

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} (1 - \delta) (1 + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} (\delta^2 + 1) & 2\alpha \frac{d^2}{dt^2} \delta \end{pmatrix}.$$

- Soient $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathcal{F}$ **2 h-périodique**.

$$\bar{R} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1(t) = \psi(t) + C_1 t, \\ z_2(t) = -2\alpha \dot{\xi}(t - h) + C_2, \quad \xi \in \mathcal{F}. \\ z_3(t) = \xi(t - 2h) + \xi(t), \end{cases}$$

- Nous obtenons la **paramétrisation** suivante de $\ker_{\mathcal{F}}(R)$:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\psi(t) + C_1 t + C_2) - \alpha \dot{\xi}(t - h) \\ \frac{1}{2} (\psi(t) + C_1 t - C_2) + \alpha \dot{\xi}(t - h) \\ \xi(t - 2h) + \xi(t) \end{pmatrix}.$$

Barre flexible (Mounier-Rudolph-Petitot-Fliess ECC95)

- Considérons le **système différentiel retardé** suivant:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t-1) - u(t) = 0, \\ 2\dot{y}_1(t-1) - \dot{y}_2(t) - \dot{y}_2(t-2) = 0. \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \delta^2 & -\frac{1}{2}\delta(1 + \delta^2) & 0 \\ 2\delta & -\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} -2\delta & \delta^2 + 1 & 0 \\ 2\frac{d}{dt}(1 - \delta^2) & \frac{d}{dt}\delta(\delta^2 - 1) & -2 \\ -1 & \frac{1}{2}\delta & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -\delta \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt}\delta & -1 \\ 2\frac{d}{dt}\delta & -\frac{d}{dt}(\delta^2 + 1) & 0 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Considérons $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R})$. Les **éléments du système** $\ker_{\mathcal{F}}(R)$.

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t-1) - u(t) = 0, \\ 2\dot{y}_1(t-1) - \dot{y}_2(t) - \dot{y}_2(t-2) = 0, \end{cases}$$

sont de la forme

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \xi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c - \xi(t-2) - \xi(t) \\ c - 2\xi(t-1) \\ \dot{\xi}(t-2) - \dot{\xi}(t) \end{pmatrix},$$

où c (resp., ξ) est une **constante** (resp., **fonction de \mathcal{F}**) **arbitraire**.

Corde (Mounier-Rudolph-Fliess-Rouchon, COCV 98)

- Considérons le modèle d'une corde avec une masse intérieure:

$$\begin{cases} \phi_1(t) + \psi_1(t) - \phi_2(t) - \psi_2(t) = 0, \\ \dot{\phi}_1(t) + \dot{\psi}_1(t) + \eta_1 \phi_1(t) - \eta_1 \psi_1(t) - \eta_2 \phi_2(t) + \eta_2 \psi_2(t) = 0, \\ \phi_1(t - 2h_1) + \psi_1(t) - u(t - h_1) = 0, \\ \phi_2(t) + \psi_2(t - 2h_2) - v(t - h_2) = 0, \end{cases}$$

où h_1 et $h_2 \in \mathbb{R}_+$ satisfont $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}h_1 + \mathbb{Q}h_2) = 2$.

- Considérons $D = \mathbb{Q}(\eta_1, \eta_2) \left[\frac{d}{dt}, \sigma_1, \sigma_2 \right]$, $M = D^{1 \times 6} / (D^{1 \times 4} R)$,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{d}{dt} + \eta_1 & \frac{d}{dt} - \eta_1 & -\eta_2 & \eta_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1^2 & 1 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma_2^2 & 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \in D^{4 \times 6}.$$

Corde (Mounier-Rudolph-Fliess-Rouchon, COCV 98)

- Les matrices suivantes satisfont $RP = QR$, $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2^2 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{d}{dt} + \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Les modules $\ker_D(.P)$, $\text{im}_D(.P)$, $\ker_D(.P)$, $\text{im}_D(.P)$ sont **libres**:

$$U = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 1 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma_2^2 & 0 & -\sigma_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{d}{dt} - \eta_1 & -\eta_2 \end{pmatrix}.$$

Corde (Mounier-Rudolph-Fliess-Rouchon, COCV 98)

- R est donc **équivalente** à la **matrice bloc-diagonale**:

$$\bar{R} = V R U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 - \sigma_1^2 & & \sigma_2^2 - 1 & & \sigma_1 & & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & \sigma_1^2 \left(\frac{d}{dt} - \eta_1 \right) - \left(\frac{d}{dt} + \eta_1 \right) & & -\eta_2 (\sigma_2^2 + 1) & & -\sigma_1 \left(\frac{d}{dt} + \eta_1 \right) & & \eta_2 \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

- Considérons la **seconde matrice diagonale**

$$S = \begin{pmatrix} & 1 - \sigma_1^2 & & \sigma_2^2 - 1 & & \sigma_1 & & -\sigma_2 \\ \sigma_1^2 \left(\frac{d}{dt} - \eta_1 \right) - \left(\frac{d}{dt} + \eta_1 \right) & & -\eta_2 (\sigma_2^2 + 1) & & -\sigma_1 \left(\frac{d}{dt} + \eta_1 \right) & & \eta_2 \sigma_2 \end{pmatrix},$$

et le D -module $N = D^{1 \times 4} / (D^{1 \times 2} S)$.

- Un **projecteur** $g \in \text{end}_D(N)$ est défini par les **matrices**:

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 + 1 & (\sigma_2^2 - 1)/\eta_2 \\ -\eta_2 (\sigma_2^2 + 1) & -\sigma_2^2 + 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} a = (\sigma_1^2 \left(\frac{d}{dt} - (\eta_1 + \eta_2) \right) - \frac{d}{dt} + (\eta_2 - \eta_1)) / (2\eta_2), \\ b = -\sigma_1 \left(\frac{d}{dt} - (\eta_1 + \eta_2) \right) / (2\eta_2). \end{cases}$$

- Les modules $\ker_D(.P)$, $\text{im}(.P)$, $\ker_D(.Q)$ et $\text{im}(.Q)$ sont **libres**.

$$U' = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \left(\frac{d}{dt} - \eta_1 - \eta_2 \right) - \left(\frac{d}{dt} + \eta_1 - \eta_2 \right) & -2\eta_2 & -\sigma_1 \left(\frac{d}{dt} - \eta_1 - \eta_2 \right) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 1 & 0 \\ \sigma_1^2 \sigma_2 (d - \eta_1 - \eta_2) - \sigma_2 (d + \eta_1 - \eta_2) & 0 & -\sigma_1 \sigma_2 (d - \eta_1 - \eta_2) & -2\eta_2 \end{pmatrix},$$

$$V' = \begin{pmatrix} \eta_2 & 1 \\ \eta_2 (\sigma_2^2 + 1) & \sigma_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \bar{S} = V' S U'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} + \eta_1 + \eta_2 & \sigma_1 \left(\frac{d}{dt} + \eta_2 - \eta_1 \right) & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

- Soient $U'' = \text{diag}(I_2, U')$, $V'' = \text{diag}(I_2, V')$. Nous avons alors:

$$\bar{R} = (V'' V) R (U'' U)^{-1} = \text{diag}(I_2, \bar{S}).$$

- Notons $\alpha = \eta_1 + \eta_2$ et $\beta = \eta_2 - \eta_1$. Nous avons alors:

$$\begin{cases} \phi_1(t) + \psi_1(t) - \phi_2(t) - \psi_2(t) = 0, \\ \dot{\phi}_1(t) + \dot{\psi}_1(t) + \eta_1 \phi_1(t) - \eta_1 \psi_1(t) - \eta_2 \phi_2(t) + \eta_2 \psi_2(t) = 0, \\ \phi_1(t - 2h_1) + \psi_1(t) - u(t - h_1) = 0, \\ \phi_2(t) + \psi_2(t - 2h_2) - v(t - h_2) = 0, \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\dot{z}_1(t) + \alpha z_1(t) + \dot{z}_2(t - h_1) + \beta z_2(t - h_1) + z_3(t - h_2) = 0.$$

\Rightarrow On peut calculer facilement une **paramétrisation** de la corde.

\Rightarrow Le système est **σ_2 -libre** et **σ_1 -libre**...

- Considérons le **mélangeur** suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + \frac{1}{2\theta} x_1(t) - u_1(t) - u_2(t) = 0, \\ \dot{x}_2(t) + \frac{1}{\theta} x_2(t) - \frac{(c_1 - c_0)}{V_0} u_1(t - \tau) - \frac{(c_2 - c_0)}{V_0} u_2(t - \tau) = 0. \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 - c_1 & c_0 - c_2 \\ \frac{d}{dt} + \frac{1}{2\theta} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + \frac{1}{2\theta} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{d}{dt} + \frac{1}{\theta} & -\frac{(c_1 - c_0)}{V_0} \delta & -\frac{(c_2 - c_0)}{V_0} \delta \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\theta} & \frac{1}{V_0} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Modèle de soufflerie (Manitius, IEEE TAC 84)

- Considérons le **modèle de soufflerie** suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + a x_1(t) - k a x_2(t - h) = 0, \\ \dot{x}_2(t) - x_3(t) = 0, \\ \dot{x}_3(t) + \omega^2 x_2(t) + 2 \zeta \omega x_3(t) - \omega^2 u(t) = 0. \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} \omega^2 & \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega^2 \left(\frac{d}{dt} + a\right) & -\omega^2 (k a \delta + 1) & -\left(\frac{d}{dt} + 2 \zeta \omega\right) & \omega^2 \\ 0 & \frac{d}{dt} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \omega^2 & \frac{d}{dt} + a & 0 \\ \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$V \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + a & -k a \delta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \frac{d}{dt} + 2 \zeta \omega & -\omega^2 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + a & -a k \omega^2 \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Equations de Dirac

$$R = \begin{pmatrix} d_4 & 0 & -i d_3 & -(i d_1 + d_2) \\ 0 & d_4 & -i d_1 + d_2 & i d_3 \\ i d_3 & i d_1 + d_2 & -d_4 & 0 \\ i d_1 - d_2 & -i d_3 & 0 & -d_4 \end{pmatrix}.$$

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V R U^{-1} = \begin{pmatrix} i d_3 - d_4 & -i d_1 - d_2 & 0 & 0 \\ i d_1 - d_2 & i d_3 + d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i d_3 + d_4 & i d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & i d_1 - d_2 & -i d_3 + d_4 \end{pmatrix}.$$

Ecoulement 2-D isentropique (Courant-Hilbert)

- Considérons α satisfaisant $1 + 4(c^2 - u^2)\alpha^2 = 0$ et l'anneau d'opérateurs $D' = (\mathbb{Q}(u, \rho, c, \alpha)/(1 + 4(c^2 - u^2)\alpha^2))[\partial_x, \partial_y]$.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha c(c^2 - u^2) & u\rho \\ 0 & 2\alpha c(c^2 - u^2) & -u\rho \\ u\rho & c^2 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(D'),$$

$$V = \begin{pmatrix} 2\alpha c & 1 & -2\alpha c u \\ 2\alpha c & -1 & -2\alpha c u \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(D'),$$

$$\Rightarrow V \begin{pmatrix} u\rho\partial_x & c^2\partial_x & 0 \\ 0 & c^2\partial_y & u\rho\partial_x \\ \rho\partial_x & u\partial_x & \rho\partial_y \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_x - 2\alpha c\partial_y & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x + 2\alpha c\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x \end{pmatrix}.$$

Bases de modules libres & Platitude

- Les modules n'ont généralement pas de bases!

$$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{Q}^3 \mid 2x+3y+5z=0\} = \mathbb{Q} \left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right)^T + \mathbb{Q} \left(-\frac{5}{2}, 0, 1\right)^T.$$

$$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{Z}^3 \mid 2x+3y+5z=0\} = \mathbb{Z} (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T + \mathbb{Q} (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2, \\ y = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2, \\ z = \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2, \end{cases} \quad t_i \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} t_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ t_2 = a_4 x + a_5 y + a_6 z. \end{cases} \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

- Un système $\ker_{\mathcal{F}}(R.)$ est **plat** s'il admet une **paramétrisation injective**, c-à-d, s'il existe $Q \in D^{p \times m}$, $T \in D^{m \times p}$ telles que:

$$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = Q \mathcal{F}^m, \quad T Q = I_m.$$

- Si \mathcal{F} est **assez large**, alors $\ker_{\mathcal{F}}(R.)$ est **plat** ssi le D -module à gauche $M = D^{1 \times p} / (D^{1 \times q} R)$ est **libre** (Fliess & co.).

Théorèmes de Quillen-Suslin et de Stafford

- Grâce aux **théorèmes de Quillen-Suslin** (conjecture de Serre) et **de Stafford**, nous savons reconnaître quand un module est libre et calculer des bases dans les cas suivants:
 - $D = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$: package **QUILLEN****SUSLIN** (Fabiańska).
 - $D = A[\partial_1, \dots, \partial_n]$, $A = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ ou $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$: package **STAFFORD** (Q.-Robertz).
 - Autres algèbres: heuristiques dans **OREMODULES**.
- $P^2 = P \Rightarrow \ker_D(.P)$ est un D -module libre dans le cas:
 - $D = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$,
 - $D = A[\partial_1, \dots, \partial_n]$, $A = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ ou $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$, sous la condition $\text{rank}_D(\ker_D(.P)) \geq 2$.

Le package MORPHISMS

- Les algorithmes correspondants ont été implémentés dans le package Maple **MORPHISMS** basé sur la librairie **OREMODULES** développée par Q. et Robertz:

<http://wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules>

- Liste des fonctions:
 - Morphisms, MorphismsConst, MorphismsRat, MorphismsRat1.
 - Projectors, ProjectorsConst, ProjectorsRat, Idempotents.
 - KerMorphism, ImMorphism, CokerMorphism, CoimMorphism.
 - TestSurj, TestInj, TestIso.
 - QuadraticFirstIntegralConst. . .
- Il sera bientôt librement accessible avec une librairie d'exemples.

Conclusion

- Nous avons utilisé des **techniques algébriques** et **de calcul formel** pour **simplifier** des systèmes linéaires étudiés en automatique.

⇒ Algorithmes & Implantation & Questions ouvertes.

- **Travail futur**: Utiliser ces techniques dans l'étude du découplage, du rejet de perturbation, des formes de Smith généralisées. . .
- Liens avec les **lois de conservation quadratiques** étudiées dans les sciences de l'ingénieur, **l'intégrabilité** des systèmes hamiltoniens. . .
- Travail à l'intersection des intérêts des communautés de l'automatique, du calcul formel, du calcul scientifique. . .
- Journée "Interactions entre théories algébriques et calcul scientifique. État-de-l'art et applications", 18/09/07, CNAM.